第一章 预备知识

第节 1.1 域上的代数

定义：设 k 为一个域，令 A 为 k 上的一个线性空间，A 称为 k 上的一个（结合）代数 如果有一个映射 $m: A\times A \longrightarrow A,\ (a,b)\mapsto ab$

满足：1) m 是双线性的 i.e. $(a+b)c = ac+bc$, $(ka)b = k(ab)$.

相容性 $\Rightarrow$ $a(b+c)=ac+bc$, $a(kb)=k(ab)$.

2) 结合 i.e. $(ab)c=a(bc)$. 结合律

3) 存在幺元 1. 即 $\exists 1\in A$ s.t. $a1=1\cdot a=a$. $\forall a,b,c\in A$.

说明：k-代数 = 环 + 数乘.

例子：1) $M_n(k)$. +, 数乘 乘法. k-代数.

2) 四元数. $\mathbb{H}=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1,i,j,k\}$

$a=k_1 1+k_2 i+k_3 j+k_4 k$. $k_i\in\mathbb{R}$

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

① 双线性？

② 结合律？

Question: Define an inner product on $\mathbb{H}$. Consider the elements of length 1, which form a group. Quaternion group please determine the structure of this group! Q_8.

3) Polynomial alg. $k[x]$. 一元多项式环. +. ×.

它有线性空间结构，也是一个 k-alg.

4) $\mathrm{End}(V)$. $V\to V$ 全体线性变换. 合成(乘法)

$\varphi \longmapsto M_n(\varphi)$. 给定一组基下的矩阵. 保持 +. ×.

也是一个双射.

5) 群代数. 设G是个群. $kG:=\{\sum_{g\in G} a_g g \mid a_g\in k\}$. 在$kG$上定义乘法:
$\forall g,h\in G$. $g\cdot h:=gh$(群中的乘法).

1.2 子代数. 理想. 商代数.

定义. 设A是个代数. $B\subset A$称为A的一个子代数如果B在A的又,+,·下是个代数且$1\in B$.

注明: ① B是子代数$\Leftrightarrow B$是A的线性子空间+B是乘积;

② B是子代数$\Leftrightarrow 1\in B$且B在+,×,·封闭.

例: 1) $H<G$, kH是kG的子代数. (反之不真!)

$G=\mathbb{Z}_3=\langle g\mid g^3=1\rangle$. $e_0=\frac{1}{3}(1+wg+w^2g^2)$. $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

验证$e_0^2=e_0$, $\therefore$ $1, e_0$生成一维的子代数. 但$\mathbb{Z}_3$没有阶为2的子群.

2) $T_n=\{\begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}\}$全体上三角矩阵. 在+,×,·封闭. $\therefore$是$M_n(k)$的子代数.

3) $D_n=\{\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}\}$全体对角阵. 在+.×.·封闭. 也是子代数.

定理: 任一有限维代数都是全矩阵代数的子代数.

问题: 如何证明?

定义: $I\subseteq A$(代数)称为A的一个理想如果 1)I是子空间

2) $AI\subseteq I$, $IA\subseteq I$. 记为$I\lhd A$.

定义: 商代数. 设$I\lhd A$. 则商空间A/I有个乘法: $\forall a,b\in A$, $\bar{a},\bar{b}$为对应A/I中的元素. $\bar{a}\times\bar{b}:=\overline{ab}$. $(\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow a-b\in I)$ 合理性:
$\bar{a_1}=\bar{a}$, 则$\overline{a_1b}=\overline{ab}$.

模论与表示论初步 第二讲

回顾：k-代数，子代数，理想，商代数。

$Q_8 = \{i, j \mid i^4 = j^4 = 1, i^2 = j^2, ij = j^3 i\} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

1.3. 代数的同态

定义：设 A, B 为两个 k-代数，映射 $f: A \to B$ 称为一个同态如果

① $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $a, b \in A$

② $f(\lambda a) = \lambda f(a)$, $\lambda \in k$, $a \in A$;

③ $f(ab) = f(a) f(b)$, $\forall a, b \in A$.

④ $f(1) = 1$.

问题：群同态为什么不要求保持单位元？（因为已经蕴含了）。

例子：1) $\mathrm{End}(V) \to M_n(k)$; $A \longmapsto A$. $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为 V 的一组基. $A(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A$.

2) 群同态 $\varphi: G_1 \to G_2$. 可以诱导为一个群代数 $kG_1 \to kG_2$ 之间一个代数同态.

$\varphi: kG_1 \to kG_2$. $\sum_{g \in G_1} \lambda_g g \mapsto \sum \lambda_g \varphi(g)$.

问题：群代数之间的同态是不是都是由群同态给出？

例：$kZ_2 = \mathrm{span}\{\frac{1}{2}(1+g), \frac{1}{2}(1-g)\}$ 易证 $e_0 = \frac{1}{2}(1+g)$, $e_1 = \frac{1}{2}(1-g)$. $e_0^2 = e_0$, $e_1^2 = e_1$. $e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0$.

	e_0	e_1
e_0	e_0	0
e_1	0	e_1

$\varphi: kZ_3 \to kZ_3$. $e_1 \mapsto \frac{1}{3}(1+\omega h+\omega^2 h^2)$. $e_0 \mapsto 1 - \frac{1}{3}(1+\omega h+\omega^2 h^2)$

$g = e_0 - e_1 \mapsto 1 - \frac{2}{3}(1+\omega h+\omega^2 h^2)$

定义：k-代数 A, B 称为同构的，如果存在一个代数同态 $\varphi: A \to B$ 且 φ 是双射. 记为 $A \cong B$.

说明：如果 φ 是一个双射，且 φ 是代数同态（φ 也称为代数同构），则 φ^{-1} 也是代数同构.

3) 群同构给出群代数之间的同构.

问题：如果两个有限群 G_1, G_2 的群代数是同构的. i.e., $kG_1 \cong kG_2$. 那么 $G_1 \cong G_2$？

一般不正确. 有时特定下是正确的：$k = \bar{k}$, $\mathrm{char}\, k = 0$. G_1 是交换的. 则正确.

同态基本定理：设 $\varphi: A \to B$ 为一个代数同态. 则：

1) $\mathrm{Im}\varphi = \{b \in B \mid \exists a \in A, \text{ s.t. } \varphi(a) = b\}$ 是 B 的子代数；

2) $\ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ 是 A 的理想.

3) $A/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

补充：大家尝试去定义左理想，右理想. ($RI \subset I$, $IR \subset I$)

2. 模.

2.1. 模的定义和例子

定义. 设R为一个环. M为一个加群. M称为一个(左)R-模如果存在映射.

$R \times M \longrightarrow M \quad (r, m) \mapsto r \cdot m$ 满足

1) $(r_1+r_2)\cdot m = r_1\cdot m + r_2\cdot m$;

2) $(r_1 r_2)\cdot m = r_1\cdot(r_2\cdot m)$;

3) $r\cdot(m_1+m_2) = r\cdot m_1 + r\cdot m_2$;

4) $1\cdot m = m$. $m, m_1, m_2 \in M$. $r, r_1, r_2 \in R$.

- 类似地, 可以定义右R-模. $m\cdot(r_1 r_2) = (m\cdot r_1)\cdot r_2$

定义: 设R为一个环. 定义一个新的环 R^{op}: 1) 作为加群. $R^{op} = R$. 2) $a \circ b := ba$

反环.

说明: 1) M是一个左R $\Leftrightarrow$ M是右 R^{op}-模.

"$\Rightarrow$" $R \times M \to M$. $(r, m) \mapsto r\cdot m$.

$M \times R^{op} \to M$, $(m, r) \mapsto m \circ r := r\cdot m$ "$\Leftarrow$" $(R^{op})^{op} = R$.

2) 如果R是交换环. 则左R-模就是右R-模.

例. 1) $\mathbb{Z}$: 环. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个加群. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(m, \bar{m}_1) \mapsto \overline{m m_1}$.

2) R是自身上的模. $R \times R \to R$. 自身的乘法. 正则模.

3) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Q}$. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. $(z, \frac{p}{s}) \mapsto z\frac{p}{s}$.

4). 令I是R一个右理想. $R \times R/I$, $(r, \bar{r}_1) \mapsto \overline{r r_1}$. 例是特例.

反例. 乙是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模吗?

不是. 如果是. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}$. $\bar{1}\cdot 1 = 1$ (4)). $\bar{n}\cdot 1 = (\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}}_{n})\cdot 1 = \bar{1}\cdot 1 + \bar{1}\cdot 1 + \cdots + \bar{1}\cdot 1 = 1+1+\cdots+1 = n$.

但 $\bar{n} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\therefore \bar{n}\cdot 1 = 0$.

商环是环的模. 但反之不真.

定义: 设R, S是两个环. M称为R-S-双模如果

1) M是左R模; 2) M是右S-模; 3) $(r\cdot m)\cdot s = r\cdot(m\cdot s)$, $r \in R$. $s \in S$. $m \in M$.

2.2. 子模. 商模.

定义: 设M是一个左R-模. $N \subset M$ 是子加群. N称为一个子模如果 $\forall n \in N$. $r \in R$. 有

$r\cdot n \in N$.

2) 设N⊂M是一个子模. M/N为商加群. 则M/N上也有一个左R-模结构.

$R \times M/N, (r, \bar{m}) \mapsto \overline{r \cdot m}$.

且此作用下的R-模structure为M/N商模.

例 1) $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}$-子模. 同时 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$是一个$\mathbb{Z}$-商模.

2) 左理想时R就是R-模的子模. 且是左理想. 对应就是R-商模.

定义. 称一个非0的左R-模M是不可约的 (irreducible)如果M无非平凡的子模.

其中. 0. M称为平凡子模.

例 $\mathbb{Z}$作为$\mathbb{Z}$-模不是不可约的. $n\mathbb{Z}$是非平凡子模.

$n\mathbb{Z}$是否irreducible? × ($mn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 也 irreducible? 不一定. $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ ($t > 1$). 则 $p_1\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

令p 为素数. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ irreducible? √ (令 $N \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$一个非平凡子模. $\exists$ 0≠$\bar{t} \in N$. ∵ $\bar{t}$也irreducible

∴ $\exists\, t \in \mathbb{Z}$. s.t. $\bar{t} \cdot \bar{t} = \bar{j} \in N$. $\forall j \in \mathbb{Z}$. $\exists\, \bar{T} = \bar{j} \in N$)

($(i, p) = 1 \Leftrightarrow ti + sp = 1$
$\Rightarrow \bar{t}\bar{i} + \bar{s}\bar{p} = \bar{t}\bar{i} = \bar{1}$)

$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 不是不可约的. $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2.3. 模的直和. 不可分解模.

定义: 设M_1, M_2为2个左R-模 (module). M_1与M_2的直和 (direct sum)定义为: 1) 作为加群. $M_1 \oplus M_2 = \{ m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 \}$. $(m_1 + m_2) + (m_1' + m_2') := (m_1 + m_1') + (m_2 + m_2')$

2) $r \cdot (m_1 + m_2) := r \cdot m_1 + r \cdot m_2$. $r \in R$. $m_1 \in M_1$. $m_2 \in M_2$.

定义: 设M_1, M_2是两个左R-模. 映射 $f: M_1 \to M_2$称为一个R-模同态

如果 1) $f(m_1 + m_1') = f(m_1) + f(m_1')$; 2) $f(r \cdot m_1) = r \cdot f(m_1)$. $\forall r \in R$. $m_1, m_1' \in M_1$.

说明: 类似地. 也有R-模的同构. $M_1 \cong M_2$.

定义: 左R-模M称为不可分解的 (indecomposable)如果M不能表为两个真子模的直和.

模论与表示论初步 第三讲

回顾：代数版 例：子代数 商代数 代数同态

模 不可约 不可分解模

术语：有时会将不可约模也称为单模（simple）.

2.4 正合列（exact sequence）.

定义. 设R为一个环. M_1, M_2, M_3 都是R-模. 序列

$$0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \xrightarrow{f_2} 0$$

其中 i, π 都是模同态. 上述序列称为一个**正合列**如果

1) i 是单射；

2) π 是满射；

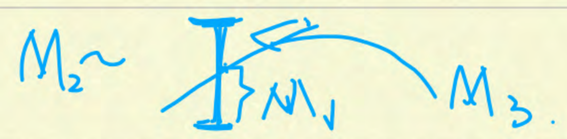
3) $\underline{\ker \pi} = \mathrm{Im}\, i$.

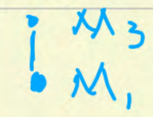
说明：① 3) $\ker i = 0 = \mathrm{Im} f_1$, $\ker f_2 = \mathrm{Im}\, \pi$.

② $\pi: M_2 \to M_3$. $\dfrac{M_2}{\ker \pi} \cong \mathrm{Im}\, \pi = M_3$.

$\ker \pi = \mathrm{Im}\, i \cong M_1$.

$\dfrac{M_2}{M_1} \cong M_3$!





应用：任取一个模（有限性）M. 取最小的子模 M_1. 即 M_1 是 simple.

形成 $0 \to M_1 \hookrightarrow M$, 构造商模 M/M_1. $0 \to M_1 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M_1 \to 0$

继续考虑 M/M_1 的最小子模 M_2. $0 \to M_2 \hookrightarrow M/M_1 = M' \twoheadrightarrow M'/M_2 \to 0$.

如果 M'/M_2 simple. 就说明 M' 是由单模 M_2 与 M'/M_2 形成的.

进而原来的 M 也是由单模构成的. M $\begin{cases} M_1 \\ M'/M_2 \\ M_2 \end{cases}$

如果 M'/M_2 不是单的. 继续上述的步骤即可.

问题：单层单是如何形成有限层的. （1-阿贝同调层单. $Ext^1(-,-)$）

例. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模. 不是单模. $\because 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 是一个真子模. 也为一个单模. $\therefore$ 可以形成一个正合列

$0 \to 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. $\quad 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\dfrac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. $\quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \leftarrow \begin{matrix}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\end{matrix}$.

再构造一个正合列

$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\Pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$. $\quad i(x)=(x,0)$, $\Pi(x,y)=y$.

平凡正合列 (分裂正合列, split exact sequence)

图: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2.5. 代数上的模.

例: 如果将 R 为域. 则 $R=k$ 上的模是什么?

M 是一个 k-模. M 上有加法. $k \times M \to M$, $(\lambda, m) \mapsto \lambda m$. 数乘.

M 就是一个 k-线性空间

定义. 设 A 为一个 k-代数 (代数=环+线性空间). $k \cdot 1_A \hookrightarrow A$

线性空间 V 称为一个 A-模. 如果存在"作用":

$A \times M \to M$, $(a,m) \mapsto am$. 满足

1) $(a+b)m = am+bm$;

2) $(ab)m = a(bm)$

3) $(ka)m = k(am)$

4) $a(m_1+m_2) = am_1+am_2$;

5) $a(km) = k(am)$; 6) $1_A \cdot m = m$. $\forall m, m_1, m_2 \in M$, $a, b \in A$, $k \in k$.

例: 1) A 是左 A 模. $A \curvearrowright A$. 正则模.

2) $A = kZ_2$. $A \curvearrowright A$ $Z_2 = \{1, g\}$. $A = k\cdot 1 + k\cdot g = V$

$1\cdot(1,g) = (1,g)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ → (1)

$g\cdot(1,g) = (g,1) = (1,g)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ → (12)

定义 一个模称为忠实 (faithful) 的. 如果 $a\cdot M = 0$, 则 $a = 0$.

例: 所有的正则模都是忠实的. $A \curvearrowright A$. $aA = 0 \Rightarrow a\cdot 1_A = a = 0$.

练习: 自行去找子模, 商模, 模同态, 对应, 不动点, 正合列 (对于代数上的模).

§3. 代表的表示.

3.1. 表示的定义和例子

定义. 设 A 为 k-代数. 一个二元组 (V, ρ) 称为 A 的一个表示. (Representation)

如果我们有:

1) V 是一个 k-线性空间

2) $\rho: A \to \mathrm{End}_k(V)$ 是一个代数同态.

有时, 我们简称 V 或 ρ 为 A 的一个表示.

说明 1). $\rho: A \to \mathrm{End}_k(V)$ 就是 A 中的元素 a, 在 ρ 的作用下成为了线性变换. A 就有了一种具体的实现方式.

2) 在相对较为的条件下. 表示的一般会 A 的有信息.

例: 1) kZ_2. $kZ_2 \longrightarrow M_2(k) \cong End_k(V)$. $V = k\cdot 1 + k\cdot g$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $G = \{g_1, g_2 \cdots g_n\}$

$V = \mathrm{Span}\{g_1, g_2, \cdots g_n\}$

$$kG \longrightarrow End_k(V), \quad g_i \mapsto g_i(g_1, \cdots g_n) = (g_i g_1, g_i g_2, \cdots, g_i g_n)$$

$$= (g_1, \cdots g_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定义: A-表示 (V, ρ) 称为 忠实的 如果 ρ 是一个单射.

$$A \xhookrightarrow{\rho} End_k(V).$$

3.2. 模与表示的关系

定理: 设 A 为一个 k-代数. V 是一个 A-表示 $\Leftrightarrow$ V 是一个 A-模.

证明: "$\Rightarrow$" 由代数同态 $\rho: A \to End_k(V)$.

$$\cdot A \times V \longrightarrow V, \quad (a, v) \mapsto \boxed{a \cdot v := \rho(a)(v)}$$

- $(a+b)\cdot v = \rho(a+b)(v) = (\rho(a)+\rho(b))(v) = \rho(a)(v) + \rho(b)(v) = a\cdot v + b\cdot v$;
- $(ka)\cdot v = \rho(ka)(v) = k(\rho(a)(v)) = k(a\cdot v)$;
- $(ab)\cdot v = \rho(ab)(v) = (\rho(a)\rho(b))(v) = \rho(a)(\rho(b)(v)) = a\cdot(b\cdot v)$;
- $a\cdot(v_1+v_2) = \rho(a)(v_1+v_2) = \rho(a)(v_1) + \rho(a)(v_2) = a\cdot v_1 + a\cdot v_2$;
- $a\cdot(kv) = \rho(a)(kv) = k\rho(a)(v) = k(a\cdot v)$.
- $1_A \cdot v = \rho(1_A)(v) \overset{\text{恒为变换}}{=} Id(v) = v$.

$\Leftarrow$ 设 V 是 A-模.

$$\rho: A \to End_k(V). \quad \boxed{\rho(a)(v) := a\cdot v.} \quad v \in V, \ a \in A.$$

结论: 达成了实际的一个表示.

定义：子表示、商表示、表示的同态、不可约表示、不可分解表示、正合列.

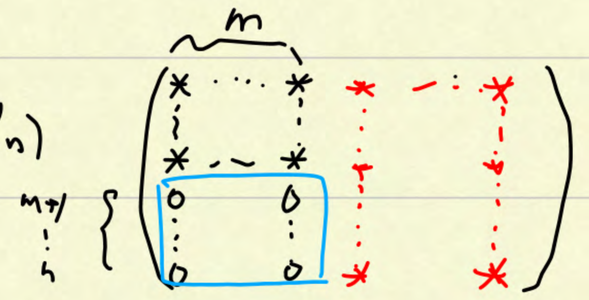
子表示：(V,ρ)-表示. 子空间 $W\subset V$ 称为子表示如果

$\forall a\in A$，都有 $\rho(a)(W)\subset W$.

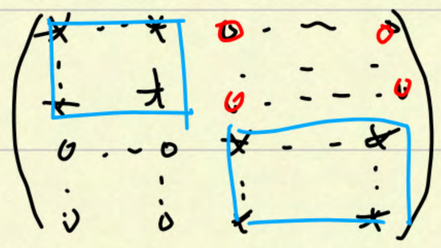
令 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 为 W 的一组基. 可扩充成为 V 的一组基

$\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$.

$\rho(a)(\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n)=$ $(\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots\alpha_n)$



何时能对角？



$\rho(a)(\mathrm{Span}(\alpha_{m+1},\cdots\alpha_n))$

$\subset \mathrm{Span}(\alpha_{m+1},\cdots\alpha_n)$

即 $\mathrm{span}(\alpha_{m+1},\cdots\alpha_n)$ 也是子表示. $V=W\oplus \mathrm{span}(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$

即 V 为表示的直和.

例：$kZ_2\curvearrowright kZ_2$. 此表示是否可约？ $W=k\cdot(1+g)$.

$\forall a\in kZ_2$. $\rho(a)(W)\subset W$.

$a=k_1\cdot 1+k_2 g$. $\rho(a)(1+g)=(k_1\cdot 1+k_2\cdot g)(1+g)=$

$k_1(1+g)+k_2 g(1+g)=k_1(1+g)+k_2(1+g)$

$=(k_1+k_2)(1+g)$.

Char $k\neq 2$.

$W_1:=\mathrm{span}(1-g)$. $g\cdot(1-g)=g-1=-(1-g)$.

$\rho(a)(1-g)=(k_1-k_2)(1-g)$

$\therefore W_1$ 也是子表示. $kZ_2=W_1\oplus W_2$. $\rho(g)(1+g,1-g)$

$\rho(g)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. $=(1+g,1-g)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

问题：群代数 $k[G]$ 的分解表示是否均不可约？

结论：定理：表示 V 是忠实 $\Leftrightarrow$ V 作为模是忠实.

证明：表示忠实 $\Leftrightarrow$ $\rho: A \to \mathrm{End}_k(V)$ 单 $\Leftrightarrow$ "$\rho(a)=0 \Rightarrow a=0$"

$\Leftrightarrow$ "$\rho(a)(V)=0 \Rightarrow a=0$"

$\Leftrightarrow$ $a \cdot V = 0 \Rightarrow a=0$ $\Leftrightarrow$ V 作为模忠实.

