模论与表示论初步 第五讲

回顾：张量积. V, W. $V=\mathrm{span}\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$. $W=\mathrm{span}\{\beta_1\cdots\beta_m\}$. $V\otimes_k W=\mathrm{span}\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\}$.

$\pi: \langle V\times W\rangle \longrightarrow V\otimes_k W$
$(\alpha_i,\beta_j)\longmapsto \alpha_i\otimes\beta_j$

第二章. 群表示初步

§1. 群表示

1.1. 定义和例子.

记号：V是k上一个n维线性空间. $GL_V=\{V\to V$的所有可逆线性变换$\}$. 这是一个群.
一般线性群. (General Linear Group)

如果选定V的一组基$\alpha_1\cdots\alpha_n$. $GL_V\cong\{n\times n$可逆矩阵$\}:=\boxed{GL_n}$

定义：设G是一个群. 称群同态$\rho: G\to GL_V$为群G的一个线性表示. 记为(ρ, V). 有时也简记为V. 或ρ.

命题：V是G的一个表示$\Leftrightarrow$ V是kG的一个表示.

证明："$\Rightarrow$" $\rho: G\to GL_V$. 构造

$\rho: kG\longrightarrow \mathrm{End}(V)$. $\sum_{g\in G}\lambda_g g\mapsto \sum_{g\in G}\lambda_g\rho(g)$.

"$\Leftarrow$"：同样取一个代数同态. $\rho: kG\to \mathrm{End}(V)$.

令 $\rho: G\longrightarrow \underset{\mathrm{Aut}(V)=GL_V}{?}$ 定义 $\rho|_G$. 只需证 $\rho(G)\subset GL_V$. 但这是显然的. $\rho(1)=1$

$\rho(1)=\rho(gg^{-1})=\rho(g)\rho(g^{-1})=1\Rightarrow\rho(g)$可逆. □

说明：① 大家可以类似地定义子表示. 商表示. 表示的同态. 正合列.

② 表示的同态：$f: V_1\to V_2$. $\boxed{f(g\cdot v)=g\cdot f(v)}$. $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$表示所有$V_1\to V_2$的表示的同态形成的集合.

例. ① 平凡表示. (Trivial Representation). $\forall G$. 建立一个1维的表示. $\rho: G\to k^*$, $\boxed{g\mapsto 1}$. $GL_V=k^*$ ($\dim V=1$) $=k\setminus\{0\}$

② (对称群特有的表示) 符号表示 (Sign Representation)

$\mathrm{sgn}: S_n\longrightarrow k^*$. 奇置换$\mapsto -1$
偶置换$\mapsto +1$.

③ 想给出S_n一个典范表示. 令V为一个n维的线性空间. 令$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$为一组基.

$S_n\curvearrowright(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 想象成 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(1,2,\cdots,n)$
$\sigma\in S_n$. $\sigma(1,2,\cdots n)$.

$\sigma\longmapsto n\times n$可逆矩阵. $\begin{pmatrix} \cdots 1\cdots \\ 1 \\ \cdots 1\cdots\end{pmatrix}$

$\therefore S_n\hookrightarrow GL_n$. 任意有限群都是线性群.

④ Regular Representation (同学们自行给出).

⑤ 考虑一种特殊的正则表示. $k\mathbb{Z}_n$ 了 $k\mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{Z}_n = \langle g \mid g^n = 1\rangle$. 在$k\mathbb{Z}_n$中构造一个元素. $v_1=\sum_{i=0}^{n-1} g^i$. $g\cdot v_1 = g\sum_{i=0}^{n-1} g^i = \sum_{i=0}^{n-1} g^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} g^i = v_1$.

· kv_1 是一个平凡表示

· 假设 $k=\bar{k}$. char$k=0$. 令 ξ_n 为一个n次本原单位根. 即: $\xi_n^n=1$. 但 $\xi_n^m\neq 1$ for $m<n$. $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

构造n个元素: $\boxed{w_i := \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{-ij} g^j}$ $(v_1 = w_0)$ $0\le i\le n-1$

$$g\cdot w_i = \sum_{j=0}^{n-1}\xi_n^{-ij}g^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1}\xi_n^i\cdot\xi_n^{-i(j+1)}g^{j+1} = \xi_n^i \underline{\sum_{j=0}^{n-1}\xi_n^{-i(j+1)}g^{j+1}} = \xi_n^i w_i$$

意味着. kw_i 也是 $k\mathbb{Z}_n$ 的一个一维表示.

一共构造出n个一维表示. 恰恰为 x^n-1 的所有的根. $k\mathbb{Z}_n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} kw_i$ ← irreducible rep.

§2. 表示的常用构造法

2.1. 直和 (Direct sum).

