

模论与表示论初阶 第四讲

正合列. 代数的表示. 模 \Leftrightarrow 表示 $a \in A, m \in M, \boxed{a \cdot m = \rho(a)(m)}$ $\rho: A \rightarrow \text{End}(M)$

§4. 张量积 (Tensor Product)

4.1. 定义. 例子.

假设 R 是环. ${}_R M$ 表示左 R -模. N_R 表示右 R -模.

定义: 令 $\langle N \times M \rangle$ 表示由 $N \times M$ 生成的自由 Abelian 群. 考虑由下面三组元素生成的子群:

① $(n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m)$ *Abelian 群自身的加法. N 里的加法.*

② $(n, m_1 + m_2) - (n, m_1) - (n, m_2)$

③ $(n \cdot r, m) - (n, r \cdot m)$ $n_1, n_2, n \in N, r \in R, m_1, m_2, m \in M$

则 N_R 与 ${}_R M$ 的张量积. 记为 $N \otimes_R M$, 定义为 $\langle N \times M \rangle / \langle \text{上述三组元素} \rangle$.

说明: ① 张量积是 Abelian 群

② 如果 ${}_S N_R$ 是 S - R -双模. 则 $N \otimes_R M$ 是左 S -模. 一会再介绍这种模结构.

同理, 如果 ${}_R M_S$ 是 R - S -双模. $N \otimes_R M$ 也是右 S -模.

③ $\pi: \langle N \times M \rangle \rightarrow N \otimes_R M$ 自然同态. 记 $\pi(n \times m) := n \otimes m$.

④ $\pi((n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m)) = (n_1 + n_2) \otimes m - n_1 \otimes m - n_2 \otimes m = 0 \iff (n_1 + n_2) \otimes m = n_1 \otimes m + n_2 \otimes m$

类似地, $n \otimes (m_1 + m_2) = n \otimes m_1 + n \otimes m_2$

$n \cdot r \otimes m = n \otimes r \cdot m$. 一般地说, $N \otimes_R M$ 中的元素的样子: $\sum_i n_i \otimes m_i, n_i \in N, m_i \in M$

例: ① $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \sum_i a_i \otimes b_i, a_i, b_i \in \mathbb{Z}$

$= \sum_i 1 \cdot a_i \otimes b_i = \sum_i 1 \otimes a_i \cdot b_i = \sum_i 1 \otimes a_i b_i = 1 \otimes \sum_i a_i b_i = 1 \otimes a \in \mathbb{Z}$

claim: $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. $\varphi: \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \sum a_i \otimes b_i \mapsto \sum a_i b_i$ $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}, a \mapsto 1 \otimes a$ *why φ is well-defined?*

only need to prove $\varphi(\text{三组元素}) = 0$.

很容易证明 $\varphi \circ \psi = \text{Id}, \psi \circ \varphi = \text{Id}$.

② $\boxed{R \otimes_R R \cong R}$ 当作习题.

③ $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \boxed{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}}$ (m,n) 最大公约数.

证明. 任取左 Abelian 群 M . M 都可以看成 \mathbb{Z} -模.

$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong M$ (证明完全类似于①). $\varphi(M \otimes_{\mathbb{Z}} n\mathbb{Z}) = nM$

$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong M/nM$

$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$

④ $\boxed{\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = 0}$ $p \otimes a \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, p \otimes a = \frac{p}{m} \otimes a = \frac{p}{m} \otimes m \cdot \frac{a}{m} = \frac{p}{m} \otimes 0 = 0$

4.2. 张量积的基本性质.

① 泛性质. (Universal property).