推论：$A \xhookrightarrow{\rho} \mathrm{End}_k(A) \cong M_n(k)$ （设 $\dim A = n$）

模论与表示论初步 第四讲

正合列. 代数⇔表示. 模⇔表示 $a\in A,\ m\in M$. $\boxed{a\cdot m=\rho_{a}(m)}$ $\rho: A\to End(M)$

§4. 张量积 (Tensor Product).

4.1. 定义. 例子.

假设 R 是一个环. ${}_RM$ 表示一个左 R-模. N_R 表示一个右 R-模.

定义: 令 $<N\times M>$ 表示由 $N\times M$ 生成的自由 Abel 群. 考虑由下面三类元素生成的子群:

① $(n_1+n_2,m)-(n_1,m)-(n_2,m)$ Abel群自身的加法. N 里的加法.

② $(n,m_1+m_2)-(n,m_1)-(n,m_2)$.

③ $(n\cdot r,m)-(n,r\cdot m)$ $n_1,n_2,n\in N,\ r\in R,\ m_1,m_2,m\in M$.

则 N_R 与 ${}_RM$ 的张量积, 记为 $N\otimes_R M$, 定义为 $<N\times M>/<上述三类元素>$.

说明: ① 张量积是一个 Abel 群

② 如果 ${}_SN_R$ 是一个 S-R-双模, 则 $N\otimes_R M$ 是一个左 S-模. 一会儿将介绍这种模结构.

同理, 如果 ${}_RM_S$ 是一个 R-S-双模, $N\otimes_R M$ 也是一个右 S-模.

③ $\pi: <N\times M>\longrightarrow N\otimes_R M$ 自然的满同态. 记 $\pi(n\times m):=n\otimes m$.

④ $\pi\big((n_1+n_2,m)-(n_1,m)-(n_2,m)\big)=(n_1+n_2)\otimes m-n_1\otimes m-n_2\otimes m=0 \iff (n_1+n_2)\otimes m=n_1\otimes m+n_2\otimes m$

类似地, $n\otimes(m_1+m_2)=n\otimes m_1+n\otimes m_2$

$n\cdot r\otimes m=n\otimes r\cdot m$. 一般来说, $N\otimes_R M$ 中的元素形如: $\sum_i n_i\otimes m_i$. $n_i\in N$, $m_i\in M$. ~~$n\otimes m$~~

例: ① $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. $\sum_i a_i\otimes b_i$ $a_i,b_i\in\mathbb{Z}$

$=\sum_i 1\cdot a_i\otimes b_i=\sum_i 1\otimes a_i\cdot b_i=\sum_i 1\otimes a_ib_i=1\otimes\underbrace{\sum_i a_ib_i}_{=a\in\mathbb{Z}}$

Claim: $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$. $\varphi:\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $\sum a_i\otimes b_i\longmapsto\sum a_ib_i$ well-defined. $\Phi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$, $a\longmapsto 1\otimes a$.

why φ is well-defined? Only need to prove $\varphi(=零元)=0$.

很容易证明 $\varphi\circ\Phi=Id$. $\Phi\circ\varphi=Id$.

② $\boxed{R\otimes_R R\cong R}$. 留作习题.

③ $\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}}$ (m,n) 最大公约数.

证明. 任取一个 Abel 群 M. M 都可以看成 $\mathbb{Z}$-模.

$M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong M$, $\sum m_i\otimes a_i\mapsto\sum m_i\cdot a_i$ (证明完全类似于①). $\varphi(M\otimes_{\mathbb{Z}}n\mathbb{Z})=nM$

- $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong M/nM$
- $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}$.

④ $\boxed{\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=0}$ $p\otimes a\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $p\otimes a=\frac{p}{m}m\otimes a=\frac{p}{m}\otimes\underline{m\cdot a}=\frac{p}{m}\otimes 0=0$.

4.2. 张量积的基本性质.

① 泛性质. (Universal property).

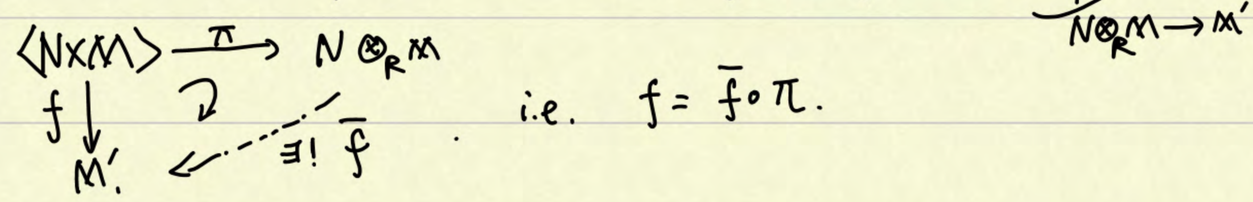
定义: 平衡双线性映射 (balanced. bilinear).

$f: \langle N \times M \rangle \longrightarrow M'$. 这里 ${}_RN$. ${}_RM$. M' 是-个Abel群

称为平衡双线性的. 如果. ① $f(n_1+n_2, m) = f(n_1, m) + f(n_2, m)$. ② $f(n, m_1+m_2) = f(n, m_1) + f(n, m_2)$

③ $f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n)$. $n_i, n \in N$. $m_i, m \in M$. $r \in R$.

定理: • 对任意的从 $\langle N \times M \rangle$ 到 M' 的平衡双线性映射, 都存在唯一的加群 $\bar{f}$ s.t. 下述交换图成立:

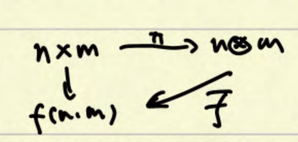


i.e. $f = \bar{f} \circ \pi$.

• 如果存在另外一个Abel群 L. 也满足上述性质, 则 $L \cong N \otimes_R M$.

证明: • 定义 $\bar{f}: N \otimes_R M \to M'$. $\sum_i n_i \otimes m_i \longmapsto \sum_i f(n_i, m_i)$.

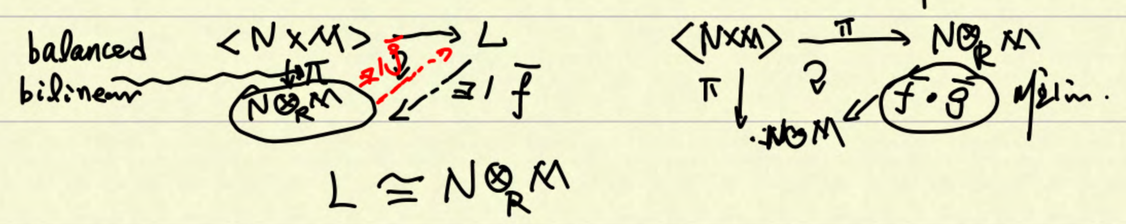
Well-defined $\Longleftrightarrow$ $\bar{f}$(三类元素)$=0$. $\Longleftrightarrow$ balanced. bilinear.

容易说明 $\bar{f}$ 使得交换图成立. 

下面 $\bar{f}$ 的唯一性: 如果 $\bar{f}'$ 也使得交换图成立. $\therefore \bar{f}'(n \otimes m) = \bar{f}' \circ \pi(n, m) = f(n, m) = \bar{f}(n \otimes m)$.

$\therefore \bar{f}' = \bar{f}$.

• 令 L 为另外一个满足上述性质的Abel群.



$L \cong N \otimes_R M$

$\therefore \bar{f} \cdot \bar{g} = Id_{N \otimes_R M}$. 类似地, $\bar{g} \cdot \bar{f} = Id_L$.

引理1: R 环. ${}_RM$. $R \otimes_R M \cong M$.

证明: $R \otimes_R M \longrightarrow M$, $\sum r_i \otimes m_i \mapsto \sum r_i \cdot m_i$; $M \longrightarrow R \otimes_R M$, $m \mapsto 1 \otimes m$.

引理2: $(M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \cong M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N$. (张量积保直和).

M_1, M_2 是右 R-模. N 是左 R-模.

证明: $\varphi: (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \longrightarrow M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N$, $(m_1 + m_2) \otimes n \mapsto m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

$\bar{\varphi}: M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N \longrightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N$. $i_1: M_1 \otimes N \hookrightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes N$

$\bar{\varphi} := i_1 + i_2$ $i_2: M_2 \otimes N \hookrightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N$

引理3: $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_S M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_S M_3)$.

证明: $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \longmapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$

说明: ① 一般没有"交换律". ($M_1 \otimes M_2$, $M_2 \otimes M_1$ 本质不同时定义).

② 在 $M_1 \otimes_S M_2$ 中. 如果 M_1 是一个 R-S-双模. 则 $M_1 \otimes_S M_2$ 构成左 R-模:

$$\forall r \in R. \quad r \cdot \left(\sum_i m_1^i \otimes m_2^i\right) := \sum_i r \cdot m_1^i \otimes m_2^i.$$

4.3. 线性空间之间张量积.

令 k 是一个域. V_1. V_2 是两个 k-空间. 所以一定可以定义张量积:

$$V_1 \otimes_k V_2. \quad (\text{通常记为 } V_1 \otimes V_2)$$

- $V_1 \otimes V_2$ 是一个加群. 同时也是一个线性空间. (这是因为 V_1. V_2 都是 k-k-双模).
- 什么是 balanced bilinear map?: $f: \langle V_1 \times V_2 \rangle \longrightarrow V_3$

① $f(v_1 + v_1', v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_1', v_2)$

② $f(v_1, v_2 + v_2') = f(v_1, v_2) + f(v_2')$.

③ $f(v_1 \lambda, v_2) = f(v_1, \lambda v_2) = f(\lambda v_1, v_2)$

bilinear map: ① + ② + $f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2) = f(v_1, \lambda v_2)$

推论: 对于任意一个双线性映射 $f: \langle V_1 \times V_2 \rangle \to V_3$, $\exists!$ 一个线性映射 $\overline{f}: V_1 \otimes V_2 \to V_3$.

令 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 为 V_1 的一组基. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 为 V_2 的一组基.

命题: $\{\alpha_i \otimes \beta_j \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $V_1 \otimes V_2$ 的一组基.

证明: 由张量积的基本性质. $k \otimes_k M \cong M$. 特别地. $k \otimes_k V \cong V$. 同样的. 取一个一维空间, $k\alpha$. 则 $k\alpha \otimes V \cong V$.

现在. $V_1 \otimes V_2 = (k\alpha_1 + \cdots + k\alpha_m) \otimes V_2 = (k\alpha_1 \oplus \cdots \oplus k\alpha_m) \otimes V_2$

$$\cong (k\alpha_1 \otimes V_2) \oplus (k\alpha_2 \otimes V_2) \oplus \cdots \oplus (k\alpha_m \otimes V_2) \cong V_2 \oplus \cdots \oplus V_2$$

$\therefore \dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$

∴ 现在只需证 $V_1 \otimes V_2$ 中任意一个元素均可由 $\{\alpha_i \otimes \beta_j \mid 1 \le i \le m \ 1 \le j \le n\}$ 线性表出即可.

又言之, $\forall \alpha \otimes \beta \in V_1 \otimes V_2$. $\alpha \in V_1$. $\beta \in V_2$.

$\therefore k_1 \cdots k_m$. $l_1 \cdots l_n \in k$. s.t. $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m$. $\beta = l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n$.

$$\therefore \alpha \otimes \beta = \left(\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n l_j \beta_j\right) = \sum_{i,j} k_i l_j \, \alpha_i \otimes \beta_j. \quad \square$$

模论与表示论初步 第五讲

回顾：张量积. V, W. $V=\mathrm{span}\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$. $W=\mathrm{span}\{\beta_1\cdots\beta_m\}$. $V\otimes_k W=\mathrm{span}\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid \substack{1\le i\le n,\\ 1\le j\le m}\}$.

$\pi: \langle V\times W\rangle \longrightarrow V\otimes_k W$

$(\alpha_i,\beta_j)\longmapsto \alpha_i\otimes_k\beta_j$

第二章. 群表示初步

§1. 群表示

1.1. 定义和例子.

记号：V 是 k 上一个 n 维线性空间. $GL_V=\{V\to V$ 的有个逆线性变换$\}$. 这是一个群.

一般线性群. (General Linear Group)

如果选定 V 的一组基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$. $GL_V\cong\{n\times n$ 个逆矩阵$\}:=\boxed{GL_n}$.

定义：设 G 是一个群. 称群同态 $\rho: G\to GL_V$ 为群 G 的一个线性表示. 记为 (ρ, V). 有时也简记为 V. 或 ρ.

命题：V 是 G 的一个表示 $\Leftrightarrow$ V 是 kG 的一个表示.

证明：$\Rightarrow$ $\rho: G\to GL_V$. 构造

$$\rho: kG\longrightarrow \mathrm{End}(V),\ \sum_{g\in G}\lambda_g g\mapsto\sum_{g\in G}\lambda_g\rho(g).$$

$\Leftarrow$：同样取一个代表同态. $\rho: kG\to\mathrm{End}(V)$.

$\leftarrow$ $\rho: G\longrightarrow$ (?) $\underset{\text{Aut}(V)=GL_V}{\text{之内}}$ $\rho|_G$. 只需证 $\rho(G)\subset GL_V$. 但这是显然的. $\rho(1)=1$

$$\rho(1)=\rho(gg^{-1})=\rho(g)\rho(g^{-1})=1\Rightarrow\rho(g)\text{ 可逆}.\ \square$$

注意：① 大家都以类似地定义了表示. 简表示. 表示的同态. 正合列.

② 表示的同态：$f: V_1\to V_2$. $\boxed{f(g\cdot v)=g\cdot f(v)}$. $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ 表示所有 $V_1\to V_2$ 的表示的同态形成的集合.

例.

① 平凡表示. (Trivial Representation). $\forall G$. 建立一个 1 维的表示. $\rho: G\to k^*$, $\boxed{g\mapsto 1}$. $GL_V=k^*$, $\dim V=1$ 时如此.

② (对称群特有的表示) 符号表示 (Sign Representation)

$\mathrm{Sgn}: S_n\longrightarrow k^*$. 奇置换 $\mapsto -1$, 偶置换 $\mapsto +1$.

③ 想给出 S_n 一个典范表示. 令 V 为一个 n 维的线性空间. 令 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 为一组基.

$S_n\curvearrowright(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 想象成 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(1,2,\cdots,n)$

$\sigma\in S_n$. $\sigma(1,2,\cdots n)$.

$\sigma\longmapsto n\times n$ 的矩阵. $\begin{pmatrix}\cdots & 1 & \cdots\\ 1 & \cdots & \\ & \ddots & \end{pmatrix}$

$\therefore S_n\hookrightarrow GL_n$. 任意有限群都是线性群.

④ Regular Representation (同学们自行给出).

⑤ 考虑一种特殊的正则表示. $k\mathbb{Z}_n\curvearrowright k\mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{Z}_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$. 在 $k\mathbb{Z}_n$ 中构造一个元素. $v_1 = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$. $g \cdot v_1 = g \sum_{i=0}^{n-1} g^i = \sum_{i=0}^{n-1} g^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-1} g^i = v_1$.

· kv_1 是一个平凡表示.

· 假设 $k=\bar{k}$. $\mathrm{char}\, k = 0$. 令 ξ_n 为一个 n 次本原单位根. 即: $\xi_n^n = 1$. 但 $\xi_n^m \neq 1$ for $m < n$. $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

构造 n 个元素: $\boxed{w_i := \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{-ij} g^j}$ $(v_1 = w_0)$ $0 \le i \le n-1$

$$g \cdot w_i = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{-ij} g^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{i} \cdot \xi_n^{-i(j+1)} g^{j+1} = \xi_n^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{-i(j+1)} g^{j+1}} = \xi_n^i w_i$$

意味着. kw_i 也是 $k\mathbb{Z}_n$ 的一个一维表示.

一共构造出 n 个一维表示. 恰恰为 $x^n - 1$ 的 n 个根. $k\mathbb{Z}_n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} kw_i$ ← irreducible rep.

§2. 表示的常用构造法.

2.1. 直和. (Direct sum).

令 V_1, V_2 为群 G 的两个表示. 构造线性空间的直和: $V_1 \oplus V_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

$\forall g \in G$. $g \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) := \underset{\in V_1}{g \cdot \alpha_1} + \underset{\in V_2}{g \cdot \alpha_2}$.

容易验证 $(g_1 g_2) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = g_1 \cdot (g_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2))$. 于是为表示的直和.

(令 V, W 为任意两个域 k 的线性空间. 令 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 是 V 的一组基. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 为 W 的一组基. 构造一个 $\alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1 \cdots \beta_n$ 为基的线性空间这就是 V 与 W 的直和)

矩阵形式: $g \in G$ $\quad \underset{V_2}{\overset{V_1}{}}$ $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ $\rho_1(g)(\alpha_1 \cdots \alpha_m) = \cdots A$
$\beta_1 \cdots \beta_n$ $\rho_2(g)(\cdots) = \cdots B$.

$$g \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1 \cdots \beta_n) = (\cdots) \boxed{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

2.2. 张量表示 (tensor product of rep.)

令 V_1, V_2 分别为群 G 的两个有限维表示.

作为线性空间, 对应定义 $V_1 \otimes_k V_2 = V_1 \otimes V_2$, 建立 $\rho: G \longrightarrow GL_{V_1 \otimes V_2}$ $\boxed{g \cdot (v_1 \otimes v_2) := g \cdot v_1 \otimes g \cdot v_2}$

对应证 ρ 是一个群同态. $(g_1 g_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) \overset{?}{=} g_1 \cdot (g_2 \cdot (v_1 \otimes v_2))$. (自行验证).

矩阵形式: 为此, 令 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 为 V_1 的一组基. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 为 V_2 的一组基. $\rho_1(g)(\alpha \cdots) = (\alpha_1 \cdots \alpha_m)(a_{ij})$ ← A.

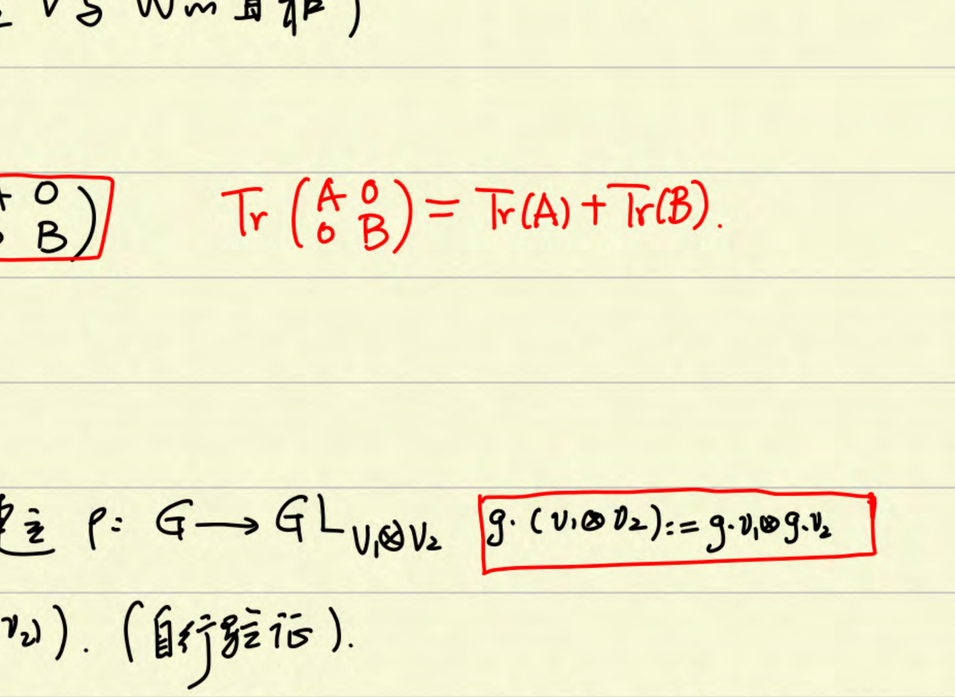
$\rho_2(g)(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\beta_1 \cdots \beta_n)(b_{ij})$ ← B

$$\{\alpha_i \otimes \beta_j \mid 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n\}^2$$

$$\rho(g)\begin{pmatrix} \alpha_1 \otimes \beta_1, \alpha_1 \otimes \beta_2, \cdots, \alpha_1 \otimes \beta_n \\ \alpha_2 \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \beta_2, \cdots \alpha_2 \otimes \beta_n \\ \vdots \\ \alpha_m \otimes \beta_1, \alpha_m \otimes \beta_2, \cdots \alpha_m \otimes \beta_n \end{pmatrix} = (\cdots)$$

$g \cdot \alpha_1 \otimes g \cdot \beta_1 \to \beta_2$ $\quad b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \cdots + b_{n2}\beta_n$

$= (a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{m1}\alpha_m) \otimes (b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_2 + \cdots + b_{n1}\beta_n)$



$$Tr(A\otimes B)=Tr(a_{11}B)+\cdots+Tr(a_{mm}B)=a_{11}Tr(B)+\cdots a_{mm}Tr(B)=(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mm})\,Tr(B)=Tr(A)\,Tr(B).$$

2.3. 反表示 (对偶表示. Dual rep).

令 V 是 G 的一个有限维表示. $V^*=Hom_k(V,k)$.

$\forall g\in G.\ f\in V^*.$ $\boxed{(g\cdot f)(v):=f(g^{-1}\cdot v)}$ $v\in V$

证. $g_1,g_2\in G.$ $g_1g_2\cdot f=g_1(g_2\cdot f).$

$((g_1g_2)\cdot f)(v)=f((g_1g_2)^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}g_1^{-1}\cdot v).$

$(g_1\cdot(g_2\cdot f))(v)=(g_2\cdot f)(g_1^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot v))=f((g_2^{-1}g_1^{-1})\cdot v)=((g_1g_2)\cdot f)(v)$. why g^{-1}?

