

模论与表示论初步 第二讲

回顾: k -代数, 子代数, 理想, 商代数.

$$\mathbb{Q}_8 = \{i, j \mid i^4 = j^4 = 1, i^2 = j^2, ij = j^3i\} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

1.3. 代数的同态

定义: 设 A, B 为两个 k -代数, 映射 $f: A \rightarrow B$ 称为一个同态如果

$$\textcircled{1} f(a+b) = f(a) + f(b), a, b \in A$$

$$\textcircled{2} f(\lambda a) = \lambda f(a), \lambda \in k, a \in A;$$

$$\textcircled{3} f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in A.$$

$$\textcircled{4} f(1) = 1.$$

问题: 群同态为什么不要求保持单位元? (因为已经满足了).

例子: 1) $\text{End}(V) \rightarrow M_n(k); A \mapsto A$. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基. $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)A$.

2) 群同态 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$. φ 扩充为一个群代数 $kG_1 \rightarrow kG_2$ 之间的代数同态.
 $\varphi: kG_1 \rightarrow kG_2, \sum \lambda_g g \mapsto \sum \lambda_g \varphi(g)$.

问题: 群代数之间的同态是不是都是由群同态给出?

例: $k\mathbb{Z}_2 = \text{span}\{\frac{1}{2}(1+g), \frac{1}{2}(1-g)\}$ 易见 $e_0 = \frac{1}{2}(1+g), e_1 = \frac{1}{2}(1-g)$. $e_0^2 = e_0, e_1^2 = e_1, e_0e_1 =$

$$e_1e_0 = 0. \begin{array}{c|cc} & e_0 & e_1 \\ \hline e_0 & e_0 & 0 \\ e_1 & 0 & e_1 \end{array} \quad \varphi: k\mathbb{Z}_2 \rightarrow k\mathbb{Z}_3, \quad e_1 \mapsto \frac{1}{3}(1+\omega h + \omega^2 h^2), e_0 \mapsto 1 - \frac{1}{3}(1+\omega h + \omega^2 h^2)$$

$$g = e_0 - e_1 \mapsto 1 - \frac{2}{3}(1+\omega h + \omega^2 h^2)$$

定义: k -代数 A, B 称为同构的如果 $\exists$ 一个代数同态 $\varphi: A \rightarrow B$ 且 φ 是双射. 记为 $A \cong B$.

说明: 如果 φ 是一个双射, 且 φ 是代数同态 (φ 称为代数同构). 则 φ^{-1} 也是代数同构.

3) 群同构给出群代数之间的同构.

问题: 如果两个有限群 G_1, G_2 的群代数是同构的. i.e., $kG_1 \cong kG_2$. 那么 $G_1 \cong G_2$?

一般不正确. 有不少情况下是正确的: $k = \mathbb{C}, \text{char } k = 0, G_1$ 是交换的. 则正确.

同态基本定理: 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 为一个代数同态. 则:

1) $\text{Im } \varphi = \{b \in B \mid \exists a \in A, \text{ s.t. } \varphi(a) = b\}$ 是 B 的子代数;

2) $\text{Ker } \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ 是 A 的理想.

$$3) A/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi.$$

补充: 大家尝试去定义左理想, 右理想. ($RI \subset I, IR \subset I$)

2. 模

2.1. 模的定义和例子

定义: 设 R 为 σ -环, M 为 σ -加群. M 称为 σ -左 R -模 如果存在映射:

$$R \times M \rightarrow M \quad (r, m) \mapsto r \cdot m \quad \text{满足}$$

$$1) \quad (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m;$$

$$2) \quad (r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m);$$

$$3) \quad r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2;$$

$$4) \quad 1 \cdot m = m, \quad \begin{matrix} m, m_1, m_2 \in M \\ r, r_1, r_2 \in R. \end{matrix}$$

• 类似地, σ -定义右 R -模. $m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

定义: 设 R 为 σ -环. 定义 σ -新环 R^{op} : 1) 作为加群, $R^{\text{op}} = R$. 2) $a \circ b := ba$

反环.

说明: 1) M 是 σ -左 R $\Leftrightarrow M$ 是右 R^{op} -模.

$$''\Rightarrow'' \quad R \times M \rightarrow M, (r, m) \mapsto r \cdot m.$$

$$M \times R^{\text{op}} \rightarrow M, (m, r) \mapsto m \circ r := r \cdot m \quad ''\Leftarrow'' \quad (R^{\text{op}})^{\text{op}} = R.$$

2) 如果 R 是交换的, 则左 R -模就是右 R -模.

例. 1) $\mathbb{Z}$: 环. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是 σ -加群. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, (m, \bar{m}_1) \mapsto \overline{m m_1}$.

2) R 是自身的模. $R \times R \rightarrow R$. 自身的乘法. **正则模.** —

3) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (z, \frac{p}{q}) \mapsto z \frac{p}{q}$.

4) 令 I 是 R 的右理想. $R \times R/I, (r, \bar{r}_1) \mapsto \overline{r r_1}$. **例: 正则模.**

反例: $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -模吗?

