模论与表示论初步 第四讲

正合列. 代数的表示. 模 $\Leftrightarrow$ 表示. $a\in A$. $m\in M$. $\boxed{a\cdot m=\rho(a)(m)}$ $\rho: A\to \mathrm{End}(M)$

§4. 张量积 (Tensor Product).

4.1. 定义. 例子.

假设 R 是一个环. ${}_RM$ 表示一个左 R-模. N_R 表示一个右 R-模.

定义: 令 $\langle N\times M\rangle$ 表示由 $\underset{\text{集合}}{\underline{N\times M}}$ 生成的自由 Abel 群. 考虑由下面三类元素生成的子群:

① $(n_1+n_2, m)-(n_1,m)-(n_2,m)$ Abel群自身的加法. N里的加法.

② $(n, m_1+m_2)-(n,m_1)-(n,m_2)$.

③ $(n\cdot r, m)-(n, r\cdot m)$ $n_1,n_2,n\in N$. $r\in R$. $m_1,m_2,m\in M$.

则 N_R 与 ${}_RM$ 的张量积, 记为 $N\otimes_R M$, 定义为 $\langle N\times M\rangle / \langle\text{上述三类元素}\rangle$.

说明: ① 张量积是一个 Abel 群

② 如果 ${}_SN_R$ 是一个 S-R-双模. 则 $N\otimes_R M$ 是一个左 S-模. 一会儿我们给这种模结构.

同理, 如果 ${}_RM_S$ 是一个 R-S-双模. $N\otimes_R M$ 也会一个右 S-模.

③ $\pi: \langle N\times M\rangle \longrightarrow N\otimes_R M$ 自然的满同态. 记 $\pi(n\times m):=\underline{n\otimes m}$.

④ $\pi\big((n_1+n_2,m)-(n_1,m)-(n_2,m)\big)=(n_1+n_2)\otimes m-n_1\otimes m-n_2\otimes m=0 \iff (n_1+n_2)\otimes m=n_1\otimes m+n_2\otimes m$

类似地, $n\otimes(m_1+m_2)=n\otimes m_1+n\otimes m_2$

$n\cdot r\otimes m=n\otimes r\cdot m$. 一般来说, $N\otimes_R M$ 中的元素的样子: $\sum_i n_i\otimes m_i$. $n_i\in N$, $m_i\in M$. $\cancel{n\otimes m}$

例: ① $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. $\sum_i a_i\otimes b_i$ $a_i, b_i\in\mathbb{Z}$

$=\sum_i 1\cdot a_i\otimes b_i=\sum_i 1\otimes a_i\cdot b_i=\sum_i 1\otimes a_ib_i = 1\otimes \underbrace{\sum a_ib_i}_{=a\in\mathbb{Z}}$

Claim: $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$. $\varphi: \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$, $\sum a_i\otimes b_i\longmapsto\sum a_ib_i$ $\Phi: \mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$, well-defined $a\longmapsto 1\otimes a$. why φ is well-defined?

Only need to prove $\varphi(\text{三类元素})=0$.

很容易证明 $\varphi\circ\Phi=\mathrm{Id}$. $\Phi\circ\varphi=\mathrm{Id}$.

② $\boxed{R\otimes_R R\cong R.}$ 当作习题.

③ $\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}}$ (m,n) 最大公约数.

证明. ·任取一个 Abel群 M. M 都可以看成 $\mathbb{Z}$-模.

$M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\overset{\varphi}{\cong}M$, $\sum m_i\otimes a_i\mapsto\sum m_i\cdot a_i$ (证明完全类似于①). $\varphi(M\otimes_{\mathbb{Z}}n\mathbb{Z})=nM$

· $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong M/nM$

· $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}$.

④ $\boxed{\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=0}$ $p\otimes a\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $p\otimes a=\frac{p}{m}m\otimes a=\frac{p}{m}\otimes \underline{m\cdot a}=\frac{p}{m}\otimes 0=0$.

4.2. 张量积的基本性质.

① 泛性质.(Universal property).

定义: 平衡双线性映射 (balanced. bilinear).

$f: \langle N\times M\rangle \longrightarrow M'$. 这里 N_R. ${}_RM$. M'是-个Abel群

称为平衡双线性的,如果. ① $f(n_1+n_2, m) = f(n_1,m)+f(n_2,m)$. ② $f(n, m_1+m_2) = f(n,m_1)+f(n,m_2)$

③ $f(m\cdot r, n) = f(m, r\cdot n)$. $n_i, n\in N$. $m_i, m\in M$. $r\in R$.

定理: • 对任意的从$\langle N\times M\rangle$到M'的平衡双线性映射, 都存在唯一的加群 $\underbrace{\bar{f}}_{N\otimes_R M\to M'}$ s.t. 下述交换图成立:

$$\begin{tikzcd} \langle N\times M\rangle \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & N\otimes_R M \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\bar{f}"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

i.e. $f = \bar{f}\circ\pi$.

• 如果存在另外-个Abel群 L. 也满足上述性质, 则 $L \cong N\otimes_R M$.

\证明: • 定义 $\bar{f}: N\otimes_R M \to M'$. $\sum_i n_i\otimes m_i \longmapsto \sum_i f(n_i, m_i)$.

Well-defined $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$(三类元素)$=0$ $\Leftrightarrow$ balanced. bilinear.

容易验证 $\bar{f}$ 使得交换图成立.

$$\begin{tikzcd} n\times m \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & n\otimes m \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ f(n,m) & \end{tikzcd}$$

下证 $\bar{f}$ 的唯一性: 如果 $\bar{f}'$ 也使得交换图成立. $\therefore$ $\bar{f}'(n\otimes m) = \bar{f}'(\pi(n,m)) = f(n,m) = \bar{f}(n\otimes m)$.