为了结合律的证.

矩阵形式: 令 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 为 V 的一组基. $g\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_m)=(\cdots)A.$ $g^{-1}\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_m)=(\cdots)A^{-1}.$

令 $f_1\cdots f_m$ 为 $(\alpha_1\cdots\alpha_m)$ 的对偶基: $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ (Dual basis).

$g\cdot(f_1\cdots f_m)=(f_1\cdots f_m)(\ \ )$?

$(g\cdot f_1)(\alpha_1)=f_1(g^{-1}\cdot\alpha_1)=f_1(b_{11}\alpha_1+\cdots b_{1m}\alpha_m)$ $g^{-1}\mapsto A^{-1}=(b_{ij})$ $\Longrightarrow$ $g\cdot f_1=b_{11}f_1+\cdots$
$=b_{11}.$

$(g\cdot f_1)(\alpha_2)=f_1(g^{-1}\cdot\alpha_2)=f_1(b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{m2}\alpha_m)\Rightarrow g\cdot f_1=b_{11}f_1+b_{12}f_2+\cdots$
$=b_{12}.$

$\cdots\cdots$ $g\cdot f_1=b_{11}f_1+b_{12}f_2+\cdots+b_{1m}f_m.$

$g\cdot(f_1,\cdots,f_m)=(f_1,\cdots,f_m)\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots\\ b_{12} & \\ \vdots & \\ b_{1m} & \end{pmatrix}$ ← C.

由上面的计算知道. $\boxed{C=(A^{-1})'}$

$Tr(C)=Tr(A^{-1})$. (对偶表示更依取迹).

2.4. Hom 表示.

令 V_1,V_2 分别为 G 的两个表示. $Hom_k(V_1,V_2)$ ← 是一个线性空间. $\dim V_1\cdot\dim V_2$.

定义: $\forall f\in Hom_k(V_1,V_2).\ \forall g\in G.$

$\boxed{(g\cdot f)(v_1):=g\cdot(f(g^{-1}\cdot v_1))}$ (自行验证这是一个表示).

命题: $Hom_k(V_1,V_2)\cong V_1^*\otimes V_2$. (作为表示的同构).

证. 证: $V_1^*\otimes V_2\longrightarrow Hom_k(V_1,V_2)$

$f\otimes v_2\longmapsto \underline{证(f\otimes v_2)}:v_1\longmapsto \underline{f(v_1)v_2}$ $f\in V_1^*$, $v_i\in V_i$
$\in V_2$

首先证明证是一个单射. 即需证 $证(f\otimes v_2)=0\Rightarrow f\otimes v_2=0.$ 现证: $\because 证(f\otimes v_2)=0\in Hom_k(V_1,V_2)$. 即对 $\forall v_1\in V_1$.

我们都有 $证(f\otimes v_2)(v_1)=0\Leftrightarrow f(v_1)v_2=0.$ if $f\neq 0.\ \exists v_1\in V_1.$ s.t. $f(v_1)\neq 0$
$\because f(v_1)v_2=0\Rightarrow v_2=0$ $\therefore f\otimes v_2=0.$

总之, $f\otimes v_2=0.$ $\therefore$ 证是单射.

其次, $\dim Hom_k(V_1,V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2=\dim V_1^*\cdot\dim V_2=\dim V_1^*\otimes V_2.$ $\therefore$ 证也是满射.

$\forall g \in G$. $\quad \overline{\Phi}(g\cdot(f\otimes v_2)) = g\cdot\overline{\Phi}(f\otimes v_2)$.

对v_1, 左边$(v_1) = \overline{\Phi}(g\cdot(f\otimes v_2))(v_1) = \overline{\Phi}(g\cdot f\otimes g\cdot v_2)(v_1) = (g\cdot f)(v_1)\,(g\cdot v_2) = f(g^{-1}\cdot v_1)\,g\cdot v_2$ $\quad f\in V_1^*$

右边$(v_1) = \left(g\cdot\overline{\Phi}(f\otimes v_2)\right)(v_1) = g\cdot\left(\overline{\Phi}(f\otimes v_2)(g^{-1}\cdot v_1)\right) = g\cdot\left(f(g^{-1}\cdot v_1)v_2\right) = f(g^{-1}\cdot v_1)\,g\cdot v_2$

$\therefore \overline{\Phi}$也是模同态. $\qquad \square$

说明: 特别地, 如果$V_1 = V_2 = V$. 就得到 $End(V)\cong \boxed{V^*\otimes V}$.

通常一个给定: 令$\alpha_1\cdots\alpha_m$为V的一组基. $f_1\cdots f_m$为对偶基 $\sum_{i=1}^{m} f_i\otimes\alpha_i$ 不依赖于基的选择.

原因是. $\quad \overline{\Phi}: V^*\otimes V \to End(V)$ $\quad \overline{\Phi}(\sum_i f_i\otimes\alpha_i) = Id_V$.

思考: 证明 $V^*\otimes V$包含一个1维表示, 该1维表示的平凡表示. (当$\dim V\geq 1$).

模论与表示论初步 第六讲

§2. Maschke 定理.

引理1. (线性空间的情形). 令 $V_1 \subset V$ 是 V 的一个子空间. 则 V_1 是 V 的直和项 $\Leftrightarrow$ 存在线性映射 $P: V \to V_1$ s.t. $P|_{V_1} = Id_{V_1}$.

证明: "$\Rightarrow$" 即 $\exists V_2 \subset V$ s.t. $V = V_1 \oplus V_2$.

定义: $P: V = V_1 \oplus V_2 \to V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1$.

"$\Leftarrow$". 令 $V_2 = \ker P = \{v \in V \mid P(v) = 0\}$. ∴ 由之前代数中知识知道, $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

$\forall v \in V$. $P(\underline{v - P(v)}) = P(v) - P(\underbrace{P(v)}_{\in V_1}) = P(v) - P(v) = 0$. ∴ $v - P(v) \in V_2$. ∴ $v = \underbrace{P(v)}_{\in V_1} + \underbrace{(v - P(v))}_{\in V_2}$

∴ $V = V_1 + V_2$. ∴ $V = V_1 \oplus V_2$. □

引理2. (模的情形). 设 R 是一个环. $M_1 \subset M$ 是一个 R-模. 则 M_1 是 M (作为模) 的直和项 $\Leftrightarrow$ $\exists$ R-模同态 $P: M \to M_1$ s.t. $P|_{M_1} = Id_{M_1}$.

证明: "$\Rightarrow$" ✓ $M = M_1 \oplus M_2$. $P: M \to M_1$, $(m_1, m_2) \mapsto m_1$.

"$\Leftarrow$" 令 $M_2 = \ker P$. 由引理1, 知道 $M = M_1 \oplus M_2$ (作为加群或线性空间).

只需证 M_2 是模. ∵ P 是模同态. ∴ $\ker P$ 是模.

定理 (Maschke). 令 G 是一个有限群. $\mathrm{Char}\, k$ 表示域 k 的特征) 如果 $\mathrm{Char}\, k \nmid |G|$.

则 G 的任何有限维表示都是完全可约的. (即任何有限维都是不可约模的直和).

证明: 任取一个 G 的有限维表示 M. $M_1 \subset M$ 子表示. 只需证 M_1 是 M 的直和项 (作为模).

(如果成立. 则 $M = M_1 \oplus M_2$ 不可约了吗).

首先, 我们知道, 作为线性空间. 一定存在子空间 V_2. s.t. $M = M_1 \oplus V_2$.

由引理1, $\exists$ 线性映射 $P: M \to M_1$. s.t. $P|_{M_1} = Id$.

构造 $\overline{P}: M \to M_1$. $\overline{P}(m) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot m)$.

Claim: $\overline{P}$ 是 G-模同态.

Claim 的证明: ① $\overline{P}$ 是线性的 V.

② $\forall h \in G$. $\overline{P}(h \cdot m) \overset{?}{=} h \cdot \overline{P}(m)$. $\overline{P}(h \cdot m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot h \cdot m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P((h^{-1}g)^{-1} \cdot m)$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \underline{h^{-1}g} \cdot P((h^{-1}g)^{-1} \cdot m) = h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underline{h^{-1}g} \cdot P((h^{-1}g)^{-1} \cdot m) \right)$

$= h \cdot \overline{P}(m)$. ∴ $\overline{P}$ 是模同态.

由引理2, 知 $M_2 = \ker \overline{P}$. $M = M_1 \oplus M_2$ (作为模).

显然 $\overline{P}: M \to M_1$. $\forall m_1 \in M_1$. $\overline{P}(m_1) = m_1$. 事实上,

$\bar{P}(m_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}\cdot m_1)$. $\because m_1\in M_1$, $g^{-1}\cdot m_1\in M_1$. $P|_{M_1}=Id$.

$\therefore \bar{P}(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \underbrace{g\cdot g^{-1}}\cdot m_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m_1 = m_1$. □

注明：① 今常研究不予给表示 pp 为. 如果 $char\nmid |G|$.

② 如果 $char\nmid |G|$, G 的表示就称为常表示说. 否则称为模表示说.

③ 为何说明，$char\nmid |G|$ 是充分的也是必要的.

例1 $G=\mathbb{Z}_2$. F. $charF=2$. $F\mathbb{Z}_2 \curvearrowright F\mathbb{Z}_2$. 当 $\mathbb{C}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{C}\underbrace{(\frac{1}{2}(1+g))}\oplus\mathbb{C}\underbrace{(\frac{1}{2}(1-g))}$

但 $F\mathbb{Z}_2$ 没有此分解. 如果有，$F\mathbb{Z}_2$ 也为一维子模的直和.

claim. $F\mathbb{Z}_2$ 的一维模都平凡的.

事实上，令 V 为 $F\mathbb{Z}_2$ 的一个一维模. $V=F\cdot v$.

$g\cdot v=\lambda v$. $g^2-1=0$. $\therefore (g^2-1)\cdot v=0$

$\therefore \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1 \Rightarrow \lambda=1$. $\therefore g\cdot v=v$. □

$\therefore F\mathbb{Z}_2$ 是平凡模的和. 即: $g\cdot x=x \ \forall x\in F\mathbb{Z}_2$. ∠.

习题: $F\mathbb{Z}_2$ 是不分解的. 有多长 (不是不分的)

本门课程我们只讨论常表示说. 习惯上，通常我们取的域都是 $\mathbb{C}$.

第三章. 特征标 (character)

§1. 特征标的定义和简单性质.

迹 (Trace). $\mathcal{A} \in \underline{L(V)}$. 令 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为 V 的一组基. $\mathcal{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$.

$Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. 定义: $\boxed{Tr(\mathcal{A}) := Tr(\underline{A})}$.

相似 (similar) $A \sim B$. $A = C^{-1}BC$. $Tr(A) = Tr(B)$. $Tr(A)$ 是特征多项式的根之和.

定义. 令 V 为 G 的一个表示 (有限维). $\rho: G \to GL_V$. 表示的特征定义为:

$$\boxed{\chi_\rho: G \longrightarrow k. \quad g \mapsto Tr(\rho(g))}$$

有时简记为 χ.

注明: χ_ρ 是 G 上的一个函数. 不是同态!

以后总是开始, 令 $\underline{k = \mathbb{C}}$

命题: ① $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

② $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

证明: ① $\rho(g) \in GL_V$ 是可对角化的.

$\because G$ 是有限群. $\therefore g$ 的阶有限. 即 $\exists n$. s.t. $g^n = 1$. $\rho(g)^n = Id_V$. $\therefore \rho(g)$ 满足多项式 $x^n - 1 = 0$. $\therefore \rho(g)$ 的最小多项式一定是 $x^n - 1$ 的因式. 但 $x^n - 1$ 是无重根的. ($x^n - 1$ 的根 $e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot j}$, $0 \le j \le n-1$). $\therefore \rho(g)$ 的最小多项式无重根.

$\therefore \rho(g)$ 可对角化. 即 $\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- λ_i 都是单位根. (即 $\exists d \in \mathbb{N}$. s.t. $\lambda_i^d = 1$)

这也是因为 $g^m = 1$. $\therefore \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. $\therefore \lambda_i^m = 1$.

下面给出证明①. $\rho(g^{-1}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \overline{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}$ $\lambda_i \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 = 1$

$\therefore Tr(\rho(g^{-1})) = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_n} = \overline{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \overline{Tr(\rho(g))}$. 即 $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

② $\rho(hgh^{-1}) = \rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})$. 随便取一组基. 给出 $\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})$ 对应的矩阵

和 $\rho(g)$ 对应的矩阵是相似的. $\therefore Tr(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})) = Tr(\rho(g))$. 即. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

定义: G 上的一个函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 称为类函数. 如果 $f(ghg^{-1}) = f(h)$. $\forall g, h \in G$. Class function.

说明: · 类函数在同一个共轭类取常值.

· 特征标都是类函数.

§2. G 的表示.

令 $\mathbb{C}^G := \{f: G \to \mathbb{C}\}$. 同时我们还给出考虑 $(\mathbb{C}G)^* = \{\mathbb{C}G \text{ 上全体线性函数}\}$.

Claim $\mathbb{C}^G = (\mathbb{C}G)^*$.

$\forall f \in \mathbb{C}^G$. $f: G \to \mathbb{C}$. 可以通过线性扩张. 得 $(\mathbb{C}G)^*$.

反之, 取 $f \in (\mathbb{C}G)^*$. 则 $f|_G \in \{G \to \mathbb{C}\}$.

注意. $(\mathbb{C}G)^*$ 是一个代数.

证明: $\forall f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$. $(f_1 \cdot f_2)(g) := f_1(g) f_2(g)$.

定义: 一个代数 A 称为 $*$-代数 如果 $\exists$ 一个线性映射: $*: A \to A$, $a \mapsto a^*$. 满足

① $(a^*)^* = a$, $\forall a \in A$. ② $(ab)^* = b^* a^*$. $\forall a, b \in A$.

例: $A = M_n(k)$. $*: A \to A$, $(a_{ij}) \mapsto (a_{ij})^T$. $(BC)^T = C^T B^T$. $M_n(k)$ 是一个 $*$-代数.

命题: $(\mathbb{C}G)^*$ 是一个 $*$-代数.

证明. $*: (\mathbb{C}G)^* \to (\mathbb{C}G)^*$, $f \mapsto f^*$.

$f^*(g) := f(g^{-1})$. $\forall g \in G$.

$f^{**}(g) = f^*(g^{-1}) = f(g)$. $\therefore f^{**} = f$.

$(f_1 f_2)^*(g) = (f_1 f_2)(g^{-1}) = f_1(g^{-1}) f_2(g^{-1}) = f_1^*(g) f_2^*(g) = (f_1^* f_2^*)(g)$. ..

$\therefore (f_1 f_2)^* = f_1^* f_2^* = f_2^* f_1^*$.

回忆: 双线性型. 给定一个线性空间 V 上的双线性函数 $(-,-): V \times V \to k$

$(\alpha+\beta, -) = (\alpha, -) + (\beta, -)$

$(k\alpha, -) = k(\alpha, -)$, 第二个分量也有同样的等式成立.

$\{V$ 上的双线性函数$\} \xleftrightarrow{1-1} \{V \otimes_k V$ 上的线性函数$\}$

V 上的二次型: $f: V \to k$. $f(v) = (v, v)$ 其中 $(-,-)$ 是 V 上的一个双线性函数.

- 一个双线性函数称为对称的. 若 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.
- 一个双线性函数称为非退化 (nondegenerate) 如果 $(\alpha, V) \equiv 0$. 则 $\alpha = 0$. (另一说法: $(V, \alpha) \equiv 0 \Rightarrow \alpha = 0$.)

$V \to V^*$: $v \mapsto (v, -) \in V^*$ 是单射.

例: 内积是一个非退化的. 对称的双线性函数.

$(-,-): V \times V \to k$. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基.

令 $a_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)$. 则 我们得到 $A = (a_{ij})$

$\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$. $\beta = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$. $(\alpha, \beta) = (k_1 \cdots k_n) A \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

$$(\alpha,\alpha) = (k_1,\dots k_n)\, A \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}k_1^2 + a_{12}k_1k_2 + \dots + a_{1n}k_1k_n + a_{21}k_2k_1 + \cdots + a_{ij}k_ik_j + \dots$$

这个中 i,j 这两个: 二次齐次函数 $f(x_1,\dots x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

得 $x_1,\dots x_n$ 分别取值为 $k_1,\dots k_n$. $f(k_1,\dots k_n) = (\alpha,\alpha)$

说明: 任意双线性函数均如此对称化.

想证明之是: $(CG)^*$ 存在一个典范之非退化之时有之双线性函数!

模论与表示论初步 第七讲

回顾：Maschke定理 $f: V \to V \rightsquigarrow \overline{f} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g f g^{-1}$.)
$\mathbb{C}$. 有限群的表示 → 不可约表示

特征标：(V, ρ). χ_V, χ_ρ
$g \in G$ $\chi_V(g) := tr(\rho(g)) = Tr(\rho(g))$

$\chi_V: G \to \mathbb{C}$ G 上的函数. Class function
$\mathbb{C}^G = (\mathbb{C}G)^*$
$(\mathbb{C}G)^*$ 上的结构：① alg. ② *-alg. ③ 一个双线性函数.

§1

§2. $\mathbb{C}^G$
命题：$(\mathbb{C}G)^*$ 上存在一个非退化双不变双线性函数.

证明 事实上：定义 $(\mathbb{C}G)^* \times (\mathbb{C}G)^* \to \mathbb{C}$
$(-,-)$
$\forall\ f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$
$(f_1, f_2) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g^{-1})$.

不难验证：① 对称性 $(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$
$(f_2, f_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_2(g) f_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} f_2(h^{-1}) f_1(h)$
$= (f_1, f_2)$.)

② $(f_1, -) = 0 \Rightarrow f_1 = 0$
令 $\{\delta_g \mid g\in G\}$ 为 $\mathbb{C}G$ 里面的基 $\{g \in G\}$ 的对偶基.
$\delta_g(h) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1 & g=h \\ 0 & g\neq h \end{cases}$
$0 = (f_1, \delta_{g^{-1}}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} f(h)\,\overline{\delta_{g^{-1}}}(h^{-1}) = f(g)$ $\therefore f(g)=0$
$\therefore f = 0$

Aim：想知道 $(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = ?$

§3. 特征标初探.

引. 常用构造法的特征标

常用构造法：① 直和；② 张量；③ 对偶.
$V_1 \oplus V_2$ $V_1 \otimes V_2$ V^*

命题：① $\chi_{V_1\oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$
② $\chi_{V_1\otimes V_2} = \chi_{V_1}\cdot\chi_{V_2}$
③ $\chi_{V^*} = \overline{(\chi_V)}$ $(\overline{(\chi_V)}(g) = \overline{\chi_V(g)})$

证明 ① $g \curvearrowright V_1\oplus V_2$ $Tr(\rho_{V_1\oplus V_2}(g)) = Tr(\rho_{V_1}(g)) + Tr(\rho_{V_2}(g))$
$= \chi_{V_1}(g) + \chi_{V_2}(g)$
② $g \curvearrowright V_1\otimes V_2$. 假设 $g \curvearrowright V_1 \rightsquigarrow A$
$g \curvearrowright V_2 \rightsquigarrow B$
$g \curvearrowright V_1\otimes V_2 \rightsquigarrow A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$

$Tr(A\otimes B) = Tr(A)\,Tr(B) \Rightarrow \chi_{V_1\otimes V_2}(g) = \chi_{V_1}(g)\,\chi_{V_2}(g)$.
③ $g \curvearrowright V \rightsquigarrow A$
$g \curvearrowright V^* \rightsquigarrow (A^{-1})^t$
$Tr_{V^*}(g) = Tr(A^{-1}) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
$= \chi_V^*(g)$
$\chi_{V^*}(g)$ □

3.2. 本例

例：最小的非交换群是 S_3
- 平凡表示 P_1
- 符号表示 P_2
- 典范表示：$S_3 \curvearrowright \{e_1, e_2, e_3\}$

3.2. 举例

例：最小的非交换群是 S_3

- 平凡表示 ρ_1
- 符号表示 ρ_2
- 典范表示：$S_3 \curvearrowright \{e_1, e_2, e_3\}$

$\sigma \in S_3$. $\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$

令 $V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. $S_3 \curvearrowright V$

令 $V_C := \{ k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 \mid \sum_{i=1}^{3} k_i = 0 \}$

容易说明 $V_C \subset V$ 是一个子表示. $\dim V_C = 2$.

事实上，$\underset{\alpha_1}{e_1 - e_2}$, $\underset{\alpha_2}{e_2 - e_3}$ 为 V_C 的一组基.

S_3:

(1) $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_{V_C}(1) = 2$

(12) $(\alpha_1, \alpha_2) = (e_2 - e_1,\ e_1 - e_3) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi((12)) = 0$

(13) $(\alpha_1, \alpha_2) = (e_3 - e_2,\ e_2 - e_1) = (e_1 - e_2, e_3 - e_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi((13)) = 0$

(23) $(\alpha_1, \alpha_2) = (e_1 - e_3,\ e_3 - e_2) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi((23)) = 0$

(123) $(\alpha_1, \alpha_2) = (e_2 - e_3,\ e_3 - e_1) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi((123)) = -1$

(132) $(\alpha_1, \alpha_2) = (e_3 - e_1,\ e_1 - e_2) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi((132)) = -1$

$$(\chi_{V_C}, \chi_{V_C}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{V_C}(g)\chi_{V_C}(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{6}\{ \underset{(1)}{2\times 2} + \underset{(12)}{0} + \underset{(13)}{0} + \underset{(23)}{0} + \underset{(123)}{-1\times -1} + \underset{(132)}{-1\times -1} \}$$

$$= 1$$

$$(\chi_{V_C}, \chi_{\rho_1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{V_C}(g)\rho_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{V_C}(g)$$

$$= 0$$

$$(\chi_{V_C}, \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{V_C}(g)\rho_2(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{6}(2\times 1 + 0 + 0 + 0 + (-1)\times 1 + (-1)\times 1)$$

$$= 0.$$

$$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_{\rho_2}(g^{-1})$$

$$= 0$$

"距离空间"的说法，上述之事是"标准正交"的.