不是. 如果是, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$. $\bar{1} \cdot 1 = 1 \pmod{n}$. $\bar{n} \cdot 1 = (\underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1}}_n) \cdot 1 = \bar{1} \cdot 1 + \bar{1} \cdot 1 + \dots + \bar{1} \cdot 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

但 $\bar{n} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\therefore \bar{n} \cdot 1 = \bar{0}$. ζ

商环是环的商, 但反环不真.

定义: 设 R, S 是 σ -环. M 称为 R - S -双模 如果

1) M 是左 R -模; 2) M 是右 S -模; 3) $(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s), \quad r \in R, s \in S, m \in M$.

2.2. 子模, 商模.

定义: 设 M 是 σ -左 R -模. $N \subset M$ 是 σ -加群. N 称为 σ -子模 如果 $\forall n \in N, r \in R$, 有

$$r \cdot n \in N.$$

2) 设 $N \subset M$ 是 $\mathbb{Z}$ -子模. M/N 为商加群. 则 M/N 上也有 $\mathbb{Z}$ -模结构.

$$R \times M/N, (r, \bar{m}) \mapsto \overline{r \cdot m}.$$

由上述作用下形成的模称为 M 的 $\mathbb{Z}$ -商模.

例

1) $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ -子模. 因而 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ -商模.

2) 左理想 I 对 R 就是 $\mathbb{Z}$. 则左 R -模的子模. I 是 $\mathbb{Z}$ -左理想. 则 R/I 就是 R -商模.

定义

称 $\mathbb{Z}$ -非 0 的左 R -模总不可约 (irreducible) 如果 M 无非平凡的子模.

其中, $0, M$ 称为平凡子模.

例

$\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模不是不可约的. $n\mathbb{Z}$ 是非平凡子模.

$n\mathbb{Z}$ 是否 irreducible? $\times$ ($m n\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is irreducible? 不是. $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ ($t \geq 1$). 则 $p_1 \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

令 p 为素数. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ irreducible? $\checkmark$ (令 $N \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为非平凡子模. $\exists \bar{0} \neq \bar{i} \in N$. $\therefore \bar{i}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中 i 的陪集. $\therefore \exists t \in \mathbb{Z}$ s.t. $t \cdot i = \bar{j} \in N$. $\forall j \in \mathbb{Z}$. $\exists \bar{j} \in N$)

$$((i, p) = 1 \Leftrightarrow \begin{aligned} & \exists t, s \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } ti + sp = 1 \\ & \Rightarrow \overline{ti + sp} = \overline{ti} = \bar{1} \end{aligned})$$

$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 不是不可约的. $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

2.3. 模的直和. 不可分解模.

定义: 设 M_1, M_2 为 $\mathbb{Z}$ -左 R -模 (module). M_1 与 M_2 的直和 (direct sum) 定义为:

1) 作为加群. $M_1 \oplus M_2 = \{ m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 \}$. $(m_1 + m_2) + (m'_1 + m'_2) = (m_1 + m'_1) + (m_2 + m'_2)$
 2) $r \cdot (m_1 + m_2) := r \cdot m_1 + r \cdot m_2$. $r \in R$. $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$.

定义: 设 M_1, M_2 是 $\mathbb{Z}$ -左 R -模. 映射 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 称为 $\mathbb{Z}$ -模同态.

如果 1) $f(m_1 + m'_1) = f(m_1) + f(m'_1)$; 2) $f(r \cdot m_1) = r \cdot f(m_1)$. $r \in R, m_1, m'_1 \in M_1$.

说明:

类似地, 亦可定义同构. $M_1 \cong M_2$.

定义: 左 R -模 M 称为不可分解的 (indecomposable) 如果 M 不能成为两个真子模的直和.

2.4. 不可分解模与不可约模的关系.

按照定义, 不可约模都是不可分解的. **问题: 反过来如何?**

例: 不可分解的例子. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (Chinese Remainder).
是否是模的真分解?

引理: Abel 群同态 = $\mathbb{Z}$ -模同态. ($f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 abel 群同态, $21 + m \in \mathbb{Z}$.

$$m_1 \in M_1, f(m \cdot m_1) = f(\underbrace{m_1 + \dots + m_1}_m) \\ = f(m_1) + \dots + f(m_1) = m f(m_1))$$

$\therefore \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Claim: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ is indecomposable! 如果 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 是可分解的, 则 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的真子模只能含有 2 个元素. (子模一定是子群)

$\therefore$ 真子模作为加群只能同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 故 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作为加群. 但这是不可能的.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 不是不可约的. 因为 $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

结论: 不可约模一定是不可分解的. 但反之不真.

目标: 给定一个模, 它是由哪些“细胞”组成的?
这些“细胞”就是不可约和不可分解模.

$$\{\text{不可约模}\} \subset \{\text{不可分解模}\}.$$

定义: 一个模称为完全可约的, 如果它可以写成不可约模的真和.

作业: 建立模同态的基本定理.

2) 给出 = 两个群 D_{2n} 的生成元和关系.