

模论与表示论初步 第八讲

回忆: 特征标 $(\mathbb{C}G)^*$ 具有一个非退化双线性 $*$ 代数. 如果 V, W 是两个不可约表示, 则

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim \operatorname{Hom}_G(V, W).$$

$$\text{取一个 } G\text{-表示 } U. \quad U^G = Z \cdot U. \quad Z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g).$$

定理: 不可约表示 $V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$.

§5. 相关应用

5.1. 不可约的判定.

命题: 设 V 是 G 的一个有限维表示. 则 V 是不可约的 $\Leftrightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

|证明: " $\Rightarrow$ " §4 中主要定理得到.

" $\Leftarrow$ " 反证. 如果 V 不是不可约的, 则 $V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$. (这里 $V_i \neq V_j$ ($i \neq j$)). n_i 称为 V_i 在 V 中出现的重数 (multiplicity).

$$(\chi_V, \chi_V) = \left(\sum_{i=1}^s n_i \chi_{V_i}, \sum_{j=1}^s n_j \chi_{V_j} \right) = \sum_{i,j} n_i n_j (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \sum_{i,j} n_i n_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^s n_i^2 > 1. \quad \text{矛盾. } \square$$

例: S_3 . 平凡表示. 符号表示. 典范表示 (standard rep). $V = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. $\sigma \cdot e_i := e_{\sigma(i)}$.

$$V_1 \subset V. \quad V_1 = \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i e_i \mid \sum_{i=1}^3 a_i = 0 \right\}. \quad V_1 \text{ 就是典范表示. } \quad V_1 = \operatorname{span}\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}.$$

$$\chi_{V_1}: 1 \mapsto 2; (12), (13), (23) \mapsto 0; (123), (132) \mapsto -1.$$

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi_{V_1}(g) \chi_{V_1}(g^{-1}) = \frac{1}{6} (2 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1)) = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

$\therefore V_1$ 是不可约的.

§5.2. 同构的判定.

命题: 设 V, W 是 G 的任意两个有限维表示. 则 $V \cong W \Leftrightarrow \chi_V = \chi_W$.

|证明: " $\Rightarrow$ " 显然.

" $\Leftarrow$ " $V = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$, $W = m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \cdots \oplus m_s V_s$. 只需证 $n_i = m_i$ for $1 \leq i \leq s$.

claim: $n_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_V \rangle$.

$$\text{claim 的证明: } \exists \text{ 互正, } \langle \chi_{V_i}, \chi_V \rangle = \langle \chi_{V_i}, \sum_{j=1}^s n_j \chi_{V_j} \rangle = \sum_{j=1}^s n_j \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \sum_{j=1}^s n_j \delta_{ij} = n_i.$$

类似地, $m_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_W \rangle$. $\therefore n_i = m_i$. $\forall 1 \leq i \leq s$. $\square$

例: (对称表示与交错表示) 令 V 是任意一个有限维的 G 表示. 考虑张量表示 $V \otimes V$.

定义: $\theta: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$.

显然有: ① $\theta^2 = \operatorname{Id}$. ② θ 是对角的. 定义 $\operatorname{Sym}^2(V) = \{ \alpha \in V \otimes V \mid \theta(\alpha) = \alpha \}$; $\operatorname{Alt}^2(V) = \{ \alpha \in V \otimes V \mid \theta(\alpha) = -\alpha \}$.

Claim 1: $\text{Sym}^2(V)$, $\text{Alt}^2(V)$ 都是 $V \otimes V$ 的子表示.

Claim 1 的证明: 显然 $\text{Sym}^2(V)$, $\text{Alt}^2(V)$ 都是子空间. 特征子方向. 只需证 $\text{Sym}^2(V)$ 和 $\text{Alt}^2(V)$ 都在 G 的作用下稳定.

$$\forall \alpha \in \text{Sym}^2(V), g \in G, \theta(g \cdot \alpha) = g \cdot \alpha$$

$$\exists \text{ 映射 } \theta: V \otimes V \rightarrow V \otimes V \quad \theta(g \cdot (v_1 \otimes v_2)) = \theta(g \cdot v_1 \otimes g \cdot v_2) = g \cdot v_2 \otimes g \cdot v_1 = g \cdot (v_2 \otimes v_1) = g \cdot \theta(v_1 \otimes v_2)$$

即 θ 是 $\text{Sym}^2(V)$ 的表示. $\therefore \theta(g \cdot \alpha) = g \cdot \theta(\alpha) = g \cdot \alpha$. 故 $\text{Sym}^2(V)$ 是子表示. 类似地, 可证明 $\text{Alt}^2(V)$ 也是子表示. $\square$

Claim 2: $V \otimes V \cong \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V)$. (一般地说, 不可约表示的张量表示不再是不可约的).

Claim 2 的证明: 只需证 $\chi_{V \otimes V} = \chi_{\text{Sym}^2} + \chi_{\text{Alt}^2}$. $\chi_{V \otimes V} = \chi_V^2$

$$g \in G, g \curvearrowright V \text{ 是对角化的. } \therefore \exists e_1, \dots, e_n \text{ 为 } V \text{ 的一组基且 } g \cdot e_i = \lambda_i e_i.$$

$$\text{故 } \{e_i \otimes e_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \text{ 就是 } V \otimes V \text{ 的一组基. } \chi_{V \otimes V}(g) = \chi_V(g) \chi_V(g) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j.$$

$$\boxed{\text{易证:}} \quad \text{Sym}^2(V) = \text{span} \{ e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \mid 1 \leq i \leq j \leq n \}$$

$$\text{Alt}^2(V) = \text{span} \{ e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \mid 1 \leq i < j \leq n \}$$

$$\therefore \dim \text{Sym}^2(V) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \text{Alt}^2(V) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\chi_{\text{Sym}^2(V)}(g) \quad g \cdot (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_i \lambda_j. \quad \text{同理 } \chi_{\text{Alt}^2(V)}(g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

$$\text{由此可知, } \chi_V^2(g) = \chi_{\text{Sym}^2(V)}(g) + \chi_{\text{Alt}^2(V)}(g).$$

故 $\text{Sym}^2(V)$ 为 V 的对称表示. $\text{Alt}^2(V)$ 称为 V 的交错表示.