3.3. 一个性质.

命题：如果存在两个表示是同构的：$(V_1, \rho_1) \cong (V_2, \rho_2)$ 则

$\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

证明：$\because (V_1, \rho_1) \cong (V_2, \rho_2)$

$\therefore \exists\ f: V_1 \xrightarrow{\simeq} V_2$

s.t. $\boxed{f(g \cdot v_1) = g \cdot f(v_1)}$.

$\chi_{V_1}(g)$

$= \mathrm{Tr}(\rho_1(g))$

$= \mathrm{Tr}(f^{-1} \circ \rho_2(g) \circ f)$

$= \mathrm{Tr}(\rho_2(g)) = \chi_{V_2}(g)$.

$\Leftrightarrow g \cdot v_1 = f^{-1}(g \cdot f(v_1))$

$\Leftrightarrow \rho_1(g) = f^{-1} \circ \rho_2(g) \circ f$

□

Question: How about the converse?

Answer: Yes!

Frobenius → Schur → Brauer

§4. 特征标的第一正交关系.

4.1. Schur's Lemma.

假设所考虑的是 $\mathbb{C}$ 上的有限群的有限维表示.

引理：令 V_1, V_2 是群 G 的两个不可约表示.

$f: V_1 \to V_2$ 一个 G-模同态.

则

① 如果 $V_1 \not\cong V_2$，则 $f = 0$

② 如果 $V_1 \cong V_2$（取 ρ 为这个同构），则 $f = c\rho$. $c \in \mathbb{C}$

证明：① $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

- $\mathrm{Im} f \subset V_2$ 是模，但 V_2 是不可约的

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im} f = 0$ ✓ 或 $\mathrm{Im} f = V_2$

$\mathrm{Im} f = V_2$

引. Schur's Lemma.

Schur ↓ Brauer

假定所考虑的是 $\mathbb{C}$ 上的有限群的有限维表示.

引理. 令 V_1, V_2 是群 G 的两个不可约表示.

$f: V_1 \to V_2$ 一个 G-模同态.

则

① 如果 $V_1 \not\cong V_2$, 则 $f=0$

② 如果 $V_1 \cong V_2$ (取 g 为这个同构), 则 $f = c\,g$. $c \in \mathbb{C}$.

证明: ① $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

- $\mathrm{Im} f \subset V_2$ 是模. 但 V_2 是不可约的

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im} f = 0 & \checkmark \\ \mathrm{Im} f = V_2 \end{cases}$$

- $\ker f \subset V_1$. 但 V_1 是不可约的

$$\Rightarrow \ker(f) = \begin{cases} 0 \\ V_1 & \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = V_2$ 且 $\ker f = 0$ 即 f 是同构 ↯

② 由 ① 的证明知道 $f=0$ 或 f 是同构. 如果 $f=0$ 显然成立. (取 $c=0$)

如果 f 是同构. 则 $V_1 \xrightarrow{g} V_2$, $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

$g^{-1}\circ f : V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g^{-1}} V_1$

$\therefore g^{-1}\circ f \in \mathrm{End}_G(V_1)$ 为 $V_1 \to V_1$ 的一个 G-模同态.

同时, $g^{-1}\circ f$ 为 $V_1 \to V_1$ 的一个线性变换.

取 c 为 $g^{-1}\circ f$ 的一个特征值. v_1 对应的一个特征向量.

$\therefore (g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1})(v_1) = g^{-1}\circ f(v_1) - c v_1 = c v_1 - c v_1 = 0$.

$\therefore \ker(g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}) \neq 0$. 同时我们知道 $g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1} \in \mathrm{End}_G(V_1)$.

由 ① 的证明知道 $g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}$ 或者是 0 或者是同构.

$\because \ker(g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}) \neq 0$ $\therefore g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}$ 不是同构

故 $g^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1} = 0 \Rightarrow g^{-1}\circ f = c\,\mathrm{Id}_{V_1} \Leftrightarrow f = c\,g$. □

推论: 设 V_1, V_2 为两个 G 的不可约表示. 则

① $\mathrm{End}_G(V_1) = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_{V_1}$.

② $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ 若 $V_1 \not\cong V_2$.

说明: · ① 这个条件是需要的. $\Rightarrow$ 特征值的存在性.

· 如果扯成一般的域, 引理的 ① 还是成立的.

定义 设 V 是 G 的一个表示. 定义

$$V^G := \{ v \in V \mid g\cdot v = v,\ \forall g \in G \}.$$

这个 V^G 是 V 的一个表示. (为表示的直和).

命题. 令 V_1, V_2 是 G 的两个表示. 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G = \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

证明. 回忆一下, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ 上的 G-模结构

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ $\quad (g\cdot f)(v_1) := g\cdot f(g^{-1}\cdot v_1)$ $\quad g \in G$

如果 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G$, 则 $g\cdot f = f$

$\Leftrightarrow g\cdot f(g^{-1}\cdot v_1) = f(v_1)$ $\forall v_1 \in V_1$

$\Leftrightarrow f(g^{-1}\cdot v_1) = g^{-1}\cdot f(v_1)$ $\forall v_1 \in V_1$.

$\Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. □

q2. 确定 V^G.

取 V 为 G 的表示. $\rho: G \to GL_V$.

构造 $\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$

命题: 令 $z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$. 则

① $z \in \mathrm{End}_G(V)$.

② $z\circ z = z$

③ $V^G = z(V)$.

命题： 令 $z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)$，则

① $z \in \mathrm{End}_G(V)$.

② $z\circ z = z$

③ $V^G = z(V)$.

证明：$\forall h \in G$.

① $z(h\cdot v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\rho(h)(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(gh)(v) = z(v)$

$h\cdot z(v) = h\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)(v)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)(v) = z(v)$

② $\forall h$，都有 $\rho(h)\circ z = z = z\circ\rho(h)$

$\therefore z\circ z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)$

$= \frac{1}{|G|}\,|G|\,z = z$.

③ $z: V\to V$　　目标：$V^G = z(V)$.

$\forall v\in V^G$，有 $z(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v$

即 $z(v) = v$. $\therefore v\in z(V)$　即 $V^G \subseteq z(V)$.

$\forall v\in z(V)$　即 $\exists v'\in V$, s.t. $z(v') = v$

$\forall g\in G$　$g\cdot v = g\cdot z(v') = \rho(g)z(v')$

$= z(v') = v$.

$\therefore v\in V^G$　即 $z(V)\subseteq V^G$.　□

推论： 设 (ρ, V) 是 G 的一个表示，则

$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^G}(g) = \dim V^G$.

证明：

$z: V\to V$　G-module morphism.

由命题 ③ 知道

$z: V\to V^G$　由 $z^2 = z$.

即证明 $z: V\twoheadrightarrow V^G$ and $z|_{V^G} = \mathrm{Id}_{V^G}$.

$\therefore V = \ker(z)\oplus \mathrm{Im}(z)$

$= \ker(z)\oplus V^G$.

$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho(g))$

$= \mathrm{Tr}(z|_{V^G}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^G}(g)$

$= \dim_{\mathbb{C}} V^G$.　□

定理： 设 V_1, V_2 是 G 的两个表示，则

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$$

证明：

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1}(g^{-1})\chi_{V_2}(g^{-1})$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*}(g)\chi_{V_2}(g)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*\otimes V_2}(g)$

$= \dim_{\mathbb{C}}(V_1^*\otimes V_2)^G = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G$

$= \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

回顾：S_3.　ρ_1.　ρ_2　V_C

$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) = 1$

$(\chi_{\rho_1}, \chi_{V_C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_1, V_C) = 0$

定理（第一正交关系）　设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示，则

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \begin{cases} 1 & V_1\cong V_2 \\ 0 & V_1\not\cong V_2 \end{cases}$$

定理（第一正交关系） 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示，则

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \begin{cases} 1 & V_1 \cong V_2 \\ 0 & V_1 \not\cong V_2 \end{cases}$$

证明：$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \xlongequal{\text{Schur's lemma}} \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2 \\ 1 & V_1 \cong V_2 \end{cases}$

推论： 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示，

$V_1 \cong V_2 \iff \chi_{V_1} = \chi_{V_2}$

证明：“$\Rightarrow$” ✓ 已知.

“$\Leftarrow$” 如果 $V_1 \not\cong V_2$，则由上述定理知道

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = 0$.

但是

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_1}(g)\, \chi_{V_1}(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_1}(g)\, \overline{\chi_{V_1}(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_{V_1}(g)|^2 \geq 0$$

当 $g = e$ 时，$\chi_{V_1}(g) = \dim V_1 \quad \therefore |\chi_{V_1}(e)|^2 > 0$

$\therefore (\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) > 0$. ↯ □

模论与表示论初步 第八讲

回忆：特征标 $(\mathbb{C}G)^*$. 具有一个非退化双线性表示 * 代数. 如果 V, W 是两个不可约表示，则

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.

取一个 G-表示 U. $U^G = z \cdot U$. $z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P(g)$.

定理：不可约表示 $V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$.

§5. 相关应用

5.1. 不可约的判定.

命题：设 V 是 G 的一个有限维表示. 则 V 是不可约的 $\Leftrightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

证明：$\Rightarrow$ §4 中主要定理得到.

$\Leftarrow$ 反证. 如果 V 不是不可约的. 则 $V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$. （这里 $V_i \not\cong V_j$ $(i \neq j)$. n_i 称为 V_i 在 V 中的非零重数 multiplicity）

$$(\chi_V, \chi_V) = \left(\sum_{i=1}^{s} n_i \chi_{V_i}, \sum_{j=1}^{s} n_j \chi_{V_j} \right) = \sum_{i,j} n_i n_j (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \sum_{i,j} n_i n_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{s} n_i^2 > 1. \quad \text{矛盾.} \quad \square$$

例. S_3. 平凡表示. 符号表示. 典范表示 (Standar Rep). $V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. $\sigma \cdot e_i := e_{\sigma(i)}$.

$V_1 \subset V$. $V_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \mid \sum_{i=1}^{3} a_i = 0 \right\}$. V_1 就是典范表示. $V_1 = \mathrm{span}\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$.

χ_{V_1}: $1 \mapsto 2$; $(12), (13), (23) \mapsto 0$; $(123), (132) \mapsto -1$.

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_{V_1}(g) \chi_{V_1}(g^{-1}) = \frac{1}{6}(2 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1)) = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

$\therefore V_1$ 是不可约的.

§5.2. 同构的判定.

命题：设 V, W 是 G 的任意两个有限维表示. 则 $V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$.

证明：$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ $V = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$, $W = m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \cdots \oplus m_s V_s$. 只需证 $n_i = m_i$ for $1 \le i \le s$.

claim: $n_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_V \rangle$.

claim 的证明：易见，$\langle \chi_{V_i}, \chi_V \rangle = \langle \chi_{V_i}, \sum_{j=1}^{s} n_j \chi_{V_j} \rangle = \sum_{j=1}^{s} n_j \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_{ij} = n_i$.

类似地，$m_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_W \rangle$. $\therefore n_i = m_i$. $\forall\ 1 \le i \le s$. $\square$

例：（对称表示与交错表示）令 V 是任意一个有限维 G 表示. 考虑张量表示 $V \otimes V$.

定义：$\theta: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$, $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$

显然有：① $\theta^2 = \mathrm{Id}$. ② θ 对角化. 定义 $\mathrm{Sym}^2(V) := \{ \alpha \in V \otimes V \mid \theta(\alpha) = \alpha \}$; $\mathrm{Alt}^2(V) := \{ \beta \in V \otimes V \mid \theta(\beta) = -\beta \}$.

Claim 1: $Sym^2(V)$, $Alt^2(V)$ 都是 $V\otimes V$ 的子表示.

Claim 1 的证明: 显然 $Sym^2(V)$. $Alt^2(V)$ 都是子空间. 特征子空间. 只需证 $Sym^2(V)$ 和 $Alt^2(V)$ 都在 G 作用下稳定.

$\forall \alpha \in Sym^2(V)$. $g\in G$. $\theta(g\cdot\alpha) \overset{?}{=} g\cdot\alpha$

事实上, $\theta: V\otimes V \to V\otimes V$, $v_1\otimes v_2 \mapsto v_2\otimes v_1$ $\quad \theta(g\cdot(v_1\otimes v_2)) = \theta(g\cdot v_1 \otimes g\cdot v_2) = g\cdot v_2\otimes g\cdot v_1 = g\cdot(v_2\otimes v_1) = g\cdot\theta(v_1\otimes v_2)$

即 θ 是一个表示的同态. $\therefore \theta(g\cdot\alpha) = g\cdot\theta(\alpha) = g\cdot\alpha$. 故 $Sym^2(V)$ 是子表示. 类似地, 可证明 $Alt^2(V)$ 也是子表示, □

Claim 2. $V\otimes V \cong Sym^2(V)\oplus Alt^2(V)$. (一般来说, 对任表示的特征表示不再是不可约的).

Claim 2 的证明: 只需证 $\chi_{V\otimes V} = \chi_{Sym^2} + \chi_{Alt^2}$. $\quad \chi_{V\otimes V} = \chi_V^2$

$g\in G$. $g\curvearrowright V$ 是可对角化的. $\therefore$ 令 $e_1,\dots,e_n$ 为 V 的一组基且 $g\cdot e_i = \lambda_i e_i$.

故 $\{e_i\otimes e_j \mid 1\le i,j\le n\}$ 就是 $V\otimes V$ 的一组基. $\quad \chi_{V\otimes V}(g) = \chi_V(g)\chi_V(g) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right) = \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j$.

(待习: $Sym^2(V) = \operatorname{span}\{e_i\otimes e_j + e_j\otimes e_i \mid 1\le i\le j\le n\}$

$Alt^2(V) = \operatorname{span}\{e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i \mid 1\le i<j\le n\}$)

$\therefore \dim Sym^2(V) = \frac{n(n+1)}{2}$. $\dim Alt^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

$\chi_{Sym^2(V)}(g)$ $\qquad g\cdot(e_i\otimes e_j + e_j\otimes e_i) = \lambda_i\lambda_j(e_i\otimes e_j + e_j\otimes e_i)$

$= \sum_{1\le i\le j\le n}\lambda_i\lambda_j$. 同理 $\chi_{Alt^2(V)}(g) = \sum_{1\le i<j\le n}\lambda_j\lambda_i$

由均分的良限, $\chi_V^2(g) = \chi_{Sym^2(V)}(g) + \chi_{Alt^2(V)}(g)$.

我们 $Sym^2(V)$ 为 V 的对称表示. $Alt^2(V)$ 称为 V 的所谓的表示. (2阶)

§5.3. 表示出现的重数.

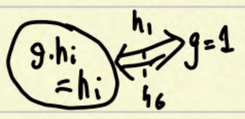
命题: 如果 $V = n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_sV_s$. 为不可约表示的直和. 则 $n_i = \langle\chi_{V_i}, \chi_V\rangle$.

证明: 参见 §5.2 中命题的证明.

例: S_3. 典范表示. V_1. 想计算 V_1 在 S_3 的正则表示里出现的重数.

$\langle\chi_{V_1}, \chi_{Reg}\rangle = \frac{1}{|S_3|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1}(g)\chi_{Reg}(g^{-1}) = \frac{1}{|S_3|}\chi_{V_1}(1)\chi_{Reg}(1)$

$= \frac{1}{6}\cdot 2\times 6 = 2. = \dim V_1$.

$g\cdot\mathbb{C}S_3$ 

§5.4. 张量积分解公式.

设 V_i, V_j 是两个不可约表示. $V_i\otimes V_j = \oplus N_{ij}^k V_k$ ← irreducible. What is N_{ij}^k? ← fusion rule

$N_{ij}^k = \langle\chi_{V_k}, \chi_{V_i}\chi_{V_j}\rangle$.

例: 仍然考虑 S_3 的典范表示 V_1.

$V_1 \otimes V_1 = n_1 V_{trivial} \oplus n_2 V_{sgn} \oplus n_3 V_1$

$n_1 = \langle \chi_{trivial}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_{tri}(g) \chi_{V_1 \otimes V_1}(g^{-1}) = \frac{1}{6}(1\times 4 + 1 + 1) = 1,$

$n_2 = \langle \chi_{sgn}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6}(1\times 4 + 1 + 1) = 1.$

$n_3 = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6}(2\times 4 - 1 - 1) = 1.$

$\therefore V_1 \otimes V_1 = V_{trivial} \oplus V_{sgn} \oplus V_1.$

练习: 在 $V_1 \otimes V_1$ 中找出平凡表示和符号表示.

§6 不可约表示的个数.

§6.1 类函数回顾.

$Cf(G)$: 类函数全体. $f(ghg^{-1}) = f(h)$.

令 $C_1, C_2, \cdots C_t$ 为 G 的所有共轭类. $C_i = \{g_i, gg_ig^{-1} \mid g \in G\}$.

命题: $\dim Cf(G) = t$.

证明: 令 $V = span\{C_1, \cdots C_t\}$. 则 $Cf(G) = V^*$. □

说明: $\because \chi_{V_i} \in Cf(G)$. 且 $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \delta_{ij}$.

$\therefore \{\chi_{V_i}\}$ 是 $Cf(G)$ 是线性无关的.

从而 $\{\chi_{V_i}\}$ 的个数有限. 且 $\leq t$. 故在同构意义下, 不可约表示的个数有限.

§6.2 不可约表示的个数 (在同构的意义下).

令 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 为 G 的所有在不同构的不可约表示.

定理: $s = t$.

为了证明这个定理, 先做一些准备. 关键去证明 $\chi_{V_1}, \cdots \chi_{V_s}$ 是 $Cf(G)$ 的一组基.

构造: 令 (ρ, V) 为 G 的任意一个表示. $f \in Cf(G)$

$$\rho(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) \in End(V)$$

引理1. $\rho(f) \in End_G(V)$.

证明: $\forall h \in G$. $\rho(f)(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) gh \cdot v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) hh^{-1}gh \cdot v$

$= h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) (h^{-1}gh) \cdot v = h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(h^{-1}gh) h^{-1}gh \cdot v = h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) g \cdot v = h \cdot \rho(f)(v).$ □

推论：如果 V 是不可约表示，则 $\rho(f)=\frac{\langle f,\chi_{V^*}\rangle}{\dim V}\mathrm{Id}_V$.

证明：$\rho(f)\in \mathrm{End}_G(V)$. 由 Schur's Lemma, $\rho(f)=\lambda \mathrm{Id}_V$ for some $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\mathrm{Tr}(\rho(f)) = \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{Id}_V) = \lambda \dim V$$

$$\mathrm{Tr}(\rho(f)) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho(g)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\,\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi_V(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi_{V^*}(g^{-1}) = \langle f, \chi_{V^*}\rangle$$

$$\therefore \lambda = \frac{\langle f,\chi_{V^*}\rangle}{\dim V}. \qquad \square$$

引理：$\rho(f)$ 具有以下简单性质：① $\rho(f_1+f_2)=\rho(f_1)+\rho(f_2)$. ② $(\rho_1\oplus\rho_2)(f) = \rho_1(f)\oplus\rho_2(f)$.

证明：由定义直接得到. $\square$

命题：设 $f\in Cf(G)$. 如果 $\langle f,\chi_V\rangle=0$ for all irreducible representations V. 则 $f=0$.

证明：考虑正则表示 ρ_{Reg}. 由 Maschke's 定理. $\rho_{Reg} = n_1\rho_{V_1}\oplus\cdots\oplus n_s\rho_{V_s}$.

$$\rho_{Reg}(f) \underset{\text{引理②}}{=} \bigoplus_{i=1}^{s} n_i\rho_{V_i}(f) \underset{\text{推论}}{=} \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \frac{\langle f,\chi_{V_i^*}\rangle}{\dim V_i} 1_{V_i} = 0$$

$$\rho_{Reg}(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho_{Reg}(g). \quad \because \rho_{Reg}(f)=0 \ \therefore \forall h\in G.$$

$$\rho_{Reg}(f)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho_{Reg}(g)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)gh$$

$$=0 \Rightarrow f(g)=0 \text{ for all } g\in G.$$

$\therefore f=0$. $\square$

定理的证明：如前所述，只需证 $\chi_{V_1},\dots\chi_{V_s}$ 为 $Cf(G)$ 里的一组基. 只需证任意 $f\in Cf(G)$ 均可由 $\chi_{V_1}\cdots\chi_{V_s}$ 表出.

Claim: $f=\sum_{i=1}^{s}\langle f,\chi_{V_i}\rangle\chi_{V_i}$

Claim 的证明：考虑 $f-\sum_{i=1}^{s}\langle f,\chi_{V_i}\rangle\chi_{V_i}$.

则 $\left\langle f-\sum_{i=1}^{s}\langle f,\chi_{V_i}\rangle\chi_{V_i},\chi_{V_j}\right\rangle = \langle f,\chi_{V_j}\rangle - \sum_{i=1}^{s}\langle f,\chi_{V_i}\rangle(\chi_{V_i},\chi_{V_j}) = (f,\chi_{V_j}) - (f,\chi_{V_j}) = 0$.

