模论与表示论初步 第十五讲

回顾：紧群的情形下面：正交关系，Peter-Weyl 定理。

例子：S^1

§6. SU_2 的所有不可约表示

6.1. SU_2

由定义：$SU_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}' = I_2,\ \mathrm{Det}(A) = 1\}$

练习：证明 $SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$. （Hint：将 $A\bar{A}' = I_2$，$|A| = 1$. $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$）

说明：如果令 $H = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$，可以发现 H 是 Hamilton 四元数代数。

取 $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. 那么这四个元生成的子群就是 Q_8.

注意到，作为实线性空间，$\dim_{\mathbb{R}} H = 4$. $H = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. 可以定义一种内积：

$X = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$，$Y = \sum_{j=0}^{3} y_j e_j \in H$. $x_i, y_j \in \mathbb{R}$.

$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=0}^{3} x_i y_i$ （将 e_0, e_1, e_2, e_3 看成标准正交基）.

引理：$A \in SU_2 \iff \langle A, A \rangle = 1$. （练习）

故我们有群同构：$SU_2 \cong S^3$.

6.2. SU_2 的不可约表示.

- 表示的构造.

$\mathbb{C}[x, y]$：两个变元的多项式代数. 令 $V_n = \mathbb{C}[x,y]_{[n]} = \{\mathbb{C}[x,y] \text{ 中 } n \text{ 次齐次多项式}\}$
$= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x^i y^{n-i} \mid 0 \le i \le n\}$.

$\dim_{\mathbb{C}} V_n = n+1$.

定义：

$\Phi_n: SU_2 \longrightarrow GL_{V_n}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \Phi_n(A): x^i y^{n-i} \longmapsto (a_{11}x + a_{21}y)^i (a_{12}x + a_{22}y)^{n-i}$ $\qquad (x, y)A$

练习：证明上述的 Φ_n 是一个拓扑群同态.

$\therefore V_n$ 就是 SU_2 的一个 $n+1$ 维的表示.

定理: V_n 是 SU_2 的不可约表示.

证明: 令 $T=\left\{A(\theta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix} \,\middle|\, \theta\in\mathbb{R}\right\}\subset SU_2$

$\Phi_n(A(\theta))(x^jy^{n-j}) = (e^{i\theta}x)^j(e^{-i\theta}y)^{n-j} = (e^{i\theta})^{2j-n}x^jy^{n-j}$. 即 x^jy^{n-j} 都是 T 的特征向量且属于不同的特征子空间.

令 $W\subset V_n$ 是一个非0子表示. 只需证 $W=V_n$.

① W 在 T 的作用下是稳定的. ∴ W 在 T 的作用下也会成为特征子空间的直和.

从而 W 必然是某些 x^jy^{n-j} 的线性组合. 即: $\exists I\subset\{0,1,\dots,n\}$. s.t. $W=\mathrm{span}\{x^jy^{n-j}\mid j\in I\}$

② 由①, 不妨设 $x^{j_0}y^{n-j_0}\in W$

$\Phi_n\begin{pmatrix}z_1&z_2\\-\bar z_2&\bar z_1\end{pmatrix}(x^{j_0}y^{n-j_0}) = (z_1x-\bar z_2y)^{j_0}(z_2x+\bar z_1y)^{n-j_0}\in W$. 由于 z_1、z_2 是任意的. 可以假设 $\forall j\in\{0,1,\dots,n\}$. x^jy^{n-j} 的系数不是为0.

故 $x^jy^{n-j}\in W$. $\Rightarrow W=V_n$. □

引理: $V_n\not\cong V_m$ 若 $m\neq n$.

证明. 因为 $\dim V_n\neq\dim V_m$. □

定理: $\{V_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 SU_2 的所有不可约表示.

证明: 只需证明 $\chi_n=\chi_{V_n}$ 是 SU_2 上连续类函数的完备集. 为此需证如下的引理:

引理: (Stone-Weierstrass). 设 $C_0(S^1)$ 是 S^1 上的连续且满足 $f(e^{i\theta})=f(e^{-i\theta})$ 的函数.

令 $P=\{S^1$ 上的多项式函数 $g\mid g(e^{i\theta})=g(e^{-i\theta})\}$

则 P 在 $C_0(S^1)$ 中稠密.

继续定理的证明: 设 f 是 SU_2 的任一连续的类函数.

$\forall B\in SU_2$. 存在酉矩阵 U. s.t.
$UBU^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ for some $\theta\in\mathbb{R}$.