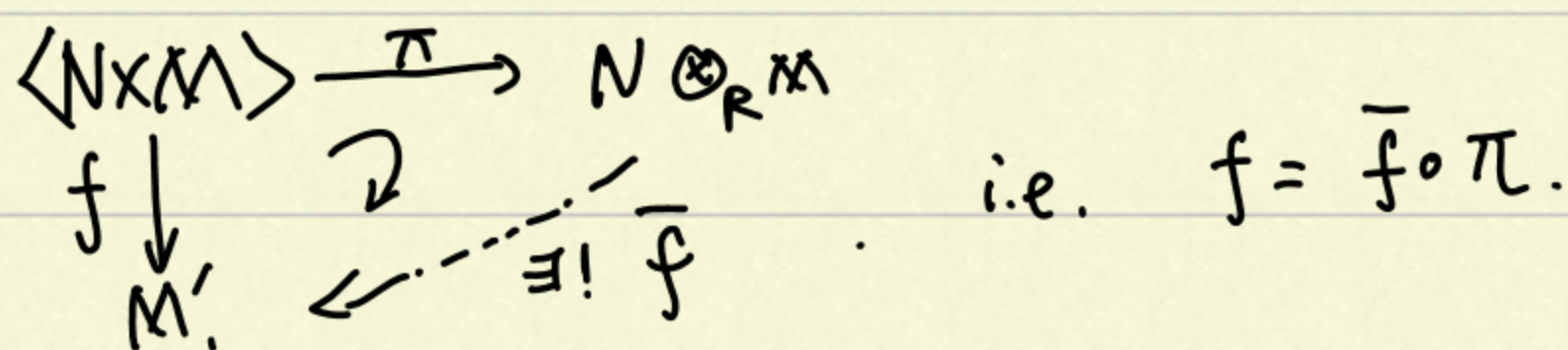
定义: 平衡双线性映射 (balanced bilinear).

$f: \langle N \times M \rangle \rightarrow M'$. 这里 N, R, M, M' 是 R -Abel 群

称为平衡双线性的如果. ① $f(n_1+m_2, m) = f(n_1, m) + f(n_2, m)$ ② $f(n, m_1+m_2) = f(n, m_1) + f(n, m_2)$

③ $f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n)$. $n_i, n \in N, m_i, m \in M, r \in R$.

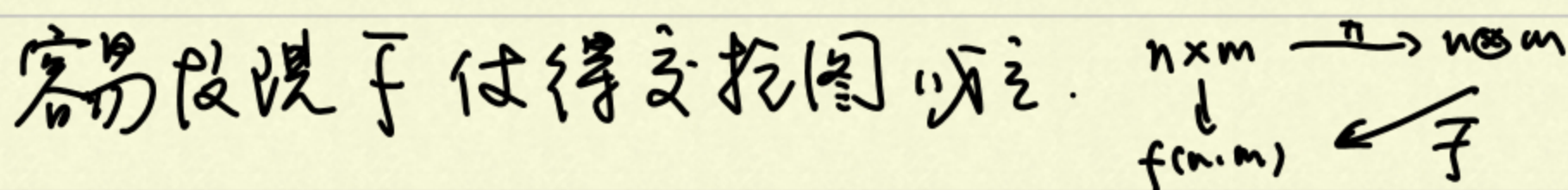
定理: 对任意的从 $\langle N \times M \rangle$ 到 M' 的平衡双线性映射, 都存在唯一的加群 \bar{f} s.t. 下述交换图成立:



• 如果存在另外一 Abel 群 L 也满足上述性质, 则 $L \cong N \otimes_R M$.

证明: 定义 $\bar{f}: N \otimes_R M \rightarrow M', \sum_i n_i \otimes m_i \mapsto \sum_i f(n_i, m_i)$.

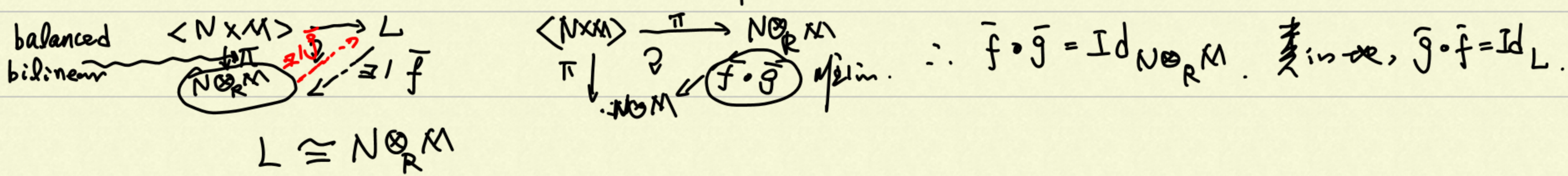
Well-defined $\Leftrightarrow \bar{f}(\text{三变之零}) = 0 \Leftrightarrow \text{balanced bilinear}$.



