

模论与表示论初步第三讲

回顾: 代数定义. 例子. 子代数商代数. 代数同态

模. 不可约. 不可分解模.

术语: 有时会将不可约模也称为单模 (simple).

2.4. 正合列 (exact sequence).

定义. 设 R 为环. M_1, M_2, M_3 都是 R -模. 序列

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \rightarrow 0$$

其中 i, π 都是模同态. 上述序列称为正合列如果

1) i 是单射;

2) π 是满射;

3) $\text{Ker } \pi = \text{Im } i$.

说明: ① 3) $\text{Ker } i = 0 = \text{Im } f_1, \text{Ker } f_2 = \text{Im } \pi$.

② $\pi: M_2 \rightarrow M_3, M_2 / \text{Ker } \pi \cong \text{Im } \pi = M_3$.

$$\text{Ker } \pi = \text{Im } i \cong M_1$$

$$M_2 / M_1 \cong M_3!$$

$$M_2 \sim \begin{matrix} \text{Im } i \\ \text{Ker } \pi \end{matrix} \xrightarrow{\pi} M_3$$

应用: 任取一模块 (有限性) M . 取最小的子模 M_1 . 即 M_1 是 simple.

形成 $0 \rightarrow M_1 \hookrightarrow M$, 构造商模 M/M_1 . $0 \rightarrow M_1 \hookrightarrow M \rightarrow M/M_1 \rightarrow 0$

继续考虑 M/M_1 的最小子模 M_2 . $0 \rightarrow M_2 \hookrightarrow M/M_1 = M' \rightarrow M'/M_2 \rightarrow 0$.

如果 M'/M_2 simple. 就说明 M' 是由单模 M_2 与 M'/M_2 形成的.

进而原来的 M 也是由单模组成的. $M \begin{cases} M_1 \\ \downarrow \\ M'/M_2 \\ \downarrow \\ M_2 \end{cases}$

如果 M'/M_2 不是单模. 继续上述的步骤即可.

总结: 单群是如何形成有限群的. (1-阶与同调群. $\text{Ext}'(-, -)$)

例. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模不是单模. $\because 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 是一个子模. 也是一个单模.

模. $\therefore$ 可以形成一个正合列

$$0 \rightarrow 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \leftarrow \begin{matrix} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{matrix}$$

再构造一个正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad i(x) = (x, 0), \quad \pi(x, y) = y$$

平凡正合列 (可裂正合列, split exact sequence)

图: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2.5. 代数上的模

例: 如果将 R 加域. 则 $R = k$ 上的模是什么?

M 是一个 k -模. M 上有加法. $k \times M \rightarrow M$ 数乘
 $(\lambda, m) \mapsto \lambda m$

M 就是一个 k -线性空间

定义. 设 A 为一个 k -代数 (代数 = 环 + 线性空间). $k \cdot 1_A \hookrightarrow A$

线性空间 V 称为一个 A -模. 如果存在“作用”:

$$A \times M \rightarrow M, (a, m) \mapsto am. \text{ 满足}$$

$$1) (a+b)m = am + bm;$$

$$2) (ab)m = a(bm)$$

$$3) (ka)m = k(am)$$

$$4) a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2;$$

$$5) a(km) = k(am);$$

$$6) 1_A \cdot m = m. \quad \forall m, m_1, m_2 \in M, a, b \in A, k \in k.$$

例: 1) A 是左 A 模. $A \curvearrowright A$. 正则模.

2) $A = k\mathbb{Z}_2$. $A \curvearrowright A$. $\mathbb{Z}_2 = \{1, g\}$. $A = k \cdot 1 + k \cdot g = V$

$$1 \cdot (1, g) = (1, g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1)$$

$$g \cdot (1, g) = (g, 1) = (1, g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (12)$$

定义 一个模称为忠实 (faithful) 的. 如果 $a \cdot M = 0$, 则 $a = 0$.

例: 所有的正则模都是忠实的. $A \curvearrowright A$. $aA = 0 \Rightarrow a \cdot 1_A = a = 0$.

例: 自行去因子模商模. 模同态. 不可约. 不可约. 正合列 (对于代数和模).

§3. 代表的表示.

3.1. 表示的定义和例子

定义. 设 A 为 k -代数. $\sigma = \text{之值}$ (V, ρ) 称为 A 的 σ 表示. (Representation)

如果我们:

1) V 是 σ k -线性空间

2) $\rho: A \rightarrow \text{End}_k(V)$ 是 σ 代数同态.

有时, 就简称为 V 或 ρ 为 A 的 σ 表示.

说明 1) $\rho: A \rightarrow \text{End}_k(V)$ 就是 A 中的元素 a , 在 ρ 的作用下成了线性变换.