由前面的命题知道，$f-\sum_{i=1}^{s}(f,\chi_{V_i})\chi_{V_i}=0$ $\square$

§6.3 正则表示回顾.

命题：每个不可约表示 V_i 均为正则表示的子表示，且 V_i 在正则表示中出现了 $\dim V_i$ 次.

证明. $$\langle \chi_{V_i},\chi_{Reg}\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_i}(g)\chi_{Reg}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\chi_{V_i}(1)\chi_{Reg}(1) = \chi_{V_i}(1) = \dim V_i$$ $\square$

说明：$\mathbb{C}G = (\dim V_1)V_1\oplus(\dim V_2)V_2\oplus\cdots\oplus(\dim V_s)V_s$. $\Rightarrow$ $|G| = (\dim V_1)^2+\cdots+(\dim V_s)^2 = \sum_{i=1}^{s}(\dim V_i)^2$.

练习：1) 证明平凡表示在 V 中出现的重数是 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$.

2) 证明：设 V 是 G 的一个表示，如果 $\chi_V(g)=0$ for all $g\neq 1$. 则 $\exists\, a\in\mathbb{N}_{\geq 0}$, s.t. $\chi_V = a\chi_{Reg}$.

3) 求 q 阶群的所有不可约特征标.

模论与表示论初步 第九讲

回顾： 确定了不可约表示的个数 = 共轭类的个数.

§7. 特征标表与第一正交关系（特征标）

设 G 是有限群. 令 $C_1, C_2, \cdots C_s$ 为群 G 的全体共轭类. 令 $g_i \in C_i$, $h_i := |C_i|$ (共轭类所含元素个数)

这个群一定也有 s 个不可约表示，对应的特征标记为 χ_1（平凡表示）、$\chi_2, \cdots, \chi_s$.

来构造下面的表

	1 (1) C_1	h_2 (g_2) C_2	$\cdots$	h_s (g_s) C_s
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	$\cdots$	$\chi_1(g_s)$
χ_2	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	$\cdots$	$\chi_2(g_s)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_s	$\chi_s(g_1)$	$\chi_s(g_2)$	$\cdots$	$\chi_s(g_s)$

← 特征标表 Character Table

中心任务：确定特征标.

第一正交关系： $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)} = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}$

$= \delta_{ij}$. (行正交关系)

令 $X = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \cdots & & \cdots \\ \chi_s(g_1) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{pmatrix}$. 则刚才的第一正交关系可表达为

$$X \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_s \end{pmatrix} \overline{X}^T = |G| I_s.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{X}^T X \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s \end{pmatrix} = |G| I_s}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_1(g_1)} & \overline{\chi_2(g_1)} & \cdots & \overline{\chi_s(g_1)} \\ \overline{\chi_1(g_2)} & \overline{\chi_2(g_2)} & \cdots & \overline{\chi_s(g_2)} \\ \overline{\chi_1(g_s)} & \cdots & & \overline{\chi_s(g_s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_s) \\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \sum_{k=1}^{s} \overline{\chi_k(g_i)}\chi_k(g_j) h_j & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |G| & & & \\ & |G| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |G| \end{pmatrix}$$

推论： $\sum_{k=1}^{s} \overline{\chi_k(g_i)}\chi_k(g_j) = \frac{|G|}{h_j}\delta_{ij}$

说明： 我们证明正交关系为第一正交关系. ← 列正交关系.

§8. 例子.

- 常用方法： ① 共轭类的个数

② 合理利用这两个正交关系.

③ $|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2$

• S_3.　　S_3 有3个共轭类 C_1, C_2, C_3.

$C_1=\{(1)\}$.　$C_2=\{(12),(13),(23)\}$.　$C_3=\{(123),(132)\}$

$h_1=1$,　$h_2=3$.　$h_3=2$.

平方 →

	1 (1) C_1	3 (12) C_2	2 (123) C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
χ_3	2	0	−1

等=项关系

$1\times1+1\times(-1)+2\times x=0$

$6=|G|=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1+1+n_3^2=1+1+2^2$.

分别用到 $|G|=n_1^2+n_2^2+n_3^2$ 与 等=项

由前面小例3. 我们知道 S_3 还有一个典范表示. 这个典范表示就是 S_3 唯二的二维不可约表示.

说明: (对称群的共轭类). S_n.　$\tau=(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)$

$\sigma\in S_n$.　　$\sigma\tau\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\cdots\sigma(i_n))$.

• $\tau=(i_1\cdots i_{s_1}^1)(i_1^2\cdots i_{s_2}^2)\cdots(i_1^t\cdots i_{s_t}^t)$　(12)(34)

循环轮换小乘积、 $\tau=\prod_{j=1}^{t}(i_1^j\cdots i_{s_j}^j)$

$\tau\rightsquigarrow(s_1,s_2,\cdots,s_t)$　$(\sum s_i=n)$

$\therefore\forall\tau\in S_n$, 存在唯一的 n 的 partition $n_\tau:=(s_1,s_2,\cdots,s_t)$

Conclusion:　τ 与 τ' 互同一共轭类 $\Leftrightarrow$ $n_\tau=n_{\tau'}$.

• S_4.　4.　(1,1,1,1)　(2,1,1,0).　(2,2,0,0)　(3,1,0,0)　(4,0,0,0)

(1)　奇置换. (12), (13)…　(12)(34), …　(123), (124)…　(1234) (1324)….

命题: 设 $G\xrightarrow{\pi}G'$ 是群的满同态. V 为 G' 的一个不可约表示. 则 $\rho':G\xrightarrow[\rho'=\rho\circ\pi]{}GL_V$ 也是一个不可约表示.

$\rho:\ G'\to GL_V$.

$G\xrightarrow{\pi}G'\xrightarrow{\rho}GL_V$ is irreducible.

证明: 设 $V_1\subset V$ 是 V 的一个真子表示.

$\therefore\ G\curvearrowright V_1\subseteq V_1$.　$\forall g\in G$. $v\in V$. $g\cdot v=\pi(g)\cdot v$. 但是 π 是满射. $\therefore\pi(G)=G'$. 因而 $G'\cdot V_1\subseteq V_1$.

$\therefore\ V_1\subset V$ 也是作为 G'-表示的子表示.

但是 V 作为 G'-模是不可约的. $\therefore V_1=V$ or $V_1=0$. ↯.　　□.

还未代表: $K_4\lhd S_4$.　$K_4=\{(1),(12)(34),(14)(23),(13)(24)\}$.

? $\dfrac{S_4}{K_4}\cong$?　Conclusion: $\dfrac{S_4}{K_4}\cong S_3$.

$\pi: S_4 \twoheadrightarrow S_3$

$(1)\mapsto(1)$, $(12)\mapsto(12)$, $(12)(34)\mapsto(1)$

$(123)\mapsto(123)$, $(1234)\mapsto(13)$.

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
χ_3	2	⊖	−1

	1	6	8	3	6
	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	−1	1	1	−1
χ_3	2	0	−1	2	0
χ_4	3	1 a	0	−1 c	−1 d
χ_5	3	−1	0	−1	1

$24 = n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2 = 1+1+4+n_4^2+n_5^2 \Rightarrow n_4 = n_5 = 3$.

行正交关系:

$$\begin{cases} 3+6a+8b+3c+6d=0 \\ 3-6a+8b+3c-6d=0 \\ 6+0-8b+6c+0=0 \\ 9+6|a|^2+8|b|^2+3|c|^2+6|d|^2=24 \end{cases}$$

$\Rightarrow b=0,\ c=-1,\quad \begin{cases} a=1 \\ d=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ d=1 \end{cases}$.

待补: 写出 χ_3, χ_4, χ_5 对应的表示.

· 计算 $\chi_2\cdot\chi_3 \rightsquigarrow V_2\otimes V_3$. $\chi_2\cdot\chi_4 = ?$

$\chi_4\cdot\chi_4 = ? \rightsquigarrow V_4\otimes V_4$

· $D_8 = \langle x, y \mid x^4=y^2=1,\ yxy=x^{-1}\rangle$

$x^2 \in C(D_8)$ = Center of D_8.

$D_8/\langle x^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 = \langle\bar{x}\rangle\times\langle\bar{y}\rangle$ $\quad \overline{yxy^{-1}} = \overline{x^{-1}} \Rightarrow \bar{y}\bar{x} = \bar{x}\bar{y}$

$\rho_1: \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$, $x\mapsto 1,\ y\mapsto 1$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x\mapsto 1,\ y\mapsto -1$.

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x\mapsto -1,\ y\mapsto 1$.

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x\mapsto -1,\ y\mapsto -1$.

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \longrightarrow$

	(1) C_1	(x) C_2	(y) C_3	(xy) C_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	−1	−1
χ_3	1	−1	1	−1
χ_4	1	−1	−1	1

D_8.

↓

$Z_2 \times Z_2$

	1 (1) C_1	1 (x^2) C_2	2 (x) C_3	2 (y) C_4	2 (xy) C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	−1	−1
χ_3	1	1	−1	1	−1
χ_4	1	1	−1	−1	1
χ_5	2	−2	0	0	0

$yxy^{-1} = x^3$

$xyx^{-1} = x^2y$

$8 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$

得: 给出 V_5. (回顾=面体群表示).

- 计算一下 $V_5 \otimes V_5$ 这张量积分解公式.

(当然: Fusion Category 范畴一般都)

- $Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ xy = y^3x \rangle$.

$$Q_8 / \langle x^2 \rangle \cong Z_2 \times Z_2$$

	1 (1) C_1	1 (x^2) C_2	2 (x) C_3	2 (y) C_4	2 (xy) C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	−1	−1
χ_3	1	1	−1	1	−1
χ_4	1	1	−1	−1	−1
χ_5	2	−2	0	0	0

Q_8 与 D_8 具有相同的特征标表.

但 $Q_8 \not\cong D_8$ 作为群. (考察阶元的个数)

得: ①确定 Q_8 的一维表示是如何的:

② 确定 Q_8 的张量积分解公式.

③ 计算下面这个量: $\nu_2(V) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2)$. (2阶 Frobenius-Schur's Indicator).

④ 尝试推广一所 Frobenius-Schur indicator.

- 交换群的情况.

命题 群G(有限)是交换的$\Leftrightarrow$ G的所有的表示都是一维的.

证明: "$\Rightarrow$" $\because G$是交换的. $\therefore$ 所有共轭类里都只含一个元素. $\therefore$ $|G| = n_1^2 + n_2^2 \cdots + n_{|G|}^2$ $\therefore$ $n_1 = n_2 = \cdots = n_{|G|} = 1$.

故所有不可约的表示都是一维的.

"$\Leftarrow$" $\because$ 所有不可约的表示都是一维的. $\therefore$ 由

$|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{s}$ $\therefore$ $s = |G|$. 即 G 有 $|G|$ 个共轭类. 故每个共轭类里只有一个元素. $\therefore$ G是交换的.

例(扩展): Pontryagin (庞特里亚金) 对偶.

首先一个特殊情形: $\mathbb{Z}_n$.

令 $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

$\rho_j : \mathbb{Z}_n \xrightarrow[\cong \langle g \rangle]{} \mathbb{C}^*$. $g \mapsto \xi_n^j$, $g^k \mapsto (\xi_n^j)^k$.

ρ_j 显然是 $\mathbb{Z}_n$ 的一个不可约的表示 $\forall\ 0 \le j \le n-1$

例: 证明 $\rho_j \not\cong \rho_{j'}$ 若 $j \neq j'$. $(0 \le j, j' \le n-1)$.

$\therefore$ 找到了 $\mathbb{Z}_n$ 的 n 个不可约的表示.

观察: $\rho_j \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} = (\mathbb{C}\mathbb{Z}_n)^*$.

$\rho_j \rho_{j'}(g) = \rho_j(g)\rho_{j'}(g) = \xi_n^{j+j'} = \rho_{j+j'}(g)$.

$\therefore$ $\{\rho_0, \rho_1 \cdots \rho_{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n$. We denote this group by $\widehat{\mathbb{Z}_n}$: 特征标群. (庞特里亚金对偶)

$\widehat{(\mathbb{Z}_n)} \cong \mathbb{Z}_n$.

模论与表示论初步 第十讲

回顾：如何求特征标表

交换群的情形：有限群 G 是交换的 $\Leftrightarrow$ 不可约表示都是一维的。构造了 $\mathbb{Z}_n$ 的所有不可约表示的形式。

$\mathbb{Z}_n$. $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. $\rho_j: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto \zeta_n^j$. $\{\rho_j \mid 0 \le j \le n-1\}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的所有不可约表示.

目标：给出所有有限 Abel 群的不可约表示.

构造：令 G_1, G_2 是两个群. V_1, V_2 分别是 G_1, G_2 的表示.

定义：$\rho_1: G_1 \to GL_{V_1}$, $\rho_2: G_2 \to GL_{V_2}$. $\rho_1 \# \rho_2: G_1 \times G_2 \to GL_{V_1 \otimes V_2}$

$(g_1, g_2) \cdot v_1 \otimes v_2 := g_1 \cdot v_1 \otimes g_2 \cdot v_2$.

和特征表示的关系：特征表示 $G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{\rho_1 \# \rho_2} GL_{V_1 \otimes V_2}$, $g \mapsto (g, g)$.

引理：如果 V_1, V_2 分别为 G_1, G_2 的不可约表示，则 $\rho_1 \# \rho_2$ 也是不可约的.

证明：只需证 $\langle \chi_{\rho_1 \# \rho_2}, \chi_{\rho_1 \# \rho_2} \rangle = 1$. 事实上，

$$\langle \chi_{\rho_1 \# \rho_2}, \chi_{\rho_1 \# \rho_2} \rangle = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \chi_{\rho_1 \# \rho_2}(g_1, g_2)\, \chi_{\rho_1 \# \rho_2}(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \chi_{\rho_1}(g_1) \chi_{\rho_2}(g_2)\, \chi_{\rho_1}(g_1^{-1}) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G_1|} \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} \chi_{\rho_1}(g_1)\, \chi_{\rho_1}(g_1^{-1})\, \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1}) = 1. \quad \square$$

引理：(Abel 群结构定理). 令 G 为一个 Abel 群. 则

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \text{ for some } m_i.$$

综合上述两个引理，$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$. 则

$\{ \rho_{\zeta_{m_1}^{j_1}} \# \rho_{\zeta_{m_2}^{j_2}} \# \cdots \# \rho_{\zeta_{m_n}^{j_n}} \mid 0 \le j_1 \le m_1 - 1, \cdots, 0 \le j_n \le m_n - 1 \}$ 形成了 G 的所有不可约表示.

§9. 应用

- 由特征表读出 G 的所有正规子群.

定义：令 $\rho: G \to GL_V$ 为一个表示. $\ker \chi_\rho := \{g \in G \mid \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)\}$. 称之为特征标的核.

说明：$\ker \chi_\rho = \ker \rho$. $\rho: G \to GL_V$ 群同态

($\chi_\rho(g)$ ⇝ 单位根之和. $\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 且 λ_i 是单位根 $\forall g \in \ker \chi_\rho$. $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) = n$.

n 个单位根之和等于 n $\Leftrightarrow \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)$.



$\rightsquigarrow \lambda_i = 1$ for all $1 \le i \le n$.

即 $g \in \ker \rho$. ($\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$.)

引理: 如果 $\rho = n_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus n_s\rho_s$ (即将 ρ 分解成不可约表示之和). 则

$$\ker \chi_\rho = \bigcap_{n_i>0} \ker \chi_{\rho_i}.$$

证明: $g \in \ker\rho$. pp $\rho(g)$ 是恒等. $\begin{pmatrix} \ddots & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \ddots \square \end{pmatrix}$ (ρ_i) $\Rightarrow$ $\rho_i(g)$ = 恒等. 即 $g \in \bigcap \ker\rho_i$

反之. 如果 $g \in \ker\rho_i$ 对 i 恒成立 ($n_i>0$). $\Rightarrow g \in \ker\rho$. □

命题: 设 $N \triangleleft G$ 为 G 的任意一个正规子群.

则 $N = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr},\ N \le \ker\chi} \ker\chi$. → 不可约特征标.

证明: 记 $G \xrightarrow{\pi} G/N$ 为 π. $\therefore N = \ker\pi$. 考虑 G/N 的正则表示 $\rho^{G/N}_{reg}$. 请注意正规表示都是忠实的 ($\rho: G \hookrightarrow GL_V$).

从而 $N = \ker\pi = \ker(\rho^{G/N}_{reg} \circ \pi)$. $G \xrightarrow{\pi} G/N \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}G/N}$.

$\therefore N = \ker(\rho^{G/N}_{reg} \circ \pi) = \ker \chi_{\rho^{G/N}_{reg}\circ\pi}$. → 群 G/N 一个表示. 由引理知道, $\ker\chi_{\rho^{G/N}_{reg}\circ\pi}$ 一定等于某些不可约特征标核的交. 即 $N = \bigcap_{\chi\in\mathrm{Irr},\ N\le\ker\chi} \ker\chi$. □

推论: G 是单群 $\Leftrightarrow \ker\chi = 1$ 对所有非平凡的特征标.

- 整除定理.

例: ① $G = S_3$. $|G| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

$1 \mid 6$. $2 \mid 6$. $\rightsquigarrow V_i$ 不可约表示. 则 $\dim V_i \mid |G|$.

② S_4. $24 = |G| = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$

∴ 拥有同样的现象. $1, 2, 3 \mid 24$. $\Rightarrow \dim V_i \mid |G|$.

定理: (整除定理). 设 G 是一个有限群. V 是 G 的一个不可约表示. 则 $\dim V \mid |G|$.

为证明该结论, 需要一些准备.

定义: ① 一个复数 a 称为一个代数数如果 a 是一个有理系数多项式的根.

② 进一步的, a 称为一个代数整数如果 a 是首一的整系数多项式的根.

引理: 1) a 是代数数 $\Leftrightarrow$ a 是某个有理矩阵的特征值.

2) a 是代数整数 $\Leftrightarrow$ a 是某个整系矩阵的根

说明：1) 代数整数全体构成一个环。(练习).

2) 一个有理数同时是一个代数整数，则它就是一个整数。(练习).

例. 设G是一个有限群. $\rho: G \to GL_V$是G的一个表示. 则 $\forall g \in G$. $\rho(g)$的特征值都是代数整数.

$\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\lambda_i^{n_i} = 1$. 考虑 $x^{n_i} - 1 = 0$

进一步的，就知道 $\chi_\rho(g)$ 也是代数整数.

定义：设 $g \in G$. 令 g 所在的共轭类为 C_g. 再记 $Z_g := \{ h \in G \mid hg = gh \}$. 称之为 g 在 G 中的中心化子.

$$[G : Z_g] = |C_g|.$$

引理：设G为一个有限群. $\rho: G \to GL_V$为G的一个表示. 则 $\frac{[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$ 是一个代数整数.

证明：构造 $f := \sum_{h \in C_g} \rho(h) \in \mathrm{End}(V)$

claim: $f \in \mathrm{End}_G(V)$. 即 f 是一个表示的同态.

Claim 的证明：$\forall h' \in G$. $f(h' \cdot v) \overset{?}{=} h' \cdot f(v)$. 事实上：

$$f(h' \cdot v) = \sum_{h \in C_g} \rho(h)(h' \cdot v) = \sum_{h \in C_g} hh' \cdot v = \sum_{h \in C_g} h'h'^{-1}hh' \cdot v = h' \sum_{h \in C_g} h'^{-1}hh' \cdot v$$

$$= h' \sum_{h \in C_g} h \cdot v = h' \cdot f(v). \quad v \in V. \quad \square$$

由 Schur's Lemma, $f = \lambda \mathrm{Id}_V$. for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

则 $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{Id}_V) = \lambda \dim V$

同时, $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{h \in C_g} \mathrm{Tr}(\rho(h)) = \sum_{h \in C_g} \chi(h) = |C_g| \chi_\rho(g) = [G : Z_g] \chi_\rho(g)$

综合起来 $[G : Z_g] \chi_\rho(g) = \lambda \dim V = \lambda \chi_\rho(1)$.

即 $\lambda = \frac{[G:Z_g]\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$. 即实证 λ 是一个代数整数.

由前面的结论知道，$\mathbb{C}G \overset{\text{regular}}{\curvearrowright} \mathbb{C}G = V \oplus$ 某它项.

$\forall h \in C_g$. $h \curvearrowright \mathbb{C}G$ 对应的矩阵是一个整数矩阵. $\therefore \sum_{h \in C_g} h \curvearrowright \mathbb{C}G$ 还是一个整数矩阵.

故(在相应一个相似变换下). $\sum_{h \in C_g} \rho(h)$ 也是一个整数矩阵. 即 f 的特征值一定是一个代数整数. $\square$

整除定理证明: $1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{C_g} [G:Z_g]\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})$

$\therefore |G| = \sum_{C_g} [G:Z_g]\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})$

$\therefore \frac{|G|}{\chi_\rho(1)} = \sum_{C_g} \frac{[G:Z_g]\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}\chi_\rho(g^{-1})$ ← algebraic integer ← algebraic integer.

$\therefore$ $\frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 是一个代数整数.

但 $\frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 还是一个有理数. $\therefore \frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 是整数.

$\therefore \chi_\rho(1) = \dim V \mid |G|$. □

$|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2$. $n_i \mid |G|$.

·延伸阅读. 1) 寻找特征标证进一步应用 (Burnside problem). $p^a q^b$ ---> 可解群.

2) I. Kaplansky. 同时了解一下什么是 Kaplansky 猜测 (关于整环定理).

第四章. 诱导表示. (Induced Representation).

