模论与表示论初步 第六讲

§2. Maschke 定理.

引理1. (线性空间的情形). 令 $V_1 < V$ 是 V 的一个子空间, 则 V_1 是 V 的直和项 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 线性映射 $p: V \longrightarrow V_1$. s.t. $p|_{V_1} = Id_{V_1}$.

证明: "$\Longrightarrow$" 即 $\exists\, V_2 < V$. s.t. $V = V_1 \oplus V_2$.

定义: $p: V = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1$.

"$\Longleftarrow$". 令 $V_2 = \ker p = \{v \in V \mid p(v) = 0\}$. ∴由线性代数的知识知道, $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

$\forall\, v \in V$. $p(v - p(v)) = p(v) - p(\underbrace{p(v)}_{\in V_1}) = p(v) - p(v) = 0$. ∴ $v - p(v) \in V_2$. ∴ $v = \underbrace{p(v)}_{\in V_1} + \underbrace{(v - p(v))}_{\in V_2}$

∴ $V = V_1 + V_2$. ∴ $V = V_1 \oplus V_2$. □

引理2 (模的情形). 设R是一个环. $M_1 < M$ 是一个子模. 则 M_1 是M(作为模)的直和项 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ R-模同态 $p: M \longrightarrow M_1$ s.t. $p|_{M_1} = Id_{M_1}$.

证明: "$\Longrightarrow$" ✓ $M = M_1 \oplus M_2$. $p: M \longrightarrow M_1$, $(m_1, m_2) \mapsto m_1$.

"$\Longleftarrow$" 令 $M_2 = \ker p$. 由引理1, 知道 $M = M_1 \oplus M_2$ (作为加群或线性空间).

只需证 M_2 是模. ∵p是模同态. ∴$\ker p$是模.

定理 (Maschke). 令G是一个有限群. $\mathrm{char}\, k$ (表示域k的特征) 如果 $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$. 则 G 的所有有限维表示都是完全可约的. (即所有有限维都是不可约模的直和).

证明: $\forall$取一个G的有限维表示M. $M_1 < M$ 子表示. 只需证 M_1 是 M 的直和项 (作为模) (如果成立. 则 $M = \underline{M_1} \oplus \underline{M_2}$, 不断进行下去).

首先, 我们知道, 作为线性空间, 一定存在子空间 V_2. s.t. $M = M_1 \oplus V_2$.

由引理1, $\exists$ 线性映射 $p: M \longrightarrow M_1$. s.t. $p|_{M_1} = Id$.

构造 $\bar{p}: M \longrightarrow M_1$. $\bar{p}(m) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p(g^{-1} \cdot m)$.

Claim: $\bar{p}$ 是 G-模同态.

Claim的证明: ① $\bar{p}$是线性的 ✓.

② $\forall\, h \in G$. $\bar{p}(h \cdot m) \overset{?}{=} h \cdot \bar{p}(m)$. $\bar{p}(h \cdot m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p(g^{-1} \cdot h \cdot m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p((h^{-1}g)^{-1} \cdot m)$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h h^{-1} g \cdot p((h^{-1}g)^{-1} \cdot m) = h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h^{-1}g \cdot p((h^{-1}g)^{-1} \cdot m) \right)$$

$= h \cdot \bar{p}(m)$. ∴ $\bar{p}$ 是模同态.

由引理2, 知 $M_2 = \ker \bar{p}$. $M = M_1 \oplus M_2$ (作为模).

显然 $\bar{p}: M \longrightarrow M_1$. $\forall\, m_1 \in M_1$, 需证 $\bar{p}(m_1) = m_1$. 事实上,

$$\bar{p}(m_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot p(g^{-1}\cdot m_1) \qquad \because m_1\in M_1,\ g^{-1}\cdot m_1 \in M_1. \quad p|_{M_1}=Id.$$

$$\therefore \bar{p}(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \underbrace{g\cdot g^{-1}}\cdot m_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m_1 = m_1. \qquad \square$$

说明: ① 只需研究不可约表示即可. 如果 char $k \nmid |G|$.

② 如果 char $k \nmid |G|$, G 的表示论称为常表示论. 否则称为模表示论.

