模论与表示论初步 第七讲

回顾：Maschke定理. $f: V\to V \rightsquigarrow \tilde{f} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g f(g^{-1}\cdot)$

$\mathbb{C}$. 有限群的表示 → 不可约表示

特征标：(V,ρ), χ_V, χ_ρ

$g\in G$ $\chi_V(g) := tr(\rho(g)) = Tr(\rho(g))$

$\chi_V: G\to \mathbb{C}$ G上的函数 Class function

$\mathbb{C}^G = (\mathbb{C}G)^*$

$(\mathbb{C}G)^*$的结构：① alg. ② $*$-alg. ③ ∃一个双线性函数.

§1

§2. $\mathbb{C}^G$

命题：$(\mathbb{C}G)^*$上存在一个非退化、对称的双线性函数.

证明. 事实上：定义 $(\mathbb{C}G)^*\times(\mathbb{C}G)^*\to\mathbb{C}$

$(-,-)$

$\forall f_1,f_2\in(\mathbb{C}G)^*$

$(f_1,f_2) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g) f_2(g^{-1})$.

不难验证：① 对称性 $(f_1,f_2)=(f_2,f_1)$

$(f_2,f_1)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_2(g)f_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} f_2(h^{-1})f_1(h)$

$=(f_1,f_2)$.)

② $(f_1,-)=0 \Rightarrow f_1=0$

令 $\{\delta_g \mid g\in G\}$ 为 $\mathbb{C}G$ 里面的基 $\{g\in G\}$ 的对偶基.

$\delta_g(h)=\delta_{g,h}=\begin{cases}1 & g=h\\0 & g\neq h\end{cases}$

$0=(f_1,\delta_{g^{-1}}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} f(h)\delta_{g^{-1}}(h^{-1}) = f(g)$ ∴ $f(g)=0$

∴ $f=0$

Aim：想知道 $(\chi_{V_1},\chi_{V_2})=?$

§3. 特征标初探.

3.1 常用构造法的特征标

常用构造法：① 直和；② 张量；③ 对偶.

$V_1\oplus V_2$ $V_1\otimes V_2$ V^*

命题：① $\chi_{V_1\oplus V_2}=\chi_{V_1}+\chi_{V_2}$

② $\chi_{V_1\otimes V_2}=\chi_{V_1}\cdot\chi_{V_2}$

③ $\chi_{V^*}=(\chi_V)^*$ ($(\chi_V)^*(g)=\overline{\chi_V(g)}$)

证明 ① $g\curvearrowright V_1\oplus V_2$ $Tr(\rho_{V_1\oplus V_2}(g)) = Tr(\rho_{V_1}(g))+Tr(\rho_{V_2}(g))$

$= \chi_{V_1}(g)+\chi_{V_2}(g)$

② $g\curvearrowright V_1\otimes V_2$. 假定 $g\curvearrowright V_1 \rightsquigarrow A$

$g\curvearrowright V_2\rightsquigarrow B$

$g\curvearrowright V_1\otimes V_2 \rightsquigarrow A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B\\ \vdots & & \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B\end{pmatrix}$

$Tr(A\otimes B)=Tr(A)\,Tr(B)\Rightarrow \chi_{V_1\otimes V_2}(g)=\chi_{V_1}(g)\chi_{V_2}(g)$.

③ $g\curvearrowright V\rightsquigarrow A$

$g\curvearrowright V^*\rightsquigarrow (A^{-1})'$

$Tr_{V^*}(g) = Tr(A^{-1}) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$

$\chi_{V^*}(g)$ $= \chi_V^*(g)$ □

3.2. 本例

例：最小的非交换群是 S_3.

- 平凡表示 ρ_1
- 符号表示 ρ_2
- 典范表示：$S_3\curvearrowright\{e_1,e_2,e_3\}$

3.2. 本例

例：最小的非交换群是 S_3

- 平凡表示 ρ_1
- 符号表示 ρ_2
- 典范表示：$S_3 \curvearrowright \{e_1, e_2, e_3\}$

$\sigma \in S_3$. $\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$

令 $V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. $\quad S_3 \curvearrowright V$

令 $V_c := \{k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 \mid \sum_{i=1}^{3} k_i = 0\}$

容易发现 $V_c \subset V$ 是一个子表示. $\dim V_c = 2$.

事实上，$\underbrace{e_1 - e_2}_{\alpha_1}$，$\underbrace{e_2 - e_3}_{\alpha_2}$ 为 V_c 的一组基.