令 V_1. V_2 为群G的两个表示. 构造线性空间的直和: $V_1\oplus V_2 := \{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2\}$

$\forall g\in G$. $g\cdot(\alpha_1+\alpha_2) := \underbrace{g\cdot\alpha_1}_{\in V_1} + \underbrace{g\cdot\alpha_2}_{\in V_2}$.

容易验证 $(g_1g_2)\cdot(\alpha_1+\alpha_2) = g_1\cdot(g_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2))$. 称之为表示的直和.

(令 V, W 为任意两个域k的线性空间. 令 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 是V的一组基. $\beta_1\cdots\beta_n$ 为W的一组基. 构造一个以 $\alpha_1\cdots\alpha_m$, $\beta_1\cdots\beta_n$ 为基的线性空间 这就是 V与W的直和)

矩阵形式: $g\in G$ $\quad V_1$: $\alpha_1\cdots\alpha_m$ $\rho_1(g)(\alpha_1\cdots\alpha_m)=\cdots A$

V_2: $\beta_1\cdots\beta_n$. $\rho_2(g)(\cdots)=\cdots B$.

$g\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_n) = (\cdots)\boxed{\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}}$ $\quad \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$.

2.2. 张量表示 (tensor product of rep.)

令 V_1. V_2 分别为群G的两个有限维表示.

作为线性空间, g的定义 $V_1\otimes_k V_2 = V_1\otimes V_2$, 定义 $\rho: G\longrightarrow GL_{V_1\otimes V_2}$ $\boxed{g\cdot(v_1\otimes v_2) := g\cdot v_1\otimes g\cdot v_2}$

可以验证 ρ 是一个群同态. $(g_1g_2)\cdot(v_1\otimes v_2) \overset{?}{=} g_1\cdot(g_2\cdot(v_1\otimes v_2))$. (自行验证).

矩阵形式: 为此, 令 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 为 V_1 的一组基. $\beta_1\cdots\beta_n$ 为 V_2 的一组基. $\rho_1(g)(\alpha\cdots) = (\alpha\cdots\alpha)(a_{ij}) \leftarrow A$.

$\rho_2(g)(\beta_1\cdots\beta_n) = (\beta_1\cdots\beta_n)(b_{ij}) \leftarrow B$

$\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$

$$\rho(g)\begin{pmatrix}\alpha_1\otimes\beta_1, & \alpha_1\otimes\beta_2, & \cdots, & \alpha_1\otimes\beta_n \\ \alpha_2\otimes\beta_1, & \alpha_2\otimes\beta_2, & \cdots & \alpha_2\otimes\beta_n \\ \vdots & & & \\ \alpha_m\otimes\beta_1, & \alpha_m\otimes\beta_2, & \cdots & \alpha_m\otimes\beta_n\end{pmatrix} = (\cdots)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{11}b_{n1} & a_{11}b_{n2} & \cdots \end{matrix}}_{a_{11}B} & a_{12}B & \cdots \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{21}b_{n1} & a_{21}b_{n2} \end{matrix}}_{a_{21}B} & & \\ \vdots & \vdots & \\ \boxed{\begin{matrix} a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} \\ & \vdots \\ a_{m1}b_{n1} & a_{m1}b_{n2} \end{matrix}}_{a_{m1}B} & & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

$A\otimes B$

$g\cdot\alpha_1\otimes g\cdot\beta_1 \to \beta_2$ $\quad b_{12}\beta_1+b_{22}\beta_2+\cdots+b_{n2}\beta_n$

$= \underline{(a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{m1}\alpha_m)}$
$\quad\otimes\ \underline{(b_{11}\beta_1+b_{21}\beta_2+\cdots+b_{n1}\beta_n)}$

$\mathrm{Tr}(A\otimes B)=\mathrm{Tr}(a_{11}B)+\cdots+\mathrm{Tr}(a_{mm}B)=a_{11}\mathrm{Tr}(B)+\cdots a_{mm}\mathrm{Tr}(B)=\underline{(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mm})}\mathrm{Tr}(B)=\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

2.3. 反轭表示（对偶表示. Dual rep）.

令 V 是 G 的一个有限维表示. $V^*=\mathrm{Hom}_k(V,k)$.

$\forall g\in G.\ f\in V^*.\quad \boxed{(g\cdot f)(v):=f(g^{-1}\cdot v)}\quad v\in V$

证. $g_1,g_2\in G.\quad g_1g_2\cdot f\overset{?}{=}g_1(g_2\cdot f)$.

$((g_1g_2)\cdot f)(v)=f((g_1g_2)^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}g_1^{-1}\cdot v)$.

$(g_1\cdot(g_2\cdot f))(v)=(g_2\cdot f)(g_1^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot v))=f((g_2^{-1}g_1^{-1})\cdot v)=((g_1g_2)\cdot f)(v)$. why g^{-1}?

为了结合律的成立.

矩阵形式: 令 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 为 V 的一组基. $g\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_m)=(\cdots)A$. $g^{-1}\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_m)=(\cdots)A^{-1}$.