③ 下面说明, char $\nmid |G|$ 是充分的也是必要的.

例 $G=\mathbb{Z}_2$. F. char $F=2$. $F\mathbb{Z}_2 \circlearrowright F\mathbb{Z}_2$. 与 $\mathbb{C}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{C}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(1+g)\right)} \oplus \mathbb{C}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(1-g)\right)}$

但 $F\mathbb{Z}_2$ 没有此分解. 如果有, $F\mathbb{Z}_2$ 也可以写成一维子模的直和.

claim. $F\mathbb{Z}_2$ 的一维模都是平凡的.

事实上, 令 V 为 $F\mathbb{Z}_2$ 的一个一维模. $V=F\cdot v$.

$g\cdot v=\lambda v$. $\qquad g^2-1=0$. $\therefore (g^2-1)\cdot v=0$

$\therefore \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1 \Rightarrow \lambda=1$. $\therefore g\cdot v=v$. $\square$

$\therefore F\mathbb{Z}_2$ 是平凡模的和. 即: $g\cdot x = x \quad \forall x\in F\mathbb{Z}_2$. 矛盾.

习题: $F\mathbb{Z}_2$ 是不可分解的. 有子模 (不是不可约的)

本门课程我们只讨论常表示论. 另外, 通常我们取的域都是 $\mathbb{C}$.

第三章 特征标 (Character)

§1. 特征标的定义和简单性质

迹 (Trace). $\mathcal{A}\in \underline{L(V)}$. 令 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 V 的一组基. $\mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$.

$Tr(A):=\sum_{i=1}^n a_{ii}$. 定义: $\boxed{Tr(\mathcal{A}):=Tr(A)}$

相似 (similar) $A\sim B$. $A=C^{-1}BC$. $Tr(A)=Tr(B)$. $Tr(A)$ 是特征多项式的根之和.

定义. 令 V 为 G 的一个表示(有限维). $\rho: G\to GL_V$. 表示的特征标定义为:

$$\boxed{\chi_\rho: G\longrightarrow k.\quad g\mapsto Tr(\rho(g))}$$

有时简记为 χ.

说明: χ_ρ 是 G 上的一个函数. 不是同态!

以下总是预设, 令 $\underline{k=\mathbb{C}}$

命题: ① $\chi_\rho(g^{-1})=\overline{\chi_\rho(g)}$.

② $\chi_\rho(hgh^{-1})=\chi_\rho(g)$

证明: ① $\rho(g)\in GL_V$ 是可对角化的.

∵ G 是有限群. ∴ g 的阶有限. 即 $\exists n$. s.t. $g^n=1$. $\rho(g)^n=Id_V$. ∴ $\rho(g)$ 满足多项式 $x^n-1=0$. ∴ $\rho(g)$ 的最小多项式一定是 x^n-1 的因式. 但 x^n-1 是无重根的. (x^n-1 的根 $e^{\frac{2\pi i}{n}j}$, $0\le j\le n-1$). ∴ $\rho(g)$ 的最小多项式无重根.

∴ $\rho(g)$ 可对角化. 即 $\rho(g)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

· λ_i 都是单位根. (即 $\exists d\in\mathbb{N}$. st $\lambda_i^d=1$)

这也是因为 $g^m=1$. ∴ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ ∴ $\lambda_i^m=1$.

下面我们来证明①. $\rho(g^{-1})\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \bar\lambda_2 & \\ & & \ddots \ \bar\lambda_n\end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}}$ $\lambda_i\bar\lambda_i=|\lambda_i|^2=1$

∴ $Tr(\rho(g^{-1}))=\bar\lambda_1+\cdots+\bar\lambda_n=\overline{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=\overline{Tr(\rho(g))}$. 即 $\chi_\rho(g^{-1})=\overline{\chi_\rho(g)}$.

② $\rho(hgh^{-1})=\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})$. 随便取一组基. 我们知道 $\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})$ 对应的矩阵和 $\rho(g)$ 对应的矩阵是相似的. ∴ $Tr(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1}))=Tr(\rho(g))$. 即. $\chi_\rho(hgh^{-1})=\chi_\rho(g)$.