S_3:

$(1)(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_{V_c}((1)) = 2$

$(12)(\alpha_1, \alpha_2) = (e_2 - e_1, e_1 - e_3) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi((12)) = 0$

$(13)(\alpha_1, \alpha_2) = (e_3 - e_2, e_2 - e_1) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi((13)) = 0$

$(23)(\alpha_1, \alpha_2) = (e_1 - e_3, e_3 - e_2) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \chi((23)) = 0$

$(123)(\alpha_1, \alpha_2) = (e_2 - e_3, e_3 - e_1) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \chi((123)) = -1$

$(132)(\alpha_1, \alpha_2) = (e_3 - e_1, e_1 - e_2) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi((132)) = -1$

$$(\chi_{V_c}, \chi_{V_c}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V_c}(g)\chi_{V_c}(g^{-1})$$
$$= \frac{1}{6}(\underset{(1)}{2\times 2} + \underset{(12)}{0} + \underset{(13)}{0} + \underset{(23)}{0} + \underset{(123)}{-1\times -1} + \underset{(132)}{-1\times -1})$$
$$= 1$$

$$(\chi_{V_c}, \chi_{\rho_1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_c}(g)\rho_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_c}(g)$$
$$= 0$$

$$(\chi_{V_c}, \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_c}(g)\rho_2(g^{-1})$$
$$= \frac{1}{6}(2\times 1 + 0 + 0 + 0 + (-1)\times 1 + (-1)\times 1)$$
$$= 0.$$

$$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\underbrace{\sum_{g\in G}\chi_{\rho_2}(g^{-1})}_{=0}$$

"欧氏空间"的说法，上述元素是"标准正交"的.

3.3. 一个性质.

命题：如果 G 的两个表示是同构的：$(V_1, \rho_1) \cong (V_2, \rho_2)$，则 $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

证明：$\because (V_1, \rho_1) \cong (V_2, \rho_2)$

$\therefore \exists \; f: V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$

s.t. $\boxed{f(g\cdot v_1) = g\cdot f(v_1)}$

$\Longleftrightarrow g\cdot v_1 = f^{-1}(g\cdot f(v_1))$

$\Longleftrightarrow \rho_1(g) = f^{-1}\circ\rho_2(g)\circ f$

$\chi_{V_1}(g)$
$= \mathrm{Tr}(\rho_1(g))$
$= \mathrm{Tr}(f^{-1}\circ\rho_2(g)\circ f)$
$= \mathrm{Tr}(\rho_2(g)) = \chi_{V_2}(g).$ $\square$

Question: How about the converse?

Answer: Yes!

Frobenius
$\downarrow$
Schur
$\downarrow$
Brauer

§4. 特征标的第一正交关系.

4.1. Schur's Lemma.

假定研究的是 $\mathbb{C}$ 上的有限群的有限维表示.

引理. 令 V_1, V_2 是群 G 的两个不可约表示. $f: V_1 \to V_2$ 一个 G-模同态. 则

1. 如果 $V_1 \not\cong V_2$，则 $f = 0$
2. 如果 $V_1 \cong V_2$（取 φ 为这个同构），则 $f = c\varphi$. $c \in \mathbb{C}$

证明：1. $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

- $\mathrm{Im} f \subset V_2$ 子模. 但 V_2 是不可约的

$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im} f = 0 \quad \checkmark \\ \mathrm{Im} f = V_2 \end{cases}$ $\qquad \mathrm{Im} f = V_2$

§1. Schur's Lemma.

Schur → Brauer

假设研究的是 $\mathbb{C}$ 上的有限群的有限维表示.

引理: 令 V_1, V_2 是群 G 的两个不可约表示.

$f: V_1 \to V_2$ 一个 G-模同态.

则

① 如果 $V_1 \ncong V_2$, 则 $f = 0$

② 如果 $V_1 \cong V_2$ (取 φ 为这个同构), 则 $f = c\varphi$. $c \in \mathbb{C}$.

证明: ① $V_1 \xrightarrow{f} V_2$

• $\mathrm{Im} f \subset V_2$ 子模. 但 V_2 是不可约的

$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im} f = 0 \ \checkmark \\ \mathrm{Im} f = V_2 \end{cases}$

• $\mathrm{Ker} f \subset V_1$. 但 V_1 是不可约的

$\Rightarrow \ker(f) = \begin{cases} 0 \\ V_1 \ \checkmark \end{cases}$

$\mathrm{Im} f = V_2$ 且 $\ker f = 0$ 即 f 是同构 矛盾

② 由①的证明我们知道 $f=0$ 或 f 是同构. 如果 $f=0$ 显然成立. (取 $c=0$).

如果 f 是同构. 则 $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$

$V_1 \xrightarrow{f} V_2$

$\varphi^{-1}\circ f : V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} V_1$

$\therefore \varphi^{-1}\circ f \in \mathrm{End}_G(V_1)$ 为 $V_1 \to V_1$ 的一个 G-模同态.

同时, $\varphi^{-1}f$ 为 $V_1 \to V_1$ 一个线性变换.

取 c 为 $\varphi^{-1}\circ f$ 的一个特征值. v_1 对应的一个特征向量.

$\therefore (\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1})(v_1) = \varphi^{-1}\circ f(v_1) - cv_1 = cv_1 - cv_1 = 0$.

$\therefore \mathrm{Ker}(\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}) \neq 0$. 同时我们知道 $\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1} \in \mathrm{End}_G(V_1)$.

由①的证明知道 $\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}$ 或者是 0 或者是同构.

$\because \ker(\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}) \neq 0$ $\therefore \varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1}$ 不是同构.