∴ $f(B)=f\left(\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right)$ (可以看成 $C(S^1)$ 中的元素. $f \rightsquigarrow f'(e^{i\theta}):=f\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$)

同时, $\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\theta}&0\\0&e^{i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$

∴ $f\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}e^{-i\theta}&0\\0&e^{i\theta}\end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(e^{i\theta})=f'(e^{-i\theta})$. $\rightsquigarrow f'\in C_0(S^1)$.

其次，计算一下 χ_n 在 T 上的作用.

$$\chi_n\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} (e^{i\theta})^{2j-n} \xlongequal{练习} \boxed{\frac{(e^{-i\theta})^{n+1}-(e^{i\theta})^{n+1}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}}$$

练习: $P=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\chi_n\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right\}$.

∴ 由 Stone-Weierstrass 定理 可得本定理. □

练习: 求出 $V_n\otimes V_m$ 的分解公式.

第六章: Some Further topics

§1. 对称群的表示

1.1. 对称群的元素表示法

① 常见 $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\ \pi(1)&\pi(2)&\cdots&\pi(n)\end{pmatrix} \longleftrightarrow$ 排列. 第一行也可以不按照自然序排序.

② 循环乘积形式. 称 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1}\cdots i_n\\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 & i_{r+1}\cdots i_n\end{pmatrix}$

为对称群中的一个循环. 简记为 $(i_1 i_2\cdots i_r)$.

称两个循环 $(i_1\cdots i_r),(j_1\cdots j_s)$ 为不交的如果 $\{i_1\cdots i_r\}\cap\{j_1\cdots j_s\}=\emptyset$.

易见 S_n 中的任意元素均可表达成为不交的循环的乘积.

∴ $\forall \pi\in S_n$. 定义. $c(\pi)$ 为 π 中包含的循环的个数.

l_ν 表示第 ν 个循环 $(1\le\nu\le c(\pi))$ 的长度.

j_ν 表示第 ν 个循环中的一元素.

$$\pi=\prod_{\nu=1}^{c(\pi)}(j_\nu\ \pi(j_\nu)\cdots\pi^{l_\nu-1}(j_\nu))$$

称 $\{l_1,\dots,l_{c(\pi)}\}$ 为 π 的型.

③ 长度为2的循环称为一个对换 (Transposition).

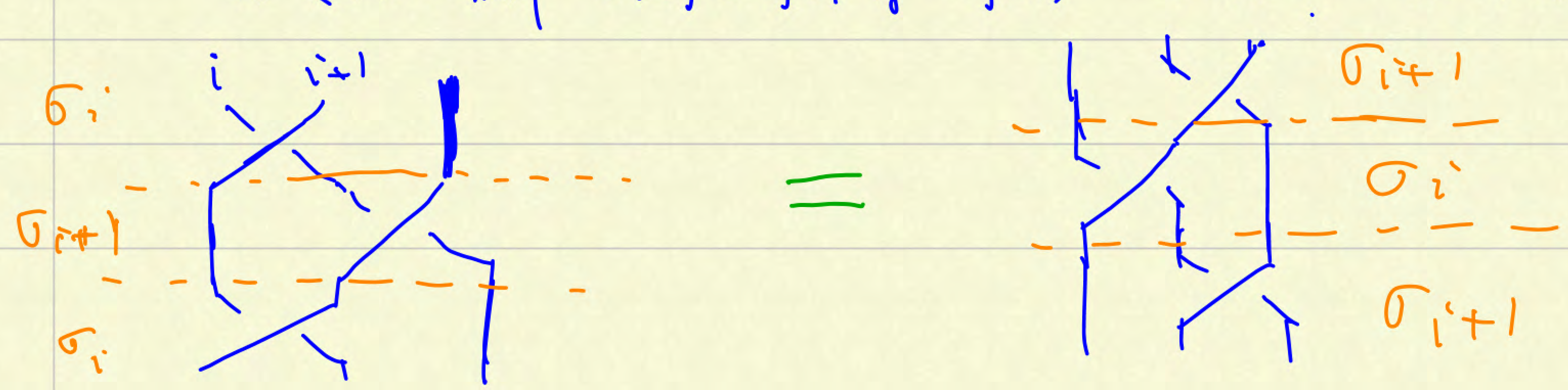
易见 $(i_1\cdots i_r)=(i_1i_2)(i_2i_3)\cdots(i_{r-1}i_r)$.

所以 S_n 中的任一元素均可写成对换的乘积.

因为: $\underline{(j,k+1)}=\underline{(k,k+1)(j,k)(k,k+1)}$. $j<k$.

∴ $S_n=\langle(12),(23),\dots,(n-1,n)\rangle$

$=\langle\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}\mid \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \text{ if } |i-j|>1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \sigma_i^2=1\rangle$.



braiding relation

延伸阅读: Artin's Braid Group.

