

模论与表示论初步 第十四讲

上节讲的主要结论: 群的所有有限维表示都是可约的 $\Rightarrow$ 有限维表示都是完全可约的. 只需研究不可约表示.

$\leadsto$ 特征标. ($\rho \cong \varphi \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\varphi$)

$\chi_\rho = \chi_\varphi \Rightarrow \rho \cong \varphi$ 关键是证明了 特征标的正交关系.

§4. 正交关系

4.1. 特征标的定义.

设 G 是一个群. 域 $\mathbb{C}$

设 $\rho: G \rightarrow GL_V$ 是 G 的一个表示. $\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{Tr}(\rho(g))$.

说明: ① $\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续的.

$\rho: g \mapsto (a_{ij}(g))_{n \times n}$ ρ 连续 $\Leftrightarrow a_{ij}: G \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续的, $1 \leq i, j \leq n$.

$\therefore \chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(g)$ 是连续的.

② $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g)) \xrightarrow{\text{Unitary Representation}} \text{Tr}(\overline{\rho(g)}) = \text{Tr}(\overline{\rho(g)}) = \sum_{i=1}^n \overline{a_{ii}(g)} = \overline{\chi_\rho(g)}$.

(是有限群情形的直接推广).

4.2. 双线性形式

有限群情形: $f, h \in (\mathbb{C}G)^*$

$$(f, h) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) h(g)$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \rightsquigarrow \text{Haar 积分}$$

定义: 取 $f, h \in C(G, \mathbb{C})$, $\xrightarrow{\text{continuous}}$ 定义

$$(f, h) := \int_G f(g) h(g) dg \quad \left(\int_G f(g) \overline{h(g)} dg \right) \quad \text{不依赖于群}$$

记号: ① $\text{Irr } G = \{ G \text{ 互不同构的不可约表示} \}$.

② $\text{Irrch } G = \{ \text{不可约特征标} \}$

4.3. 矩阵元的正交关系.

$\rho: G \rightarrow GL_n, g \mapsto (a_{ij}(g))$. $a_{ij}: G \rightarrow \mathbb{C}$. $\therefore a_{ij} \in C(G, \mathbb{C})$. 矩阵元.

定理: 设 $(V, \rho), (U, \varphi) \in \text{Irr } G$. 设 $\dim V = n, \dim U = m$. $\rho(g) = (a_{ij}(g))_{n \times n}$, $\varphi(g) = (b_{ij}(g))_{m \times m}$.

(i) 若 $\rho \neq \varphi$, 则

$$(a_{ij}, b_{kl}) = 0 \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq m.$$

② 若 $V \cong U$, 则

$$(a_{ij}, b_{kl}) = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad 1 \leq i, k, j, l \leq n.$$

证明: 记号: 如果 $M(g) = (c_{ij}(g))_{l \times l}$, $c_{ij} \in C(G, \mathbb{C})$. 则 $\int_G M(g) dg := (\int_G c_{ij}(g) dg)_{l \times l}$.

任取一复矩阵 $C_{m \times n}: V \rightarrow U$

令 $\tilde{C}_{m \times n} := \int_G \rho(g) C \rho(g) dg$ (想构造一个从 $V \rightarrow U$ 的 G -模同态).

$$\begin{aligned} \forall x \in G. \quad \rho(x) \tilde{C}_{m \times n} \rho(x) &= \rho(x) \int_G \rho(g) C \rho(g) dg \rho(x) = \int_G \rho(x) \rho(g) C \rho(g) \rho(x) dg \\ &= \int_G \rho(xg) C \rho(xg) dg = \int_G \rho(g) C \rho(g) dg = \tilde{C}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{C}} & U \\ \downarrow \rho(g) & & \downarrow \rho(g) \\ V & \xrightarrow{\tilde{C}} & U \end{array} \iff \tilde{C} \text{ is a morphism of } G\text{-modules.}$$

$$\iff \tilde{C} \rho(g) = \rho(g) \tilde{C} \iff \rho(g) \tilde{C} \rho(g) = \tilde{C}. \quad \checkmark$$

$\tilde{C}$ 是 G -module 同态.

$$\tilde{C} \in \text{Hom}_G(V, U).$$

① 如果 $V \not\cong U$, 由 Schur's Lemma (对互不等价的不可约表示成立),

$$\text{Hom}_G(V, U) = \{0\}. \quad \therefore \tilde{C} = 0. \quad \text{注意到 } C \text{ 是任意取的.}$$

$$\text{不妨设 } C = e_{ki} \quad (\text{矩阵单位 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 的 } (k) \text{ 位置})$$

$$\tilde{C} = \int_G \rho(g) e_{ki} \rho(g) dg = \int_G (\overline{b_{ji}(g)}) e_{ki} (a_{ij}(g)) dg = \int_G (\overline{b_{ji}(g)}) e_{ki} (a_{ij}(g)) dg = 0$$

$$\text{取第 } (l, j) \text{-位置. 得 } \int_G \overline{b_{kl}(g)} a_{ij}(g) dg = 0$$

$$\therefore (a_{ij}, b_{kl}) = \int_G a_{ij}(g) \overline{b_{kl}(g)} dg = 0.$$

$$(\text{If we take } (f, h) = \int_G f(g) \overline{h(g)} dg, (a_{ij}, b_{kl}) = 0)$$