A 就有了一种具体的实现方式.

2) 在相对较好的条件下. 表示可以给出 A 的所有信息.

例: 1) $k\mathbb{Z}_2 \rightarrow M_2(k) \cong \text{End}_k(V)$. $V = k \cdot 1 + k \cdot g$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

$$V = \text{Span}\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

$$kG \rightarrow \text{End}_k(V), \quad g_i \mapsto g_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{pmatrix} g_i g_1 & g_i g_2 & \dots & g_i g_n \end{pmatrix} \\ = (g_1, \dots, g_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

定义: A 的表示 (V, ρ) 称为忠实如果 ρ 是单射.

$$A \hookrightarrow \text{End}_k(V).$$

3.2 模与表示的关系

定理: 设 A 为 k -代数. V 是 A 的表示 $\Leftrightarrow V$ 是 A -模.

证明: " $\Rightarrow$ " $\exists$ 代数同态 $\rho: A \rightarrow \text{End}_k(V)$.

$$A \times V \rightarrow V, (a, v) \mapsto a \cdot v := \rho(a)(v).$$

- $(a+b) \cdot v = \rho(a+b)(v) = (\rho(a) + \rho(b))(v) = \rho(a)(v) + \rho(b)(v) = a \cdot v + b \cdot v;$
- $(ka) \cdot v = \rho(ka)(v) = k(\rho(a)(v)) = k(a \cdot v);$
- $(ab) \cdot v = \rho(ab)(v) = (\rho(a)\rho(b))(v) = \rho(a)(\rho(b)(v)) = a \cdot (b \cdot v);$
- $a \cdot (v_1 + v_2) = \rho(a)(v_1 + v_2) = \rho(a)(v_1) + \rho(a)(v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2;$
- $a \cdot (kv) = \rho(a)(kv) = k\rho(a)(v) = k(a \cdot v).$
- $1_A \cdot v = \rho(1_A)(v) \xrightarrow{\text{恒等变换}} \text{id}(v) = v.$

$\Leftarrow$ 设 V 是 A -模.

$$\rho: A \rightarrow \text{End}_k(V), \quad \rho(a)(v) := a \cdot v, \quad v \in V, a \in A.$$

证: 这确实给出表示.

例: 子表示, 商表示, 表示的同态, 不可约表示, 不可分解表示, 正合列.

子表示: (V, ρ) -表示. 子空间 $W \subset V$ 子空间称为子表示如果

$$\forall a \in A, \text{ 都有 } \rho(a)(W) \subset W.$$

令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 为 W 的一组基. q 扩充成为 V 的一组基

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n.$$

$$\rho(a)(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

何时准对角?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

$$\rho(a)(\text{span}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)) \subset \text{span}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$$

即 $\text{span}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ 也是子表示. $V = W \oplus \text{span}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$

即 V 为表示的直和.

例: $k\mathbb{Z}_2 \curvearrowright k\mathbb{Z}_2$. 此表示是否不可约? $W = k \cdot (1+g)$.

$$\forall a \in k\mathbb{Z}_2, \rho(a)(W) \subset W.$$

$$a = k_1 \cdot 1 + k_2 g. \quad \rho(a)(1+g) = (k_1 \cdot 1 + k_2 g)(1+g) =$$

$$k_1(1+g) + k_2 g(1+g) = k_1(1+g) + k_2(1+g) = (k_1 + k_2)(1+g).$$

Char $k \neq 2$.

$$W_1 := \text{span}(1-g). \quad g \cdot (1-g) = g - 1 = -(1-g).$$

$$\rho(a)(1-g) = (k_1 - k_2)(1-g)$$

$\therefore W_1$ 也是子表示. $k\mathbb{Z}_2 = W_1 \oplus W_2$.

$$\rho(a)(1+g, 1-g)$$

$$\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= (1+g, 1-g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

问题: 群代数的不可分解表示是否均不可约?

练习: 定理: 表示 V 是忠实 $\Leftrightarrow V$ 作为模是忠实.

证明: 表示忠实 $\Leftrightarrow \rho: A \rightarrow \text{End}_K(V)$ 单 $\Leftrightarrow " \rho(a) = 0 \Rightarrow a = 0 "$

$\Leftrightarrow " \rho(a)(V) = 0 \Rightarrow a = 0 "$

$\Leftrightarrow \underline{a \cdot V = 0 \Rightarrow a = 0} \Leftrightarrow V \text{ 作为模忠实.}$

推论: $A \xrightarrow{\rho} \text{End}_K(A) \cong M_n(K) \quad (\text{if } \dim A = n)$