§1. Hom 和 张量. (伴随观点).

回顾: ${}_RM$ 左 R 模. 则

$R \otimes_R M \cong M$.

令 ${}_RM_S$. ${}_RN$

Conclusion: $\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)$ 是一个左 S-模.

定义: $\forall s\in S$. $f \in \mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)$. $(s\cdot f)(m) := f(m\cdot s)$.

$\forall s_1, s_2 \in S$. $(s_1 s_2)\cdot f \overset{?}{=} s_1\cdot(s_2\cdot f)$.

$(s_1\cdot(s_2\cdot f))(m) = (s_2\cdot f)(m\cdot s_1) = f((m\cdot s_1)s_2) = f(m\cdot(s_1 s_2))$. $\underline{(s_1 s_2)\cdot f(m)} = f(m\cdot(s_1 s_2))$.

还需验证 $s\cdot f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. $(s\cdot f)(r\cdot m) = f(\underline{(r\cdot m)\cdot s}) = f(r\cdot(m\cdot s)) = r\cdot f(m\cdot s) = r\cdot \underline{(s\cdot f)(m)}$.

得到: $\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN_S)$ 是一个右 S-模.

$s\in S$. $f\in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. $(f\cdot s)(m) := f(m)\cdot s$

引理: $\mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM) \cong M$ 作为左 R-模.

证明: 证: $\mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM) \longrightarrow M$, $f \longmapsto f(1_R)$

① 证是一个加群同态. ② 证是 R-模同态. $\forall r'\in R$ 证$(r'\cdot f) = r'\cdot$ 证(f). 证$(r'\cdot f) = (r'\cdot f)(1_R) = f(1_R\cdot r')$

$= f(r') = r'\cdot f(1_R) = r'\cdot$ 证(f).

构造 证: $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M)$. $m \longmapsto f_m : r \mapsto r\cdot m$

f_m: $r \longmapsto r\cdot m$. 首先需证 $f_m \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$.

$f(r') = f(r'\cdot 1_R) = r\cdot m$. $r'\cdot f(1_R) = r'\cdot 1_R\cdot m = r'\cdot m$

往证 $\bar{\Psi}\circ\bar{\Phi} = \mathrm{Id}$. $\bar{\Phi}\circ\bar{\Psi} = \mathrm{Id}$.

事实上, $\bar{\Psi}\circ\bar{\Phi}$: $\mathrm{Hom}(R,M) \to M \to \mathrm{Hom}(R,M)$.

$(\bar{\Psi}\circ\bar{\Phi})(f)(r) = \bar{\Psi}(f(1_R))(r) = r\cdot f(1_R) = f(r\cdot 1_R) = f(r)$. $\therefore (\bar{\Psi}\circ\bar{\Phi})(f) = f$. $\therefore \bar{\Psi}\circ\bar{\Phi} = \mathrm{Id}$.

$(\bar{\Phi}\circ\bar{\Psi})(m) = \bar{\Phi}(\bar{\Psi}(m)) = \bar{\Phi}(f_m) = f_m(1_R) = 1_R\cdot m = m$. pp $\bar{\Phi}\circ\bar{\Psi} = \mathrm{Id}$. □

模论与表示论初步 第十一讲

回顾：
- 特征标表示应用 → 正规子群.
- 整除定理 $|G| = n_1^2 + \cdots + n_s^2$. $n_i \mid |G|$.

诱导表示 (Induced Representation).

§1. 张量积. 和 Hom.

$R \otimes_R M \cong M$. $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

伴随性 (Adjoint).

定理：设 R, S 是两个环. ${}_RM_S$ 是一个 R-S-双模 ${}_SN$：左 S 模. ${}_RL$ 右 R-模. 则我们有 Abel 群的同构：

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L) \cong \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)).$$ [Hom 与 $\otimes$ 是相互伴随的]

证明：1) 证：$\Phi: \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L))$; $f \longmapsto (n \longmapsto m \longmapsto f(m \otimes n))$. $\Phi(f)(n)(m) := f(m \otimes n)$.

- $\Phi(f)(n) \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$
- $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_S(-, -)$

① 首先证 $\Phi(f)(n) \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$.

事实上，$(\Phi(f)(n))(r \cdot m) \overset{?}{=} r \cdot (\Phi(f)(n)(m))$

$(\Phi(f)(n))(r \cdot m) = f(r \cdot m \otimes n)$. ; $r \cdot (\Phi(f)(n)(m)) = r \cdot f(m \otimes n) = f(r \cdot (m \otimes n)) = f(r \cdot m \otimes n)$.

② 再证 $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_S(-, -)$

即需证 $\Phi(f)(s \cdot n) \overset{?}{=} s \cdot (\Phi(f)(n))$

事实上，$\Phi(f)(s \cdot n)(m) = f(m \otimes s \cdot n)$.

$(s \cdot \Phi(f)(n))(m) = \Phi(f)(n)(m \cdot s) = f(m \cdot s \otimes n)$.

$\because m \otimes s \cdot n = m \cdot s \otimes n$. $\therefore \Phi(f)(s \cdot n) = s \cdot (\Phi(f)(n))$.

2) 证 $\Psi: \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L)$ $f \longmapsto (m \otimes n \mapsto f(n)(m) \in L)$. $\Psi(f)(m \otimes n) = f(n)(m)$.

需要证 Ψ 是合映.

- $\Psi(f)$ 不依赖 $\otimes$ 之代表元的选取.
- $\Psi(f) \in \mathrm{Hom}_R(-, -)$.

① 首先要证 $\Psi(f)$ 是一个良定义的映射. 需证 a) $\Psi(f)((m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n) = 0$

b) $\Psi(f)(m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2) = 0$

c) $\Psi(f)(m \cdot s \otimes n - m \otimes s \cdot n) = 0$.

取第一类元素 a) 以作说明. $\Psi(f)((m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n) = \Psi(f)((m_1 + m_2) \otimes n) - \Psi(f)(m_1 \otimes n) - \Psi(f)(m_2 \otimes n)$

$$= \underbrace{f(n)(m_1 + m_2) - f(n)(m_1) - f(n)(m_2)}_{\in \mathrm{Hom}(-,-)} = 0.$$

第二类表示跟张量类似 √.

跟自身张第二类表示. $\Phi(f)(m\cdot s\otimes n - m\otimes s\cdot n) = \Phi(f)(m\cdot s\otimes n) - \Phi(f)(m\otimes s\cdot n) = f(n)(m\cdot s) - f(s\cdot n)(m)$

$= (s\cdot f(n))(m) - (s\cdot f(n))(m) = 0.$

② 下证 $\Phi(f)\in \mathrm{Hom}_R(-,-)$. 即需证 $\Phi(f)(r(m\otimes n)) = r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n))$

又言之, $\Phi(f)(r\cdot(m\otimes n)) = \Phi(f)(rm\otimes n) = f(n)(rm) = r\cdot f(n)(m)$

$r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n)) = r\cdot f(n)(m)$

3) $\Phi\circ\Phi = \mathrm{Id}$, $\Phi\circ\Phi = \mathrm{Id}$.

又言之, $\Phi\circ\Phi(f)(m\otimes n)$ $\quad f\in\mathrm{Hom}_R(M\otimes N, L) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M,L)) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_R(M\otimes N, L).$

$= \Phi(\Phi(f))(m\otimes n) = (\Phi(f)(n))(m) = f(m\otimes n).$

$(\Phi\circ\Phi)(f)(n)(m) = \Phi(\Phi(f))(n)(m) = \Phi(f)(m\otimes n) = f(n)(m).$ □

§2. 诱导表示 (Induced Representation).

思想: 通过子群的表示得到大群的表示.

已知如何从商群的表示来得到大群的表示.

定义: 设 $H<G$ 是 G 的一个子群. $\rho: H\to GL_V$ 为 H 的一个表示. 称 $\boxed{\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V}$ 为从 H 到 G 的一个诱导表示. ($_RM_S\otimes_S N$ is a left R-module) 记为 ρ_H^G. 简记为 ρ^G. V_H^G.

is a left $\mathbb{C}G$-module.

下面来分析诱导表示的结构.

维数 ⟶ 基 ⟶ 每个 $g\in G$ 在这组基下的矩阵.

2.1. 维数.

设 $[G:H]=l$, $\dim V = n$.

引理: $\dim V_H^G = l\cdot n$.

证明: 取 G/H 的一组代表元, 即, 一组左陪集代表元为 $\{g_1, g_2, \cdots g_l\}$. 则 $G = g_1H\cup g_2H\cup\cdots\cup g_lH$.

$\Rightarrow \mathbb{C}G = \mathbb{C}g_1H\oplus\mathbb{C}g_2H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}g_lH$. (作为线性空间)

对一个 g, 作为右 $\mathbb{C}H$-module, 也有上述的分解.

显然 $\mathbb{C}g_iH\cong\mathbb{C}H$ 作为右 H-模. 则

$V_H^G = \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V = (\mathbb{C}g_1H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}g_lH)\otimes_{\mathbb{C}H} V$

$\cong (\underbrace{\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}H}_{l})\otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \bigoplus_{l\text{个}}\mathbb{C}H\otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \bigoplus_{l\text{个}} V$. $\quad\therefore \dim V_H^G = l\cdot\dim V.$ □

2.2. 基.

引理: 令 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 V 的一组基. $g_1, g_2 \cdots g_l$ 为一组左陪集代表. 则 $\{g_i \otimes v_j \mid 1 \le i \le l, 1 \le j \le n\}$ 为 V_H^G 的一组基.

证明. 只需证 V_H^G 中的每一个元素均可由 $\{g_i \otimes v_j \mid 1 \le i \le l, 1 \le j \le n\}$ 线性表出.

取 V_H^G 的一个元素 $g \otimes v$ $\therefore \exists!\ 1 \le s \le l$, s.t. $g \in g_s H$.

$\therefore g = g_s h$ for some $h \in H$. $g \otimes v = g_s h \otimes v = g_s \otimes h \cdot v$ $\quad h \cdot v \in V$. $\exists\ k_1 \cdots k_n$. s.t. $h \cdot v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$.

$= g_s \otimes \sum_{j=1}^{n} k_j v_j = \sum_{j=1}^{n} k_j g_s \otimes v_j$. 于是由 $\{g_i \otimes v_j\}$ 线性表出. □

2.3. 作用的形式.

例2. ① 取 H 的正则表示. $\mathbb{C}H$ 的诱导表示. $\mathbb{C}G \underset{\mathbb{C}H}{\otimes} \mathbb{C}H \cong \mathbb{C}G$ $\therefore$ 诱导表示就是 $\mathbb{C}G$ 的正则表示.

② $S_3 < S_4$ 选择 S_3 的非平凡的表示 V. 则 $\dim V_{S_3}^{S_4} = 8$. 一定是平凡的 $\oplus$ $V_{S_3}^{S_4}$ 一定能写成不可约表示的直和. Q: $V_{S_3}^{S_4}$ 是哪些不可约表示的直和?

命题 2.2. $\cong \{g_i \otimes v_j \mid 1 \le i \le l, 1 \le j \le n\}$ 为 V_H^G 的一组基. $\rho: H \to GL_n V$ $(v_1 \cdots v_n) \mapsto$ 记 $h \xrightarrow{\rho} (\cdots) \mapsto (a_{ij}(h))_{n \times n}$

定义 $\dot{a}_{ij}(g) = \begin{cases} 0 & g \notin H \\ a_{ij}(g) & g \in H. \end{cases}$

分析: $g \cdot (g_i \otimes v_j) = g g_i \otimes v_j \overset{\exists!\ s.\ h \in H}{=\!=\!=} g_s h \otimes v_j = g_s \otimes h \cdot v_j = g_s \otimes (a_{1j}(h) v_1 + a_{2j}(h) v_2 + \cdots + a_{nj}(h) v_n)$

$= g_s \otimes \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(h) v_k$.

s 的条件: $g g_i = g_s h \Leftrightarrow g_s^{-1} g g_i = h$. s 满足 $\boxed{g_s^{-1} g g_i \in H}$

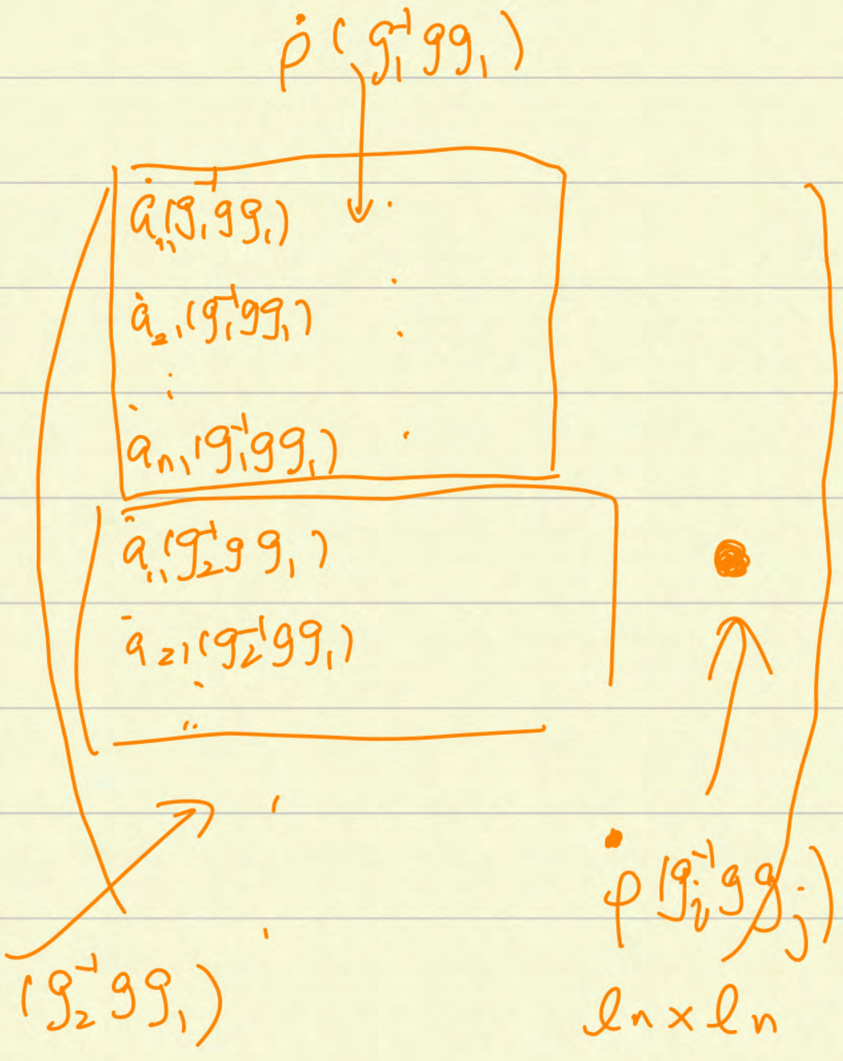
记 $\dot{\rho}(g) = (\dot{a}_{ij}(g))$

则 $g \cdot (g_i \otimes v_j)$ 的结果 $= \sum_{s=1}^{l} g_s \otimes \sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{kj}(g_s^{-1} g g_i) v_k$

取 V_H^G 的一组基

$g \cdot (g_1 \otimes v_1, g_1 \otimes v_2, \cdots g_1 \otimes v_n, g_2 \otimes v_1, g_2 \otimes v_2 \cdots g_2 \otimes v_n, \cdots g_l \otimes v_n) = (\cdots\cdots)$

$g \cdot g_1 \otimes v_1 = \sum_{s=1}^{l} g_s \otimes \sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{k1}(g_s^{-1} g g_1) v_k$



$$\begin{pmatrix} \dot\rho(g_1^{-1}gg_1) & \dot\rho(g_1^{-1}gg_2) & \cdots & \dot\rho(g_1^{-1}gg_\ell) \\ \dot\rho(g_2^{-1}gg_1) & \dot\rho(g_2^{-1}gg_2) & \cdots & \dot\rho(g_2^{-1}gg_\ell) \\ \vdots & \vdots & & \\ \dot\rho(g_\ell^{-1}gg_1) & \dot\rho(g_\ell^{-1}gg_2) & \cdots & \dot\rho(g_\ell^{-1}gg_\ell) \end{pmatrix}$$

2.4. 特征标.

令 χ_V 为原来 H-表示 V 的特征标. 记:

$$\dot\chi_V(g) = \begin{cases} 0 & g\notin H \\ \chi_V(g) & g\in H. \end{cases}$$

则诱导表示的特征标为 $\chi_{\rho^G}(g) = \sum_{s=1}^{\ell} \dot\chi(g_s^{-1}gg_s)$

引理: 1) $g\notin Ug_sHg_s^{-1}$, 则 $\chi_{\rho^G}(g)=0$

2) 如果 $H\lhd G$, 则 $g\notin H \Rightarrow \chi_{\rho^G}(g)=0$.

3) 如果 $H\subseteq Z(G)$ (G 的中心), 则 $\chi_{\rho^G}(g)=[G:H]\dot\chi(g)$.

证明: 1) $g\notin Ug_sHg_s^{-1} \Rightarrow g_s^{-1}gg_s\notin H. \Rightarrow \chi_{\rho^G}(g)=0.$

2) $U g_sHg_s^{-1}=H$. 由1)得.

3) H 满足1)的条件. $\therefore g\notin H$. $\chi_{\rho^G}(g)=0$.

$\forall\ g\in H.\quad \chi_{\rho^G}(g)=\sum_{s=1}^{\ell}\dot\chi(g_s^{-1}gg_s)=\sum_{s=1}^{\ell}\dot\chi(g) = [G:H]\dot\chi(g)$ □

缺点: 特征标的表达式依赖于陪集代表元的选择.

为什么: $\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}gx) = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{h\in H}\dot\chi(g_sh\,g\,g_sh) = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{h\in H}\dot\chi(h^{-1}g_s^{-1}gg_sh) = |H|\sum_{s=1}^{\ell}\dot\chi(g_s^{-1}gg_s)$ ($\dot\chi$ 是 H 上的类函数)

$\therefore\ \chi_{\rho^G}(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}gx)$. 不依赖于代表元的选择.

例: $S_3 < S_4$. V 三维表示 (S_3 的).

$\dim V_{S_3}^{S_4}=8$.

S_4 中的共轭类的代表元: (1), (12), (123), (12)(34), (1234).

S_3

	(1)	(12)	(123)
χ_V	2	0	−1

- $\chi_{\rho^G}(1) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}\underset{(1)}{g}x) = [G:H]\dot\chi(1) = 4\cdot 2 = 8.$
- $\chi_{\rho^G}(12) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}gx) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}gx) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot\chi((x(1),x(2))) = 0$

  $\sigma(i_1i_2\cdots i_t)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_t))$ ⇝ 对称群中共轭类的形式.
- $\chi_{\rho^G}(123) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot\chi(x^{-1}gx) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot\chi((x(1),x(2),x(3))) = \frac{1}{6}\sum_{x\in H}\dot\chi(x(1)x(2)x(3))$

  $= \frac{1}{6}\times(-6) = -1.$

  总有 $x\in S_3$ 使 $\dot\chi(x(1)x(2)x(3))$ 与 $\dot\chi(1)$ 异号. 其和为 0.

- $\chi_{\rho_G}((12)(34)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4}\chi(x^{-1}(12)(34)x) = 0$
- $\chi_{\rho_G}((1234)) = \frac{1}{4}\sum_{x\in S_4}\chi(x^{-1}(1234)x) = 0$

	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_{ρ_G}	8	0	-1	0	0

	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_3	2	·	·	-	-	-	-
χ_4	3	·	-	·	-	-	-
χ_5	3	·	-	-	-	-	-

S_4

$\Rightarrow \chi_{\rho_G} = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$. $\therefore V_{S_3}^{S_4} = V_3 \oplus V_4 \oplus V_5$.

练习: $K_4 = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}^2 \lhd S_4$. 取 K_4 元一个对的表示 — 平凡表示 ρ.

确定 $\rho_{K_4}^{S_4}$.

模论与表示论初步 第十二讲

回顾：诱导表示的定义，构造

§3. 基本性质. Frobenius互反律 (Reciprocity).

3.1. 简单性质.

命题：$H<G$ 子群.

1) 如果 $W_1 \subset W$ 是 H 的表示，则 $W_{1,H}^G$ 是 W_H^G 的子表示；

2) 如果 $H \le K \le G$ 子群链，则 $(W_H^K)_K^G = W_H^G$. $\left((W_H^K)_K^G \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} (\mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}H} W) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W.\right)$

探讨诱导表示的构造法与常用构造法之间的关系. 常用构造法：$\oplus$, $\otimes$, $(-)^*$.

分析：$H<G$, $U, V \in \mathrm{Rep}\text{-}H$ (H的表示). $(U\otimes V)_H^G \overset{?}{\cong} U_H^G \otimes V_H^G$ ✗

维数不对！$\dim \mathrm{LHS} = \dim U \cdot \dim V \cdot [G:H]$.

$\dim \mathrm{RHS} = [G:H]^2 \dim U \cdot \dim V$.

定义：$H<G$. $V \in \mathrm{Rep}\text{-}G$. 记 $V|_H$ 为 V 在 H 上的限制表示. 有时简记为 V_H.

类似的记号有：$\rho|_H$, ρ_H, $\chi|_H$, χ_H.

命题：$H<G$. 则

1) $(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)_H^G \cong W_{1,H}^G \oplus \cdots \oplus W_{n,H}^G$

2) 令 $U \in \mathrm{Rep}H$, $V \in \mathrm{Rep}G$. 则

$$\boxed{U_H^G \otimes V \cong (U \otimes V_H)_H^G}$$

3) $(W_H^G)^* \cong (W^*)_H^G$

证明：1) $(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)^G \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} (W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W_n$

$\cong W_1^G \oplus \cdots \oplus W_n^G$.