④ 练习: $\sigma(i,j)\sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$.

由此验证 $(1,\cdots,n)^r\,(12)\,(1,\cdots,n)^{-r} = (r+1, r+2)$.

$\therefore\ S_n = \langle (12), (1,2,\cdots,n) \rangle$.

引理: $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. 则 σ_1, σ_2 属于同一个共轭类 $\Leftrightarrow$ σ_1, σ_2 有相同的型.

1.2. Young 图

① 自然数的拆分 (Partition).

定义: $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ 称为自然数 n 的一个 partition 如果 ① $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$; ② $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

记 $A_n = \{(\lambda_1 \cdots \lambda_k) \mid (\lambda_1 \cdots \lambda_k)$ 为 n 的拆分$\}$. 定义

$$P_n = |A_n|.$$

说明: • $P(n)$ 增长很快.

$P(10) = 42$, $P(20) = 627$, $P(50) = 204226$, $P(100) = 190569292$

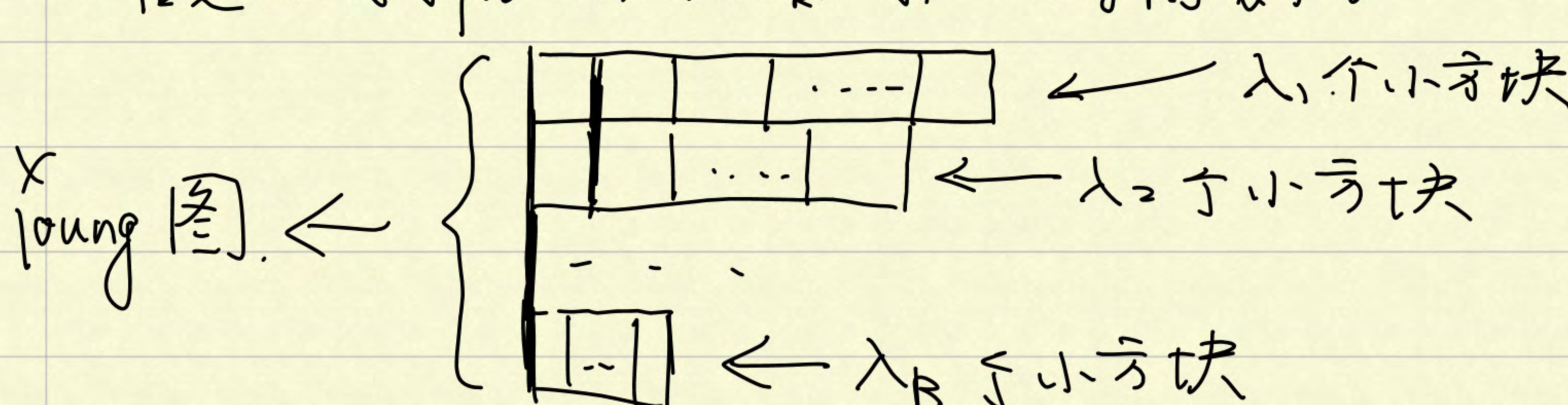
• $P(n) \sim \frac{1}{\alpha n} e^{\beta\sqrt{n}}$, $\alpha = 4\sqrt{3}$, $\beta = \pi\sqrt{2/3}$.

• $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n}$ $\quad |t|<1$ 收敛.

命题: S_n 有 $P(n)$ 个互不同构的不可约表示.

② Young Diagram.

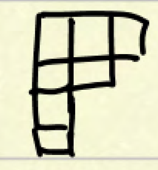
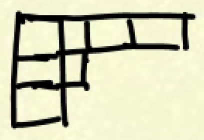
• 给定 n 的一个拆分 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$. 对应的 Young 图表示为



- 一个Young表就是一个Young图并同时将方格里不重复的放上 $1, 2, \dots, n$ 这些数字.

例. $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 7 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 8 \\ \cline{1-3} 6 & 9 \\ \cline{1-2} 10 \\ \cline{1-1} \end{array}$ S_{10} 的一个Young表.

- 转置Young图(表).

定义类似于矩阵的转置: $\lambda =$  $\to \lambda' :=$ 

- $\boxed{\text{Young子群}}$

给定一个Young表 λ. $\lambda \rightsquigarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$.

$$P_\lambda := \{ g \in S_n \mid g \text{ 保持 } \lambda \text{ 的每一行} \}$$

$$Q_\lambda := \{ g \in S_n \mid g \text{ 保持 } \lambda \text{ 的每一列} \}$$

命题: $P_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_k}$

$Q_\lambda \cong S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots \times S_{\lambda'_r}$. $\square$