故 $\varphi^{-1}\circ f - c\,\mathrm{Id}_{V_1} = 0 \Rightarrow \varphi^{-1}\circ f = c\,\mathrm{Id}_{V_1} \Leftrightarrow f = c\varphi$. □

推论: 设 V_1, V_2 为两个 G 的不可约表示. 则

① $\mathrm{End}_G(V_1) = \mathbb{C}\cdot\mathrm{Id}_{V_1}$.

② $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ 若 $V_1 \ncong V_2$.

说明: • $\mathbb{C}$ 这个条件是需要的. ⇒ 特征值的存在性.

• 如果换成一般的域, 引理的①还是成立的.

定义. 设 V 是 G 的一个表示. 定义

$$V^G := \{ v \in V \mid g\cdot v = v,\ \forall g \in G \}.$$

这个 V^G 是 V 的一个子表示. (为平凡表示的直和)

命题: 令 V_1, V_2 是 G 的两个表示. 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G = \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

证明. 回忆一下, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ 上的 G-模结构

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ $\quad (g\cdot f)(v_1) := g\cdot f(g^{-1}v_1)$ $\quad g \in G$

如果 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G$, 则 $g\cdot f = f$

$\Leftrightarrow g\cdot f(g^{-1}v_1) = f(v_1) \quad \forall v_1 \in V_1$

$\Leftrightarrow f(g^{-1}v_1) = g^{-1}\cdot f(v_1) \quad \forall v_1 \in V_1$

$\Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. □

§2. 确定 V^G.

取 V 为 G 的表示. $\rho: G \to GL_V$.

构造 $\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$

命题: 令 $z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$. 则

① $z \in \mathrm{End}_G(V)$.

② $z\circ z = z$

③ $V^G = z(V)$.

命题: 令 $z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)$. 则

① $z \in \mathrm{End}_G(V)$.

② $z\circ z = z$

③ $V^G = z(V)$.

证明: $\forall h \in G$.

① $z(h\cdot v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\rho(h)(v))$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(gh)(v) = z(v)$

$h\cdot z(v) = h\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)(v)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)(v) = z(v)$

② $\forall h$, 都有 $\rho(h)\circ z = z = z\circ\rho(h)$

$\therefore z\circ z = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)$

$= \frac{1}{|G|}|G|\, z = z$.

③ $z: V \longrightarrow V$ 　目标: $V^G = z(V)$.

$\forall v\in V^G$. 则 $z(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v$

即 $z(v)=v$. $\therefore v\in z(V)$ 即 $V^G \subseteq z(V)$.

$\forall v\in z(V)$ 即 $\exists v'\in V$. s.t. $z(v')=v$

$\forall g\in G$ 　$g\cdot v = g\cdot z(v') = \rho(g)z(v')$

$= z(v') = v$.

$\therefore v\in V^G$ 即 $z(V)\subseteq V^G$. □

推论: 设 (ρ, V) 是 G 的一个表示. 则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^G}(g) = \dim V^G.$$

证明:

$z: V\longrightarrow V$ 　G. module morphism.

由命题的 ③ 知道

$z: V \twoheadrightarrow V^G$ 　由 $z^2 = z$.

即说明 $z: V\twoheadrightarrow V^G$ and $z|_{V^G} = \mathrm{Id}_{V^G}$.

$\therefore V = \mathrm{Ker}(z)\oplus \mathrm{Im}(z)$

$= \mathrm{Ker}(z)\oplus V^G$.

$\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)} = \mathrm{Tr}(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\rho(g))$

$= \mathrm{Tr}(z|_{V^G}) = \boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^G}(g)}$

$= \dim_{\mathbb{C}} V^G$. □

定理: 设 V_1, V_2 是 G 的两个表示. 则

$$\boxed{(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)}$$

证明:

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1}(g)\chi_{V_2}(g^{-1})$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*}(g)\chi_{V_2}(g)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_1^*\otimes V_2}(g)$

$= \dim_{\mathbb{C}}(V_1^*\otimes V_2)^G = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)^G$

$= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

回顾: S_3. 　ρ_1. ρ_2 　V_C.

$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) = 1$

$(\chi_{\rho_1}, \chi_{V_C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(V_1, V_C) = 0$

理(第一正交关系) 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示. 则

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \begin{cases} 1 & V_1 \cong V_2 \\ \ldots \end{cases}$

定理（第一正交关系） 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示，则

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \begin{cases} 1 & V_1 \cong V_2 \\ 0 & V_1 \not\cong V_2. \end{cases}$$

证明：$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \xlongequal{\text{Schur's Lemma}} \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2 \\ 1 & V_1 \cong V_2. \end{cases}$$

推论： 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示，则

$$V_1 \cong V_2 \iff \chi_{V_1} = \chi_{V_2}$$

证明："$\Rightarrow$" ✓ 已知.

"$\Leftarrow$" 如果 $V_1 \not\cong V_2$，则由上述定理知道

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = 0$.

但是

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_1}(g)\, \chi_{V_1}(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_1}(g)\, \overline{\chi_{V_1}(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_{V_1}(g)|^2 \geq 0$$

当 $g = e$ 时，$\chi_{V_1}(g) = \dim V_1$. $\therefore |\chi_{V_1}(e)|^2 > 0$

$\therefore (\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) > 0$. 矛 □