2) $\mathrm{LHS} = U^G \otimes V \cong (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U) \otimes V$ 两个G-模的张量：$g\cdot(-\otimes-) = g\cdot- \otimes g\cdot-$

$\mathrm{RHS} = (U \otimes U_H)^G \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} (U \otimes V)$ 是一个H-模 $U\otimes V$ 的诱导表示. $g\cdot(\mathbb{C}G\otimes -) = g\mathbb{C}G \otimes -$.

构造：Φ: $\mathrm{RHS} \to \mathrm{LHS}$ $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} (U\otimes V) \to (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U) \otimes V$, $g \otimes u \otimes v \mapsto g \otimes u \otimes gv$

① Φ 是 well-defined. ✓.

② Φ 显然是满射. (只需找到 $g\otimes u\otimes v$ 的原像即可). 另证，原像 g 取成 $g\otimes u \otimes g^{-1}v \mapsto g\otimes u\otimes v$.

比较两边的维数，Φ 是双射.

③ Φ 是 G-模同态. 事实上，

$\forall g\in G.\quad \Phi(g\cdot(g_1\otimes u\otimes v)) \overset{?}{=} g\cdot\Phi(g_1\otimes u\otimes v).$

$\Phi(g\cdot(g_1\otimes u\otimes v)) = \Phi(gg_1\otimes u\otimes v) = gg_1\otimes u\otimes gg_1 v$

$g\cdot\Phi(g_1\otimes u\otimes v) = g\cdot(g_1\otimes u\otimes g_1 v) = g\cdot(g_1\otimes w)\otimes g(g_1 v) = gg_1\otimes u\otimes gg_1 v.$ □

3) 单纯用表示书写，不量纲

$(W^*)^G \cong \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} W^*.\quad (W^G)^* \cong (\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} W)^*$

来计算特征标：$\chi_{(W^*)^G}(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}_W(xgx^{-1}).$

$\chi_{(W^G)^*}(g) = \overline{\chi_{W^G}(g)} = \overline{\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}_W(xgx^{-1})} = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\overline{\dot{\chi}_W(xgx^{-1})} = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}_{W^*}(xgx^{-1})$ □

特征标公式：

推论：① $(\chi_1+\cdots+\chi_n)^G = \chi_1^G+\cdots+\chi_n^G$；

② $\chi^G\lambda = (\chi\lambda_H)^G$. λ是G的某个表示的特征标.

③ $(\overline{\chi})^G = \overline{\chi^G}$.

3.2. Frobenius Reciprocity.

定理：$H<G.\ M\in \mathrm{Rep}H.\ N\in \mathrm{Rep}G.$ 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M^G, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, N_H).$$

证明：$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M^G,N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}M, N)$

$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, N_H)$ □

$\mathrm{Hom}_R(R, M)\cong M$ as left R-module.

另一种形式：$H<G.\ M\in \mathrm{Rep}G.\ N\in \mathrm{Rep}H.$

则：$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, N^G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M_H, N).$

诱导表示与限制表示是彼此伴随.

练习：证明互反律的第二种形式.

特征标公式：$(\chi^G, \lambda) = (\chi, \lambda_H).$

第二章 紧群与表示

§1. 拓扑群 (Topological group).

1.1 一点拓扑知识.

概念 • 拓扑空间. $(X, \mathcal{T})$ $\mathcal{T}$子集集 ① $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. ② 任交并. 有限交 $\in \mathcal{T}$.

• 子拓扑. 商拓扑. 乘积拓扑.

性质: • 连通性. 道路连通

• 可分性. T_0. T_1. T_2 - - · T_2: Hausdorff: ⊙⊙

• 可数性.

• 紧性 (Compactness).

定义: 如果拓扑空间X的任一开覆盖均包含一个有限子覆盖. 则X为紧的.

$$\left(\bigcup X_\alpha = X \right)$$

说明: ① $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 的子集 X 是紧的 $\Leftrightarrow$ X是一个有界闭集.

② Hausdorff 空间里的紧集都是闭的.

③ 紧空间的闭集还是紧的.

④ $X \times Y$ 是紧的 $\Leftrightarrow$ X, Y 紧.

连续映射: 开集的原像是开集.

连续: ① 紧集的连续像依然是紧.

② 紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭映射.

1.2 拓扑群.

定义: 1. 群 G 称为拓扑群如果 ① G 是 Hausdorff 空间. ② 群运算是连续的. 即: $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ 是连续的.

2. 拓扑群 G 称为一个紧群如果 G 还是紧的.

例3. ① $(\mathbb{R}, +)$ 拓扑群.

② $(\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ 拓扑群.

模论与表示论初步 第十三讲

例：$(\mathbb{R},+)$，$(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

$GL_n(\mathbb{R})$，$GL_n(\mathbb{C})$，$SL_n(\mathbb{R})$（特殊线性群），$SL_n(\mathbb{C})$.

$O_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA'=I_n\}$.（正交群）

$U_n(\mathbb{C})=\{A\in GL_n(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}'=I_n\}$（酉群，Unitary Group）.

哪些是紧的？ 欧氏空间中一致紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭.

$GL_n(\mathbb{R})$. 不紧. $\because GL_n$ 中行列式的元可以大

类似地，SL_n 也不紧.

O_n，U_n 都是紧的.（仅对 O_n 进行说明. $AA'=I_n$. 这是一个闭的条件. 下面来看它有界即可.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$，$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{12} & \cdots \\ \vdots & \\ a_{1n} & \cdots \end{pmatrix}$. $AA'=I_n \Rightarrow a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2=1$. $\Rightarrow |a_{1i}|\le 1$. $\forall 1\le i\le n$. $\therefore$ 有界.）

O_n 是连通的吗？

No! $\det: O_n \longrightarrow \mathbb{R}^*$. 连续的表 $AA'=I_n \Rightarrow \det(A)=1$ or $\det(A)=-1$.

$\det: O_n \to \pm 1$. 它不是连通的. $\therefore O_n$ 也不是连通的.

$SO_n := \{A\in O_n \mid \det(A)=+1\}$.

SO_n 连通吗？

思考题：证明 SO_n 是 GL_n 中一个极大连通紧子群！

1.3. 拓扑群之间的同态.

定义：设 G_1、G_2 是两个拓扑群. 群同态 $f: G_1\to G_2$ 称为一个拓扑群的同态如果 f 还是连续的.

例：① $\det: GL_n(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbb{R}^*$.

$|AB|=|A||B|$.

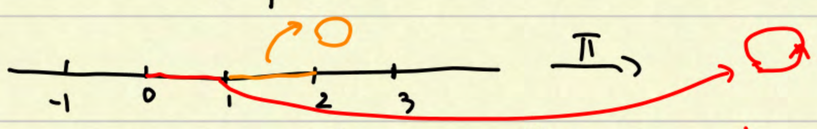
② $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}=\{e^{i\theta} \mid 0\le\theta\le 2\pi\}$. $e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$.

这样的话，S^1 是一个群. 单位圆群.（华罗庚先生：从单位圆谈起）.

这是一个李群.

$\pi: (\mathbb{R},+)\longrightarrow S^1$，$a\mapsto e^{a2\pi i}$

这是拓扑群同态. $\ker\pi=\mathbb{Z}$. Closed.



Covering map.

π 还是一个开映射. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$.

③. P_n: $S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $e^{2\pi i\theta} \mapsto e^{n\cdot 2\pi i\theta}$. $n\in\mathbb{Z}$

拓扑群的同态定理:

定理: 设 $f: G_1 \to G_2$ 为拓扑群同态. 如果 f 是开映射. 则 $\ker f \lhd G_1$ 是闭子群. 且我们有拓扑群同构: $G_1/\ker f \cong \mathrm{Im} f$. (同).

(G/H 为 Hausdorff gp. $T\in G/H$ 为 closed $\Rightarrow H$ closed. $G \xrightarrow{\pi} G/H$ 开)

§2. 紧群上的不变积分 (Haar 积分. Haar 测度).

2.1. Haar 积分的定义.

定义: 设 G 是一个紧群. 如果对应在 G 上的每个实值连续函数 $f(x)$. 都存在一个实数, 记为 $\int_G f(x)dx$, 满足

i) 线性性: $\int_G(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_G f(x)dx + \beta\int_G g(x)dx$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $f(x), g(x)$ G 上的实值连续函数.

ii). 正负性. 如果 $f(x)\geq 0$ $\forall x\in G$. 则 $\int_G f(x)dx \geq 0$ 且 "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)\equiv 0$.

iii) 规范性. $\int_G 1\,dx = 1$.

iv) 左不变性. $\forall$ $f(x)$ 实值连续函数. $\forall g\in G$. 有

$$\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx.$$

v) 右不变性. $\forall f(x)\in C(G,\mathbb{R})$, $\forall g\in G$. 有

$$\int_G f(xg)dx = \int_G f(x)dx.$$

vi) 对逆性. $\forall f(x)\in C(G,\mathbb{R})$. 有

$$\int_G f(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx.$$

则称群 G 上存在一个 Haar 积分. (不变积分. Haar 测度).

说明: ① $\int_G - dx \in (C(G,\mathbb{R}))^*$

② 如果 $\int_G - dx \in (C(G,\mathbb{R}))^*$ 满足 i) ii) iii) iv)

则 $\int_G - dx$ 称为一个 Haar 积分. (成德理查. 连续群).

定理: (Haar). 在任一紧群上有且只有一种方式建立 Haar 积分. (证明也可以参见上述的文献).

Maschke定理给出了一种表述形式：

① 有限群的有限维表示都是正交表示（即表示V上存在G-不变的内积）.

② 有限群的有限维复表示都是酉表示（Unitary Representation，即V上存在G-不变的复内积）.

3.2. 紧群上的 Maschke 定理.

定理： 设G是一个紧群，则

① G的所有有限维实表示都是正交表示；

② G的所有复表示（有限维）都是酉表示

证：只证明①，②是类似的. 设V为G的一个有限维实表示，只需在V上存在一个G-不变的内积. 任取V上一个内积 $(,)$.

$\forall u, v \in V$，造一个函数

$$f_{u,v}: G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \longmapsto (g\cdot u, g\cdot v).$$

定义：$\langle u, v\rangle := \int_G f_{u,v}(x)\,dx$.

故 $\langle -,-\rangle$ 是一个G-不变的内积. □

3.0. 拓扑群的表示（最后就在写一小节的最后）.

定义： 设G为一个拓扑群，V和拓扑群同态. $\rho: G \to GL_n$ 为G的一个n维表示，也记为 ρ.

说明： 设V为一个n维线性空间，$GL(V) \cong GL_n$ 作为拓扑群. 有时也用 $G \to GL(V)$ 来denote一个表示. 也称V为一个G-模.

省略信息：$G \times V \to V$ 还需要连续的.

模论与表示论初步 第十四讲

上节课主要结论：紧群的有限维酉表示 $\Rightarrow$ 有限维表示都是完全可约的. 只需研究不可约表示.

$\rightsquigarrow$ 特征标. ($\rho \cong \psi \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\psi$)

$\chi_\rho = \chi_\psi \Rightarrow \rho \cong \psi$ 关键是证明了 特征标的正交关系.

§4. 正交关系

4.1. 特征标的定义.

设 G 是一个紧群. 域 $\mathbb{C}$

设 $\rho: G \to GL_V$ 是 G 的一个表示. $\chi_\rho: G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto Tr(\rho(g))$.

说明：① $\chi_\rho: G \to \mathbb{C}$ 是连续的.

$\rho: g \to (a_{ij}(g))_{n\times n}$ ρ 连续 $\Leftrightarrow$ $a_{ij}: G \to \mathbb{C}$ 是连续的. $1 \le i,j \le n$.

$\therefore$ $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(g)$ 是连续的.

② $\chi_\rho(g^{-1}) = Tr(\rho(g^{-1})) \xlongequal[\text{Unitary Representation}]{} Tr(\overline{\rho(g)^T}) = Tr(\overline{\rho(g)}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ii}(g)} = \overline{\chi_\rho(g)}$.

(是有限群情形的直接推广).

4.2. 双线性函数

有限群情形： $f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$

$(f_1, f_2) := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g^{-1})$ $\qquad$ $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \rightsquigarrow$ Haar 积分

定义： 取 $f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{C})$, 定义 ($C(G,\mathbb{C})$ 连续 continuous)

$(f_1, f_2) := \int_G f_1(g) f_2(g^{-1})\, dg$ $\quad$ ($\int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg$) 不依赖于群

记号： ① $Irr\, G = \{G$ 互不同构的不可约表示$\}$.

② $Irch\, G = \{$不可约特征标$\}$

4.3. 矩阵元的正交关系.

$\rho: G \to GL_n$. $g \mapsto (a_{ij}(g))$. $a_{ij}: G \to \mathbb{C}$. $\therefore a_{ij} \in C(G, \mathbb{C})$. 矩阵元.

定理： 设 $(V,\rho), (U,\varphi) \in Irr\, G$. 设 $\dim V = n$, $\dim U = m$. $\rho(g) = (a_{ij}(g))_{n\times n}$, $\varphi(g) = (b_{ij}(g))_{m\times m}$.

(i) 若 $\rho \not\cong \varphi$, 则

$(a_{ij}, b_{kl}) = 0$. for $1 \le i,j \le n$, $1 \le k,l \le m$.

② 若 $\rho \not\cong \varphi$, 则

$$(a_{ij}, b_{kl}) = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl}. \quad 1 \le i,k,j,l \le n.$$

证明: 记号: 如果 $M(g) = (c_{ij}(g))_{l\times l}$, $c_{ij} \in C(G,\mathbb{C})$. 记 $\int_G M(g)dg := \left(\int_G c_{ij}(g)dg\right)_{l\times l}$.

任取一个复矩阵 $C_{m\times n}: V \longrightarrow U$

令 $\widetilde{C}_{m\times n} := \int_G \varphi(\vec{g})\, C\, \rho(g)\, dg$ (想构造一个从 $V \to U$ 的 G-模同态).

$\forall x \in G$. $\varphi(\vec{x})\widetilde{C}_{m\times n}\rho(x) = \varphi(\vec{x})\int_G \varphi(\vec{g})C\rho(g)dg\,\rho(x) = \int_G \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{g})C\rho(g)\rho(x)dg$

$= \int_G \varphi((gx)^{\rightarrow})C\rho(gx)dg = \int_G \varphi(\vec{g})C\rho(g)dg = \widetilde{C}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\widetilde{C}} & U \\ \downarrow \rho(g) & & \downarrow \varphi(g) \\ V & \xrightarrow{\widetilde{C}} & U \end{array} \iff \widetilde{C} \text{ is a morphism of } G\text{-modules.}$$

$$\iff \widetilde{C}\rho(g) = \varphi(g)\widetilde{C} \iff \varphi(\vec{g})\widetilde{C}\rho(g) = \widetilde{C}. \checkmark$$

$\widetilde{C}$ 是 G-module 同态.

$\widetilde{C} \in \mathrm{Hom}_G(V,U)$.

① 如果 $V \not\cong U$, 由 Schur's Lemma (对酉群也成立),

$\mathrm{Hom}_G(V,U) = \{0\}$. $\therefore \widetilde{C} = 0$. 注意到 C 是任意取的.

不妨令 $C = e_{ki}$ (矩阵单位 $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ 第 k 行第 i 列)

$$\widetilde{C} = \int_G \rho(\vec{g})E_{ki}\rho(g)dg = \int_G (b_{ij}(\vec{g}))e_{ki}(a_{ij}(g))dg = \int_G (\overline{b_{ji}(g)})_{(i,j)} e_{ki}(a_{ij}(g))dg = 0$$

取第 (l,j)-位置. 得 $\int_G \overline{b_{kl}(g)}\, a_{ij}(g)\, dg = 0$

$\therefore (a_{ij}, b_{kl}) = \int_G a_{ij}(g)\,\overline{b_{kl}(g)}\,dg = 0$.

(If we take $(f_1,f_2) = \int_G f_1(g)\,f_2(\vec{g})dg$. $(a_{ij}, b_{kl}) = 0$)

② 若 $V \cong U$. 由 Schur's Lemma 知, $\mathrm{Hom}_G(V,U) \simeq \mathbb{C}\,\underline{\mathrm{Id}_V}$ (认同 $V = U$)

即: $\widetilde{C} = \lambda I_n$. 如果确定 λ?

$\mathrm{Tr}(\widetilde{C}) = \mathrm{Tr}(\lambda I_n) = n\lambda$

又 $C = e_{ki}$. $\mathrm{Tr}(C) = \delta_{ki}$.

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{C}) = \mathrm{Tr}\left(\int_G \rho(\vec{g})C\rho(g)dg\right) = \int_G \mathrm{Tr}(\rho(\vec{g})C\rho(g))dg = \int_G \mathrm{Tr}(C)dg = \mathrm{Tr}(C) = \delta_{ki}.$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\delta_{ki}}{n}$ 即 $\widetilde{C} = \frac{\delta_{ki}}{n} I_n$

同理, 取 $\widetilde{C}$ 在 (l,j)-位置.

$\therefore \frac{\delta_{ki}}{n}\delta_{lj} = (a_{ij}, b_{kl})$ ← (1)的计算结果. ▨

说明：有限群的情形，我们有

① 如果 $\rho \not\cong \varphi$，$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{ij}(g)\,\overline{b_{kl}(g)} = 0$

② 如果 $\rho \cong \varphi$，$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{ij}(g)\,\overline{b_{kl}(g)} = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl}$.

44. 特征标的正交关系.

定理：设 $(V,\rho),(U,\varphi)$ 分别是群 G 的两个不可约表示，其特征标分别为 χ_ρ,χ_φ，则

$$(\chi_\rho,\chi_\varphi) = \begin{cases} 1 & \rho \cong \varphi \\ 0 & \rho \not\cong \varphi \end{cases}$$

证明：$(\chi_\rho,\chi_\varphi) = \int_G \chi_\rho(g)\,\overline{\chi_\varphi(g)}\,dg$

$$= \int_G \chi_\rho(g)\overline{\chi_\varphi(g)}\,dg = \int_G \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(g) \sum_{j=1}^{m} \overline{b_{jj}(g)}\,dg = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \int_G a_{ii}(g)\,\overline{b_{jj}(g)}\,dg$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ii},b_{jj})$$

∴ 由前面介绍的矩阵元的正交关系，我们有：

① 如果 $\rho \not\cong \varphi$，$(\chi_\rho,\chi_\varphi) = 0$.

② 如果 $\rho \cong \varphi$，$(\chi_\rho,\chi_\varphi) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii},b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$. ■

推论1：设 U,V 分别为群 G 的两个不可约表示，则

$$U \cong V \iff \chi_U = \chi_V.$$

推论2：表示 φ 不可约 $\iff (\chi_\varphi,\chi_\varphi) = 1$.

推论3：对任意两个有限维表示 U,V，则 $U \cong V \iff \chi_U = \chi_V$.

其主要应用：
- 表示的不可约分解.
- 张量积的分解公式……

问题：不可约表示的个数多少？

{类函数} ← 特征标是一组基.

任意类函数都是特征标的线性组合.！

§5. Peter - Weyl Theorem.

例. S^1 S^1 上的连续函数 $= C(S^1, \mathbb{C})$

S^1 上不好的表示上基本都是: ① S^1 上所有的表示都是一维的 ($\because S^1$ 是交换的).

② $\rho_n: S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$ $n\in\mathbb{Z}$

是 S^1 上好有不好的表示.

问题: S^1 上的好有连续函数能否被 $\{e^{in\theta} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 上线性组合逼近? ✓

回忆: 实上情形: 好点讲上周期函数上展开成 Fourier 级数上形式!

$$f(\theta) = \sum a_n \cos^{nx} = \sum b_n \sin^{nt}$$

复上情形: $\mathbb{C}$ 上连续周期函数具有 Fourier 展开式

$$f(\theta) = \sum a_n e^{in\theta}$$

{周期函数} := {S^1 上函数}.

Fourier 选择 $\sin nx \cdots$ 上一个主要原因是三角函数上性质好!

$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{n\theta}\cos^{m\theta}\, d\theta\right)$

Fourier 分析上另一种形式: S^1 连续函数都由一组好上函数线性逼近! 这些函数就是不好的特征标.

5.1. 正交完备集.

定义: 设 G 是一个紧群. Δ 是 $C(G,\mathbb{C})$ 中的一个子集. Δ 称为完备上如果对于 G 上的任一个连续函数 f 和 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists$ 复数 $c_1 \cdots c_n \in \mathbb{C}$ 和 $f_1 \cdots f_n \in \Delta$. s.t.

$$\left| f(g) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(g) \right| < \varepsilon. \quad \forall g \in G.$$

进一步地, 如果 $(f,g) = 0$ for $f \neq g \in \Delta$. 则称 Δ 是正交完备的.

5.2. Peter - Weyl 定理.

定理: 设 G 是紧群. 则

① G 上所有互不等价的有限维不好的复表示的矩阵元全体作成的集合是 $C(G,\mathbb{C})$ 中一个正交完备集.

② G 上的好有不好的特征标全体形成的集合是 G 上连续函数集中一个正交(标准)完备集.

吴雨涵

模论与表示论初步 第十五讲

回顾：紧群情形下面：正交关系. Peter-Weyl定理.

例3：S^1

§6. SU_2 的所有不可约表示

6.1. SU_2

由定义：$SU_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}' = I_2,\ \det(A) = 1\}$

练习：证明 $SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$. (Hint: 将 $A\bar{A}' = I_2$, $|A| = 1$. $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$)

说明：如果令 $H = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$，则发现 H 是 Hamilton 四元数代数.