$\therefore$ $\bar{f}' = \bar{f}$.

• 令 L 为另外一个满足上述性质的Abel群.

$$\begin{tikzcd} \langle N\times M\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & L \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\bar{f}"] \\ N\otimes_R M \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"] & \end{tikzcd}$$

balanced bilinear

$L \cong N\otimes_R M$

$$\begin{tikzcd} \langle N\times M\rangle \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & N\otimes_R M \arrow[dl, "\bar{f}\cdot\bar{g}"] \\ N\otimes M & \end{tikzcd}$$

唯一. $\therefore$ $\bar{f}\circ\bar{g} = Id_{N\otimes_R M}$. 类似地, $\bar{g}\circ\bar{f} = Id_L$.

引理1: R 环. ${}_RM$. $R\otimes_R M \cong M$.

\证明: $R\otimes_R M \longrightarrow M$, $\sum r_i\otimes m_i \mapsto \sum r_i\cdot m_i$; $M \longrightarrow R\otimes_R M$, $m \mapsto 1\otimes m$.

引理2: $(M_1\oplus M_2)\otimes_R N \cong M_1\otimes_R N \oplus M_2\otimes_R N$. (张量积保直和).

M_1, M_2 是右R-模. N是左R-模.

\证明: φ: $(M_1\oplus M_2)\otimes_R N \longrightarrow M_1\otimes_R N \oplus M_2\otimes_R N$, $(m_1+m_2)\otimes n \mapsto m_1\otimes n + m_2\otimes n$

Φ: $M_1\otimes_R N \oplus M_2\otimes_R N \longrightarrow (M_1\oplus M_2)\otimes_R N$. i_1: $M_1\otimes N \hookrightarrow (M_1\oplus M_2)\otimes N$

$\Phi := i_1 + i_2$ i_2: $M_2\otimes N \hookrightarrow (M_1\oplus M_2)\otimes_R N$

引理3: $(M_1\otimes_R M_2)\otimes_S M_3 \cong M_1\otimes_R(M_2\otimes_S M_3)$.

证明: $(m_1\otimes m_2)\otimes m_3 \longmapsto m_1\otimes(m_2\otimes m_3)$

说明: ① 一般没有"交换律". ($M_1\otimes M_2$, $M_2\otimes M_1$ 未必可以同时定义).

② 在 $M_1\otimes_S M_2$ 中. 如果 M_1 是一个 R-S-双模. 则 $M_1\otimes_S M_2$ 可以成为左 R-模:

$\forall r\in R.\quad r\cdot(\sum_i m_1^i\otimes m_2^i) := \sum_i r\cdot m_1^i\otimes m_2^i$.

4.3. 线性空间的张量积.

令 k 是一个域. V_1. V_2 是两个 k-空间. 所以一定可以定义张量积:

$V_1\otimes_k V_2$. (通常记为 $V_1\otimes V_2$)

- $V_1\otimes V_2$ 是一个加群. 同时也是一个线性空间.(这是因为 V_1. V_2 都是 k-k-双模).
- 什么是 balanced bilinear map? $f: \langle V_1\times V_2\rangle \longrightarrow V_3$

① $f(v_1+v_1', v_2) = f(v_1, v_2)+f(v_1', v_2)$

② $f(v_1, v_2+v_2') = f(v_1, v_2)+f(v_1, v_2')$.

③ $f(v_1\lambda, v_2) = f(v_1, \lambda v_2) = f(\lambda v_1, v_2)$

bilinear map: ① + ② + $f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2) = f(v_1, \lambda v_2)$

推论: 对于任意的双线性映射 $\langle V_1\times V_2\rangle \to V_3$, $\exists!$ 的线性映射 $\bar{f}$: $V_1\otimes V_2 \to V_3$.

令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 为 V_1 的一组基. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 为 V_2 的一组基.

命题: $\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ 是 $V_1\otimes V_2$ 的一组基.

证明: 由张量积的基本性质. $R\otimes_R M\cong M$. 特别地, $k\otimes_k V\cong V$. 同样的, 取一个一维空间, $k\alpha$. 则 $k\alpha\otimes V\cong V$.

现在, $V_1\otimes V_2 = (k\alpha_1+\dots+k\alpha_m)\otimes V_2 = (k\alpha_1\oplus\dots\oplus k\alpha_m)\otimes V_2$

$\cong (k\alpha_1\otimes V_2)\oplus(k\alpha_2\otimes V_2)\oplus\dots\oplus(k\alpha_m\otimes V_2) \cong V_2\oplus\dots\oplus V_2$

$\therefore \dim V_1\otimes V_2 = \dim V_1\cdot\dim V_2$

$\therefore$ 现在只需证 $V_1\otimes V_2$ 中任意一个元素均可由 $\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le m\ 1\le j\le n\}$ 线性表出即可.

事实上, $\forall\ \alpha\otimes\beta\in V_1\otimes V_2$. $\alpha\in V_1$. $\beta\in V_2$.

$\therefore k_1 \dots k_m.\ l_1 \dots l_n\in k$. s.t. $\alpha = k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m$. $\beta = l_1\beta_1+\dots+l_n\beta_n$.

$\therefore \alpha\otimes\beta = (\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i)\otimes(\sum_{j=1}^n l_j\beta_j) = \sum_{i,j} k_il_j\,\alpha_i\otimes\beta_j$. □