下证 \bar{f} 的唯一性: 如果 \bar{f}' 也使得交换图成立. $\therefore \bar{f}'(n \otimes m) = \bar{f}'(\pi(n, m)) = f(n, m) = \bar{f}(n \otimes m)$.

$\therefore \bar{f}' = \bar{f}$.

• 令 L 为另外一满足上述性质的 Abel 群.



引理 1: R 环. R -模 $M, R \otimes_R M \cong M$.

证明: $R \otimes_R M \rightarrow M, \sum r_i \otimes m_i \mapsto \sum r_i \cdot m_i; M \rightarrow R \otimes_R M, m \mapsto 1 \otimes m$.

引理 2: $(M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \cong M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N$. (张量积保持直和)

M_1, M_2 是右 R -模. N 是左 R -模.

证明: $\varphi: (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \rightarrow M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N, (m_1+m_2) \otimes n \mapsto m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

$\bar{\varphi}: M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N \rightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N$. $i_1: M_1 \otimes_R N \hookrightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N$

$\bar{\varphi} := i_1 + i_2$

$i_2: M_2 \otimes_R N \hookrightarrow (M_1 \oplus M_2) \otimes_R N$

定理3: $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_S M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_S M_3)$.

证明: $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$

说明: ① 一般没有“交换律”. $(M_1 \otimes_R M_2, M_2 \otimes_R M_1)$ 需要同义.

② 在 $M_1 \otimes_S M_2$ 中. 如果 M_1 是 R - S -双模. 则 $M_1 \otimes_S M_2$ 成为左 R -模:

$$\forall r \in R. r \cdot (\sum_i m_1^i \otimes m_2^i) := \sum_i r \cdot m_1^i \otimes m_2^i.$$

4.3. 线性空间上的张量积.

令 k 是域. V_1, V_2 是 k -空间. 所以可以定义张量积:

$$V_1 \otimes_k V_2. \quad (\text{通常记为 } V_1 \otimes V_2)$$

• $V_1 \otimes V_2$ 是 k -加群. 同时也是 k -线性空间. (这是因为 V_1, V_2 都是 k - k -双模).

• 什么是 balanced bilinear map? $f: \langle V_1 \times V_2 \rangle \rightarrow V_3$

$$① f(v+v', v_2) = f(v, v_2) + f(v', v_2)$$

$$② f(v_1, v_2+v_2') = f(v_1, v_2) + f(v_1, v_2')$$

$$③ f(v_1, \lambda v_2) = f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2)$$

$$\text{bilinear map: } ① + ② + f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2) = f(\lambda v_1, v_2)$$

推论: 对于任意的 双线性映射 $f: \langle V_1 \times V_2 \rangle \rightarrow V_3$, $\exists!$ 一个 线性映射 $\bar{f}: V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_3$.

令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 为 V_1 的基. β_1, \dots, β_n 为 V_2 的基.

命题: $\{\alpha_i \otimes \beta_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $V_1 \otimes V_2$ 的基.

证明: 由张量积的基本性质. $R \otimes_R M \cong M$. 特别地. $k \otimes_k V \cong V$. 同样的. 取 n -维空

间, $k\alpha$. 则 $k\alpha \otimes V \cong V$.

$$\text{现在, } V_1 \otimes V_2 = (k\alpha_1 + \dots + k\alpha_m) \otimes V_2 = (k\alpha_1 \oplus \dots \oplus k\alpha_m) \otimes V_2$$

$$\cong (k\alpha_1 \otimes V_2) \oplus (k\alpha_2 \otimes V_2) \oplus \dots \oplus (k\alpha_m \otimes V_2) \cong V_2 \oplus \dots \oplus V_2$$

$$\therefore \dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$$

∴ 现在只需证 $V_1 \otimes V_2$ 中任意元素均可由 $\{\alpha_i \otimes \beta_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 线性表示即可.

事实上, $\forall \alpha \otimes \beta \in V_1 \otimes V_2, \alpha \in V_1, \beta \in V_2$.

$$\therefore k_1 \dots k_m, l_1 \dots l_n \in k. \text{ s.t. } \alpha = k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m. \quad \beta = l_1 \beta_1 + \dots + l_n \beta_n.$$

$$\therefore \alpha \otimes \beta = (\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i) \otimes (\sum_{j=1}^n l_j \beta_j) = \sum_{i,j} k_i l_j \alpha_i \otimes \beta_j. \quad \square$$