令 $f_1\cdots f_m$ 为 $(\alpha_1,\cdots\alpha_m)$ 的对偶基: $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (Dual basis).

$g\cdot(f_1,\cdots,f_m)=(f_1\cdots f_m)(\quad)$?

$(g\cdot f_1)(\alpha_1)=f_1(g^{-1}\cdot\alpha_1)=\underset{=b_{11}}{f_1(b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{1m}\alpha_m)}\quad g^{-1}\to \underset{=(b_{ij})}{A^{-1}}\quad\Longrightarrow\quad g\cdot f_1=b_{11}f_1+\cdots$

$(g\cdot f_1)(\alpha_2)=f_1(g^{-1}\cdot\alpha_2)=\underset{=b_{12}}{f_1(b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{m2}\alpha_m)}\Longrightarrow g\cdot f_1=b_{11}f_1+b_{12}f_2+\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\quad g\cdot f_1=b_{11}f_1+b_{12}f_2+\cdots+b_{1m}f_m$.

$g\cdot(f_1,\cdots,f_m)=(f_1,\cdots,f_m)\begin{pmatrix}b_{11} & \\ b_{12} & \cdots\cdots\\ \vdots & \\ b_{1m} & \end{pmatrix}\leftarrow C$.

由上面的计算知道. $\boxed{C=(A^{-1})'}$

$\mathrm{Tr}(C)=\mathrm{Tr}(A^{-1})$.（对偶表示更像取逆）.

2.4. Hom 表示.

令 V_1. V_2 分别为 G 的两个表示. $\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)\leftarrow$ 是个线性空间. $\dim V_1\cdot\dim V_2$.

定义: $\forall f\in\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)$. $\forall g\in G$.

$\boxed{(g\cdot f)(v_1):=g\cdot(f(g^{-1}\cdot v_1))}$（自行验证这是一个表示）.

命题: $\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)\cong V_1^*\otimes V_2$.（作为表示的同构）.

证. Φ: $V_1^*\otimes V_2\longrightarrow\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)$

$f\otimes v_2\longmapsto\underline{\Phi(f\otimes v_2)}: v_1\longmapsto\underset{\in V_2}{\underline{f(v_1)v_2}}\quad \begin{matrix}f\in V_1^*\\ v_1\in V_1\end{matrix}$

首先证明 Φ 是一个单射. 即需证 $\Phi(f\otimes v_2)=0\Rightarrow f\otimes v_2=0$. 假设 $\because\Phi(f\otimes v_2)=0\in\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)$. 即对 $\forall v_1\in V_1$,

我们都有 $\Phi(f\otimes v_2)(v_1)=0\Leftrightarrow\underline{f(v_1)v_2}=0$. if $f\neq0$. $\exists\, v_1\in V_1$. s.t. $\underline{f(v_1)}\neq0$ $\because f(v_1)v_2=0\Rightarrow v_2=0\ \therefore f\otimes v_2=0$.

总之, $f\otimes v_2=0$. $\therefore\Phi$ 是单射.

其次, $\dim\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2=\dim V_1^*\cdot\dim V_2=\dim V_1^*\otimes V_2$. $\therefore\Phi$ 也是满射.

$\forall g\in G$. $\Phi(g\cdot(f\otimes v_2)) \overset{?}{=} g\cdot\Phi(f\otimes v_2)$.

验证，左边$(v_1)=\Phi(g\cdot(f\otimes v_2))(v_1)=\Phi(g\cdot f\otimes g\cdot v_2)(v_1)=\underline{(g\cdot f)(v_1)}(g\cdot v_2)=\underline{f(g^{-1}\cdot v_1)}\,\underline{g\cdot v_2}$ $f\in V_1^*$

另一侧，$(\underline{g\cdot\Phi(f\otimes v_2)})(v_1)=g\cdot(\Phi(f\otimes v_2)(g^{-1}\cdot v_1))=g\cdot(\underline{f(g^{-1}\cdot v_1)}v_2)=f(g^{-1}\cdot v_1)\,g\cdot v_2$

$\therefore\Phi$也是模同态. $\square$

说明：特别的，如果$V_1=V_2=V$，就得到$\mathrm{End}(V)\cong\boxed{V^*\otimes V}$.

通常的一个结论：令$\alpha_1\cdots\alpha_m$为V的一组基，$f_1\cdots f_m$为对偶基. $\sum_{i=1}^{m}f_i\otimes\alpha_i$ 不依赖于基的选择.

原因是. $\Phi: V^*\otimes V\longrightarrow \mathrm{End}(V)$ $\Phi(\sum_i f_i\otimes\alpha_i)=\mathrm{Id}_V$.

思考：证明$V^*\otimes V$包含一个子表示，该子表示为平凡表示.（当$\dim V\geq1$）.