定义: G 上的一个函数 $\underset{f:G\to\mathbb{C}}{}$ 称为类函数. 如果 $f(ghg^{-1})=f(h)$. $\forall g,h\in G$. Class function.

说明: · 类函数在同一个共轭类取常值.

· 特征标都是类函数.

§2. G的函数

令 $\mathbb{C}^G:=\{f:G\to\mathbb{C}\}$. 同时我们还要考虑 $(\mathbb{C}G)^*=\{\mathbb{C}G$ 上全体线性函数$\}$

claim $\mathbb{C}^G = (\mathbb{C}G)^*$.

$\forall f \in \mathbb{C}^G$. $f: G \to \mathbb{C}$. 可以通过线性扩张. $f \in (\mathbb{C}G)^*$.

反之，取 $f \in (\mathbb{C}G)^*$. 则 $f|_G \in \{G \to \mathbb{C}\}$.

引理. $(\mathbb{C}G)^*$ 是一个代数.

证明: $\forall f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$. $(f_1 \cdot f_2)(g) := f_1(g) f_2(g)$

定义: 一个代数 A 称为 $*$-代数 如果 $\exists$ 一个线性映射: $*: A \to A$, $a \mapsto a^*$ 满足

① $(a^*)^* = a$, $\forall a \in A$. ② $(ab)^* = b^* a^*$. $\forall a, b \in A$.

例: $A = M_n(k)$. $*: A \to A$, $(a_{ij}) \mapsto (a_{ij})^T$. $(BC)^T = C^T B^T$. $M_n(k)$ 是一个 $*$-代数.

命题: $(\mathbb{C}G)^*$ 是一个 $*$-代数.

证明. $*: (\mathbb{C}G)^* \longrightarrow (\mathbb{C}G)^*$, $f \longmapsto f^*$.

$f^*(g) := f(g^{-1})$. $\forall g \in G$.

$f^{**}(g) = f^*(g^{-1}) = f(g)$. $\therefore f^{**} = f$.

$(f_1 f_2)^*(g) = (f_1 f_2)(g^{-1}) = f_1(g^{-1}) f_2(g^{-1}) = f_1^*(g) f_2^*(g) = (f_1^* f_2^*)(g)$ ...

$\therefore (f_1 f_2)^* = f_1^* f_2^* = f_2^* f_1^*$.

回忆: 双线性型. 给定一个线性空间 V 上的双线性函数 $(-,-): V \times V \to k$

$(\alpha+\beta, -) = (\alpha, -) + (\beta, -)$

$(k\alpha, -) = k(\alpha, -)$, 第二个分量也有同样的等式成立.

$\{V$ 上的双线性函数$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{V \otimes_k V$ 上的线性函数$\}$

V 上的二次型: $f: V \to k$. $f(v) = (v, v)$ 其中 $(-,-)$ 是 V 上的一个双线性函数.

- 一个双线性函数称为对称的. 若 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.
- 一个双线性函数称为非退化 (nondegenerate) 如果 $(\alpha, V) \equiv 0$. 则 $\alpha = 0$. (另一侧: $(V, \alpha) \equiv 0 \Rightarrow \alpha = 0$. 也成立)

$V \hookrightarrow V^*$: $v \mapsto (v, -) \in V^*$ 是单射.

例: 内积是一个非退化的. 对称的双线性函数.

$(-,-): V \times V \to k$. $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为 V 的一组基.

我们考虑 $a_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)$. 则我们得到 $A = (a_{ij})$

$\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$. $\beta = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$. $(\alpha, \beta) = (k_1 \cdots k_n) A \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

$$(\alpha,\alpha)=(k_1,\dots,k_n)A\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}k_1^2+a_{12}k_1k_2+\dots+a_{1n}k_1k_n+a_{21}k_2k_1+\dots+a_{ij}k_ik_j+\dots$$

高代中的二次型：二次齐次函数 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$

将 $x_1\dots x_n$ 分别取值为 $k_1,\dots,k_n$. $f(k_1,\dots,k_n)=(\alpha,\alpha)$

说明：任意双线性函数均可对称化.

想证明的是：$(\mathbb{C}G)^*$ 存在一个典范的非退化的对称的双线性函数！