取 $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. 则这四个元生成的群就是 Q_8.

注意到，作为实线性空间，$\dim_{\mathbb{R}} H = 4$. $H = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. 则我们定义一种内积：

$X = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$, $Y = \sum_{j=0}^{3} y_j e_j \in H$. $x_i, y_j \in \mathbb{R}$.

$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=0}^{3} x_i y_i$ (将 e_0, e_1, e_2, e_3 看成标准正交基).

引理：$A \in SU_2 \iff \langle A, A \rangle = 1$. (得)

故我们有群同构：$SU_2 \cong S^3$.

6.2. SU_2 的不可约表示.

- 表示的构造.

$\mathbb{C}[x,y]$：两个变元的多项式代数. 令 $V_n = \mathbb{C}[x,y]_{[n]} = \{\mathbb{C}[x,y] \text{ 中 } n \text{ 次齐次多项式}\}$

$= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{x^i y^{n-i} \mid 0 \le i \le n\}$.

$\dim_{\mathbb{C}} V_n = n+1$.

定义：

$\Phi_n : SU_2 \longrightarrow GL_{V_n}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \Phi_n(A) : x^i y^{n-i} \longmapsto (a_{11}x + a_{12}y)^i (a_{12}x + a_{22}y)^{n-i}$ $\underline{(x,y)A}$

练习：说明上述 Φ_n 是一个拓扑群同态.

$\therefore V_n$ 就是 SU_2 的一个 $n+1$ 维的表示.

定理： V_n 是 SU_2 的不可约表示.

证明： 令 $T=\left\{A(\theta)=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} \mid \theta\in\mathbb{R}\right\}\subset SU_2$

$\pi_n(A(\theta))(x^j y^{n-j}) = (e^{i\theta}x)^j (e^{-i\theta}y)^{n-j} = (e^{i\theta})^{2j-n}\, x^j y^{n-j}$. 即 $x^j y^{n-j}$ 都是 T 的特征向量且属于不同的特征空间.

令 $W\subset V_n$ 是一个非0的表示. 只需证 $W=V_n$.

① W 是 T 的作用下是稳定的. $\therefore$ W 是 T 的作用下也会成为特征空间的直和.

从而 W 必然是若干 $x^j y^{n-j}$ 的线性组合. 即: $\exists I\subset\{0,1,\dots,n\}$. s.t. $W=\operatorname{span}\{x^j y^{n-j}\mid j\in I\}$

② 由①, 不妨设 $x^{j_0}y^{n-j_0}\in W$

$\pi_n\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix}(x^{j_0}y^{n-j_0}) = (z_1x-\bar{z}_2y)^{j_0}(z_2x+\bar{z}_1y)^{n-j_0}\in W$. 由于 z_1, z_2 是任意的, 系数非0.

$\forall j\in\{0,1,\dots,n\}$. $x^j y^{n-j}$ 的系数不总为0.

故 $x^j y^{n-j}\in W$. $\Rightarrow W=V_n$. □

引理： $V_n\not\cong V_m$ 若 $m\neq n$.

证明： 因为 $\dim V_n\neq\dim V_m$. □

定理： $\{V_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 SU_2 的所有不可约的表示.

证明： 只需证明 $\chi_n=\chi_{V_n}$ 是 SU_2 上连续函数空间的完备集. 为此需证如下的引理:

引理： (Stone-Weierstrass). 设 $C_0(S^1)$ 是 S^1 上的连续且满足 $f(e^{i\theta})=f(e^{-i\theta})$ 的集合.

令 $P=\{S^1$ 上的多项式函数 $g\mid g(e^{i\theta})=g(e^{-i\theta})\}$

则 P 在 $C_0(S^1)$ 中稠密.

连续定理的证明： 设 f 是 SU_2 的任一连续的类函数.

$\forall B\in SU_2$. 总有酉矩阵 U. s.t.

$UBU^{-1}=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ for some $\theta\in\mathbb{R}$.

$\therefore f(B)=f\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right)$ (即函数 $C(S^1)$ 中的元素. $f\rightsquigarrow f'(e^{i\theta}):=f\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$)

同时, $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$

$\therefore f\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}\rightsquigarrow f'(e^{i\theta})=f'(e^{-i\theta})\rightsquigarrow f'\in C_0(S^1)$.

其次，计算一下 χ_n 在 T 上的作用.

$$\chi_n\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} (e^{i\theta})^{2j-n} \xrightarrow{\text{得到}} \boxed{\frac{(e^{-i\theta})^{n+1} - (e^{i\theta})^{n+1}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}}$$

得到: $P = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{ \chi_n \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}^2 \right\}$.

$\therefore$ 由 Stone-Weierstrass 定理得本定理. □

练习: 求出 $V_n \otimes V_m$ 的分解公式.

第六章: Some Further topics

§1. 对称群的表示

1.1. 对称群的元素表示法

① 常见 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \cdots & \pi(n)\end{pmatrix}$ $\longleftrightarrow$ 排列. 第一行也可以不按照自然序排序.

② 循环乘积形式. 有 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{r+1} & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

为对称群中的一个循环. 简记为 $(i_1 i_2 \cdots i_r)$.

若两个循环 $(i_1 \cdots i_r), (j_1 \cdots j_s)$ 为不交的如果 $\{i_1 \cdots i_r\} \cap \{j_1 \cdots j_s\} = \emptyset$.

易见 S_n 中的任意元素均可表达成为不交的循环的乘积.

$\therefore$ $\forall \pi \in S_n$. 定义. $c(\pi)$ 为 π 中包含的循环的个数.

l_ν 表示第 ν 个循环 $(1 \le \nu \le c(\pi))$ 的长度.

j_ν 表示第 ν 个循环中的一元素.

$$\pi = \prod_{\nu=1}^{c(\pi)} (j_\nu\ \pi(j_\nu) \cdots \pi^{l_\nu - 1}(j_\nu))$$

称 $\{l_1, \cdots, l_{c(\pi)}\}$ 为 π 的型.

③ 长度为 2 的循环称为一个对换 (Transposition).

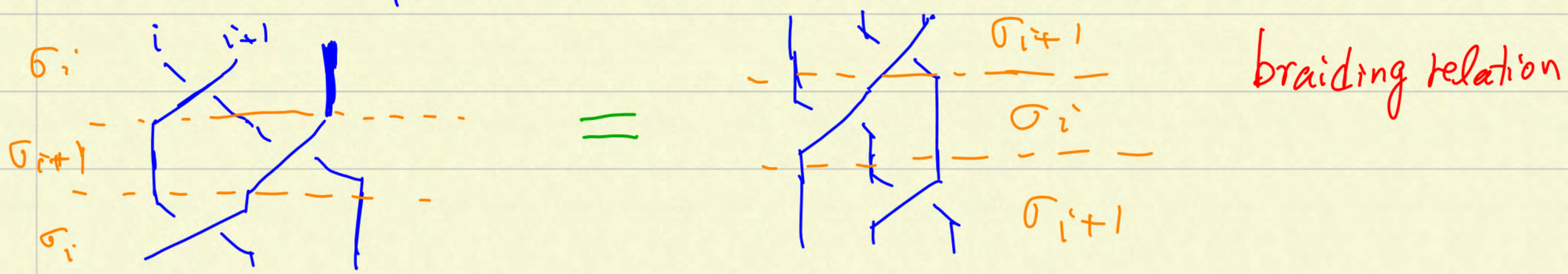
易见 $(i_1 \cdots i_r) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{r-1} i_r)$.

所以 S_n 中的任一元素均可写成对换的乘积.

因为: $(j, k+1) = (k, k+1)(j, k)(k, k+1)$. $j < k$.

$\therefore$ $S_n = \langle (12), (23), \cdots, (n-1, n) \rangle$

$= \langle \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ if } |i-j| > 1,\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},\ \sigma_i^2 = 1 \rangle$.



延伸阅读：Artin's Braid Group.

④ 练习：$\sigma(i,j)\sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$.

对换改次 $(1,\cdots,n)^r (12) (1,\cdots,n)^{-r} = (r+1, r+2)$.

$\therefore S_n = \langle (12), (1,2,\cdots,n) \rangle$.

引理：$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. 则 σ_1, σ_2 属于同一共轭类 $\Leftrightarrow$ σ_1, σ_2 有相同示型.

1-2. Young 图

① 自然数的拆分. (Partition).

定义：$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ 称为自然数 n 的一个 partition 如果 ① $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$; ② $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

记 $A_n = \{(\lambda_1 \cdots \lambda_k) \mid (\lambda_1 \cdots \lambda_k)$ 为 n 的拆分$\}$. 定义

$P_n = |A_n|$.

说明：
- $P(n)$ 增长很快.

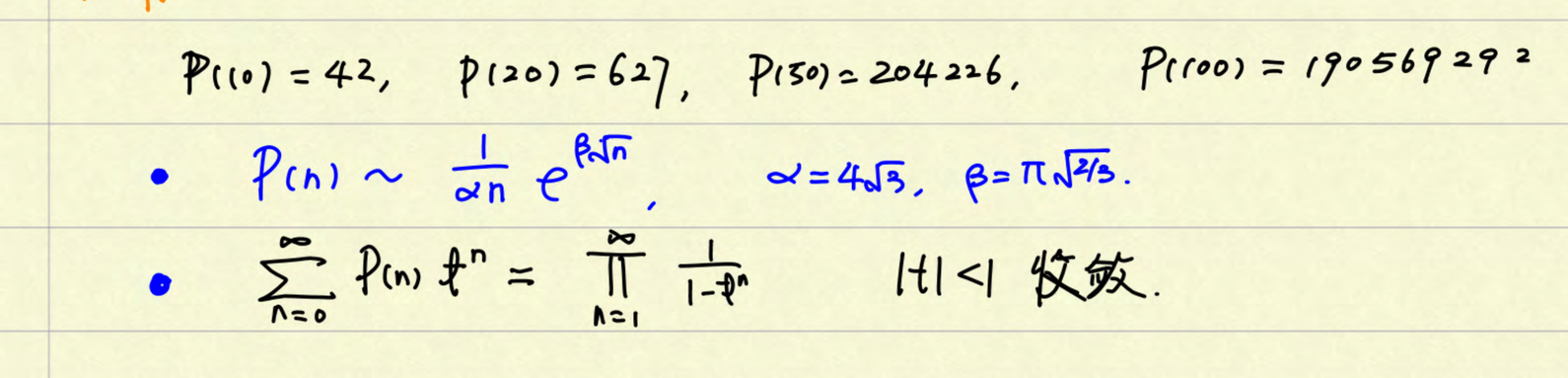
$P(10) = 42$, $P(20) = 627$, $P(50) = 204226$, $P(100) = 190569292$

- $P(n) \sim \frac{1}{\alpha n} e^{\beta\sqrt{n}}$, $\alpha = 4\sqrt{3}$, $\beta = \pi\sqrt{2/3}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n}$ $|t|<1$ 收敛.

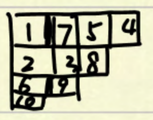
命题：S_n 有 $P(n)$ 个互不同构的不可约表示.

② Young Diagram.

- 给定 n 的一个拆分 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$. 对应的 Young 图表示为



- 一个 Young 表就是一个 Young 图并同时将方格里不重复地放上 1, 2, ..., n 这些数字.

例1. 

S_{10} 中一个 Young 表.

- 转置 Young 图 (表).

定义表的矩阵转置: $\lambda =$  $\to \lambda' =$ 

- **Young 引理**

给定一个 Young 表 λ. $\lambda \rightsquigarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. $\lambda' = (\lambda_1', \dots, \lambda_r')$.

$$P_\lambda := \{ g \in S_n \mid g \text{ 保持 } \lambda \text{ 中每一行} \}$$

$$Q_\lambda := \{ g \in S_n \mid g \text{ 保持 } \lambda \text{ 中每一列} \}$$

命题: $P_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_k}$

$$Q_\lambda \cong S_{\lambda_1'} \times S_{\lambda_2'} \times \cdots \times S_{\lambda_r'}.$$ □

模论与表示论初步 第十六讲

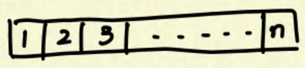
Young 子群. $\lambda \sim$ Young 表. λ' - 转置 Young 表. P_λ. Q_λ

1.3. Young 对称化子 (Symmetrizer).

给定 $\lambda \sim$ Young 表. 可以得到 Young 子群 P_λ. Q_λ

令 $a_\lambda := \sum_{g \in P_\lambda} g \in \mathbb{C}S_n$; $b_\lambda := \sum_{g \in Q_\lambda} \mathrm{sgn}(g)\, g \in \mathbb{C}S_n$.

定义: 称 $c_\lambda := a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ 为 λ 对应的 Young 对称化子.

例: (1). $\lambda =$ 

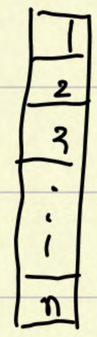
. $P_\lambda = S_n$. $Q_\lambda = 1$.

$a_\lambda = \sum_{g \in S_n} g$, $b_\lambda = 1$. $c_\lambda = a_\lambda$

$c_\lambda \cdot c_\lambda = \sum_{g \in S_n} g \cdot \sum_{h \in S_n} h = |G|\, c_\lambda$

left module $\to$ $\mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ ← left module.

c_λ provides a 1-dimensional representation of S_n: $\mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ which is irreducible.

(2) 

Young-表

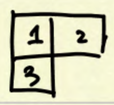
$P_\lambda = 1$, $Q_\lambda = S_n$. $a_\lambda = 1$. $b_\lambda = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$

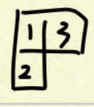
$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = b_\lambda$. $\mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda$

$h \cdot \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, hg = \mathrm{sgn}(h) \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(h)\mathrm{sgn}(g)\, hg = \mathrm{sgn}(h) \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(hg)\, hg$

$= \mathrm{sgn}(h)\, c_\lambda$. $\mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.

∴ c_λ 也提供了一个一维不可约的表示 —— 符号表示.

(3) S_3.  $\sim \lambda$

$P_\lambda = \{1, (12)\}$.  $Q_\lambda = \{1, (13)\}$.

$a_\lambda = 1 + (12)$, $b_\lambda = 1 - (13)$.

$c_\lambda = (1 + (12))(1 - (13)) = 1 + (12) - (13) - (132)$

$\mathbb{C}S_3 \cdot c_\lambda$: $(12)c_\lambda = (12) + (1) - (132) - (13)$; $(13)c_\lambda = (13) + (123) - 1 - (23)$; $(23)c_\lambda = (23) + (132) - (123) - (12)$

$(123)c_\lambda = (123) + (13) - (23) - 1$; $(132)c_\lambda = (132) + (23) - (12) - (123)$.

$\mathbb{C}S_3 \cdot c_\lambda$ 是二维不可约表示 (这是子不变的表示) ~ Standard Representation.

1.4. S_n 的所有不可约的表示

定理：设 $A=\mathbb{C}S_n$. 则

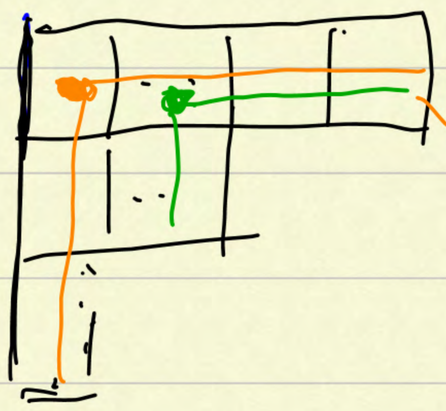
(1) AC_λ 为 A 的一个不可约的表示.

(2) 如果 $\lambda \neq \mu$ (λ, μ 是两个 Young 图)，则 作为表示 $AC_\lambda \neq AC_\mu$.

说明：上述定理给出 S_n 的所有互不同构的不可约的表示.

1.5 Character formula.（特征标公式）

① Hook length formula. — 确定不可约的表示的维数.



→ hook length. 这个 hook 里的所有 box 的数目之和

Example:



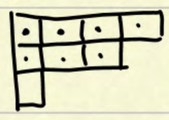
• → hook length = 6
• → hook length = 2
• → hook length = 4

定理：令 λ 为 Young 图. 对应的不可约表示 V_λ. 则

$$\dim V_\lambda = \frac{|S_n|}{\prod \text{hook length}}.$$

例 ① S_3.  $\dim AC_\lambda = 2$.

$$\dim V_\lambda = \frac{|S_3|}{\prod \text{hook length}} = \frac{6}{3} = 2.$$

② S_8. $\lambda = (4,3,1)$. 

6, 4, 3, 1
4, 2, 1
1

$$\dim V_\lambda = \frac{|S_8|}{6\times 6\times 3\times 1\times 2} = 70.$$

② 一般的特征标公式.

- Conjugacy class → λ (partition) S_n

For any partion λ, define $\vec{i}_\lambda := (i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 其中 $i_j := \#\{\text{cycles of length } j \text{ in } \lambda\}$.

Example: S_3. $(1) \dashrightarrow i_{(1)} = (3,0,0)$

$(12) \dashrightarrow i_{(12)} = (1,1,0)$. $(123) \dashrightarrow i_{(123)} = (0,0,1)$.

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ partition.

令 $x_1, x_2, \cdots x_k$ 为 k 个未定元.

定义: $P_j^\lambda(x) = x_1^j + x_2^j + \cdots + x_k^j \quad (1 \le j \le n)$

$$\Delta_\lambda(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

- 如果 $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$.

$[f(x)]_{l_1, \cdots, l_k} :=$ $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ 前面的系数.

- 现在约定: 对应 partition λ, 令

$l_1^\lambda = \lambda_1 + k - 1, \quad l_2^\lambda = \lambda_2 + k - 2, \cdots, l_k^\lambda = \lambda_k.$

定理 (Frobenius). Let μ be a partion of n. $\vec{i}_\mu = (i_1, i_2, \cdots, i_n)$. $g \in C_\mu$ (μ 对应的共轭类)

$$\chi_\lambda(g) = \left[\Delta_\lambda(x) \prod_{j=1}^{n} P_j(x)^{i_j}\right]_{(l_1^\lambda, l_2^\lambda, \cdots, l_k^\lambda)}$$

例. S_3. $\lambda = (2,1)$. 田 $l_1^\lambda = 3, l_2^\lambda = 1$

$\Delta_\lambda(x) = x_1 - x_2$. $P_1(x) = x_1 + x_2, \cdots P_3(x) = x_1^3 + x_2^3$.

- (1), now $\vec{i}_{(1)} = (3, 0, 0)$

$$\chi_\lambda((1)) = \left[(x_1 - x_2) P_1^3(x)\right]_{(3,1)} = 2.$$

- (12). $\vec{i}_{(12)} = (1, 1, 0)$.

$$\chi_\lambda((12)) = \left[(x_1 - x_2) P_1(x) P_2(x)\right]_{(3,1)} = 0$$

- (123) $\vec{i}_{(123)} = (0, 0, 1)$

$$\chi_\lambda((123)) = \left[(x_1 - x_2) P_3(x)\right]_{(3,1)} = 1.$$

2. Algebraic Group. Lie Group. Rep.

以代数群.

Structure: $1 \to G^\circ \to G \to G/G^\circ \to 1$

(G°: Connected component; G/G°: finite 群)

$1 \to H \to G^\circ \to G^\circ/H \to 1$

(H: Affine; G°/H: Abelian variety.)

$1 \to R(H^\circ) \to H^\circ \to H^\circ/R(H^\circ) \to 1$

($R(H^\circ)$: 可解 (有限维); $H^\circ/R(H^\circ)$: semisimple)

one can use Lie alg to study it.

3. Schur - Weyl duality.

Frobenius — Schur. 证 Schur 去考虑 $GL_n(\mathbb{C})$ 的表示

- 1901. Schur 定义 3- 表代数 $S_{\mathbb{C}}(n,r)$. —Schur 什特a .
- 1927. Schur gave a new way to study the rep of $GL_n(\mathbb{C})$.

$GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright V = \mathbb{C}^n$ Consider symmetric gp S_r

$GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright V^{\otimes r} \curvearrowleft S_r$

- 1939. popularize schur's obeservation.

定理. (双中心化子定理).

设 E 是一个有限维的线性空间. $A, B \subseteq End(E)$. 的两个子代数. 假设 A 是半单的. $B = End_A(E)$. 则

(1) $A = End_B(E)$ (2) B 半单.

Schur - Weyl Duality

定理: $GL(V)$ 对角地作用在 $V^{\otimes r}$ 上 ($g\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_r) = gv_1\otimes\cdots\otimes gv_r$). S_r 人右边以置换的形式作用在 $V^{\otimes r}$ 上 ($(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)\cdot\sigma = v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(r)}$). 故

$\rho_1: GL(V) \longrightarrow End(V^{\otimes r})$, $\rho_2: S_r \longrightarrow End(V^{\otimes r})$. 则

$A = End_B(V^{\otimes r})$, $B = End_A(V^{\otimes r})$. 其中 $A = \langle Im\,\rho_1\rangle$ ← subalg. $B = \langle Im\,\rho_2\rangle$:

预备辅导:

(1) Maschke 定理及其证明. (两种证明)

(2) 会计算一些简单群的特征标. (S_3. S_4, Q_8. D_8).

(3). 会给出诱导表示的不可约分解. ($V_{S_3}^{S_4}$, $V_{\cdot}^{Q_8}$)

Frobenius 互反律.

(4) 会确定简单群的不可约表示 (S^1. SU_2)

(5) 会画 Young 图 会写对应的 Young 对称化子.

(6) 会计算张量积分解公式. (7) 探讨一下 $V \cong V^*$ 作用表示的充分必要条件.