② 若 $V \cong U$. 由 Schur's Lemma 知, $\text{Hom}_G(V, U) = \mathbb{C} \text{Id}_V$ (认同 $V=U$)

即: $\tilde{C} = \lambda I_n$. 如果确定 λ ?

$$\text{Tr}(\tilde{C}) = \text{Tr}(\lambda I_n) = n\lambda$$

$$\text{令 } C = e_{ki}, \quad \text{Tr}(C) = \delta_{ki}.$$

$$\text{Tr}(\tilde{C}) = \text{Tr}\left(\int_G \rho(g) C \rho(g) dg\right) = \int_G \text{Tr}(\rho(g) C \rho(g)) dg = \int_G \text{Tr}(C) dg = \text{Tr}(C) = \delta_{ki}.$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\delta_{ki}}{n} \quad \text{即 } \tilde{C} = \frac{\delta_{ki}}{n} I_n$$

同理, 取 $\tilde{C}$ 在 (l, j) -位置,

$$\therefore \frac{\delta_{ki}}{n} \delta_{lj} = (a_{ij}, b_{kl}) \quad \leftarrow \text{(由计算结果.)}$$

说明: 有限群的情形. 我们有

① 如果 $\rho \neq \varphi$, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \boxed{a_{ij}(g)} \overline{b_{kl}(g)} = 0$

② 如果 $\rho \cong \varphi$, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a_{ij}(g) \overline{b_{kl}(g)} = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}$.

4.4. 特征标的正交关系.

定理: 设 $(V, \rho), (U, \varphi)$ 分别为群 G 的两个不可约表示. 记其特征标分别为 χ_ρ, χ_φ . 则

$$(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \begin{cases} 1 & \rho \cong \varphi \\ 0 & \rho \not\cong \varphi \end{cases}$$

证明. $(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi_\varphi(g)} dg$

$$= \int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi_\varphi(g)} dg = \int_G \sum_{i=1}^n a_{ii}(g) \sum_{j=1}^m \overline{b_{jj}(g)} dg = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_G a_{ii}(g) \overline{b_{jj}(g)} dg$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ii}, b_{jj})$$

$\therefore$ 由前面介绍的矩阵元的正交关系, 我们有:

① 如果 $\rho \neq \varphi$, $(\chi_\rho, \chi_\varphi) = 0$.

② 如果 $\rho \cong \varphi$, $(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}, b_{ii}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$. ■

推论1: 设 U, V 分别为群 G 的两个不可约表示, 则

$$U \cong V \iff \chi_U = \chi_V.$$

推论2: 表示 φ 不可约 $\iff (\chi_\varphi, \chi_\varphi) = 1$.

推论3: 对任意两个有限维表示 U, V , 则 $U \cong V \iff \chi_U = \chi_V$.

其应用: • 表示的不可约分解.

• 张量积的分解公式.

问题是: 不可约表示的个数多少?

{类函数} $\leftarrow$ 特征标是一组基.

任意类函数都是特征标的线性组合!

§5. Peter - Weyl Theorem.

例. S' S' 上的连续函数 $= C(S', \mathbb{C})$

S' 上的不可约表示的基本性质: ① S' 的所有不可约表示都是一维的 ($\because S'$ 是交换的).

$$\textcircled{2} \rho_n: S' \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$$

是 S' 上的所有不可约表示.

问题: S' 上的所有连续函数能否被 $\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 的线性组合来逼近? $\checkmark$

回答: 更一般的情形: 实光滑的 周期函数 可以展开成 Fourier 级数的形式!

$$f(\theta) = \sum a_n \cos n\theta = \sum b_n \sin n\theta$$

更一般情形: $\mathbb{C}$ 上的连续周期函数具有 Fourier 展开式

$$f(\theta) = \sum \underline{a_n} e^{in\theta}$$

$\{\text{周期函数}\} = \{S' \text{ 上的函数}\}.$

Fourier 选择 $\sin nx, \dots$ 的一个主要原因是 三角函数比较方便! $\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta \right)$

Fourier 分析的另一种形式: S' 连续函数可以由一组交的函数线性逼近! 交的函数是互不相容的特征标.

5.1. 正交完备集.

定义: 设 G 是一个紧群. Δ 是 $C(G, \mathbb{C})$ 中的一个子集. Δ 称为完备的如果对于 G 上的任一连续函数 f 和 $\epsilon > 0$, 均 $\exists$ 复数 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ 和 $f_1, \dots, f_n \in \Delta$, s.t.

$$\left| f(g) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(g) \right| < \epsilon, \quad \forall g \in G.$$

进一步地, 如果 $(f, g) = 0$ for $f \neq g \in \Delta$. 则称 Δ 是正交完备的.

5.2. Peter - Weyl 定理.

定理: 设 G 是紧群. 则

① G 上的所有互不等价的有限维不可约复表示的矩阵元全体组成的集合是 $C(G, \mathbb{C})$ 的一个正交完备集.

② G 上的所有不可约特征标全体形成的集合是 G 的连续函数的集合的一个正交完备集. (特征标)