§5.3. 表示出现的重数.

命题: 如果 $V = n_1 V_1 \oplus \dots \oplus n_s V_s$ 为不可约表示的直和. 则 $n_i = \langle \chi_{V_i}, \chi_V \rangle$.

证明: 参见 §5.2 中命题的证明.

例: S_3 典范表示 V_1 . 想计算 V_1 在 S_3 的正则表示里出现的重数.

$$\begin{aligned} \langle \chi_{V_1}, \chi_{\text{Reg}} \rangle &= \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in G} \chi_{V_1}(g) \chi_{\text{Reg}}(g^{-1}) = \frac{1}{|S_3|} \chi_{V_1}(1) \chi_{\text{Reg}}(1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \times 6 = 2 = \dim V_1. \end{aligned}$$

$$g \in S_3 \quad \begin{pmatrix} g \cdot h_i \\ = h_i \end{pmatrix} \xrightarrow{h_i} g=1$$

§5.4. 张量积分解公式.

设 V_i, V_j 是两个不可约表示. $V_i \otimes V_j = \bigoplus N_{ij}^k V_k$ irreducible. What is N_{ij}^k ? fusion rule

$$N_{ij}^k = \langle \chi_{V_k}, \chi_{V_i} \chi_{V_j} \rangle.$$

例: 仍然考虑 S_3 中的典范表示 V_1 .

$$V_1 \otimes V_1 = n_1 V_{\text{trivial}} \oplus n_2 V_{\text{sgn}} \oplus n_3 V_1$$

$$n_1 = \langle \chi_{\text{trivial}}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_{\text{trivial}}(g) \chi_{V_1 \otimes V_1}(g) = \frac{1}{6} (1 \times 4 + 1 + 1) = 1,$$

$$n_2 = \langle \chi_{\text{sgn}}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6} (1 \times 4 + 1 + 1) = 1.$$

$$n_3 = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_1 \otimes V_1} \rangle = \frac{1}{6} (2 \times 4 - 1 - 1) = 1.$$

$$\therefore V_1 \otimes V_1 = V_{\text{trivial}} \oplus V_{\text{sgn}} \oplus V_1.$$

练习: 在 $V_1 \otimes V_1$ 中找出平凡表示和符号表示.

§6 不可约表示的个数.

§6.1 类函数回顾.

$Cf(G)$: 类函数全体. $f(g) = f(h)$.

令 $C_1, C_2, \dots, C_t$ 为 G 的所有共轭类. $C_i = \{g_i, g_i g, g^{-1}\} \mid g \in G$.

命题: $\dim Cf(G) = t$.

证明: 令 $V = \text{span}\{C_1, \dots, C_t\}$. 则 $Cf(G) = V^*$. $\square$

说明: $\because \chi_{V_i} \in Cf(G)$. 且 $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \delta_{ij}$.

$\therefore \{\chi_{V_i}\}$ 在 $Cf(G)$ 中是线性无关的.

从而 $\{\chi_{V_i}\}$ 的个数有限且 $\leq t$. 故在同构意义下, 不可约表示的个数有限.

§6.2 不可约表示的个数 (在同构意义下).

令 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 为 G 的所有互不同构的不可约表示.

定理: $s = t$.

为了证明这个定理, 先做一些准备. 关键去证明 $\chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_s}$ 是 $Cf(G)$ 的一组基.

构造: 令 (ρ, V) 为 G 的任意表示. $f \in Cf(G)$

$$\rho(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) \in \text{End}(V)$$

引理1: $\rho(f) \in \text{End}_G(V)$.

证明: $\forall h \in G$. $\rho(f)(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) gh \cdot v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) hgh^{-1} \cdot v$
 $= h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) (h^{-1}gh) \cdot v = h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(h^{-1}gh) hgh^{-1} \cdot v = h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) g \cdot v = h \cdot \rho(f)(v). \quad \square$

推论: 如果 V 是不可约的, 则 $\rho(f) = \frac{\langle f, \chi_V^* \rangle}{\dim V} \text{Id}_V$.

证明: $\rho(f) \in \text{End}_G(V)$. 由 Schur's lemma, $\rho(f) = \lambda \text{Id}_V$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\text{Tr}(\rho(f)) = \text{Tr}(\lambda \text{Id}_V) = \lambda \dim V$$

$$\text{Tr}(\rho(f)) = \text{Tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \text{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \chi_V(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \chi_V^*(g) = \langle f, \chi_V^* \rangle$$

$$\therefore \lambda = \frac{\langle f, \chi_V^* \rangle}{\dim V}. \quad \square$$

引理: $\rho(f)$ 具有以下简单性质: ① $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$. ② $(\rho_1 \oplus \rho_2)(f) = \rho_1(f) \oplus \rho_2(f)$.

证明. 由定义直接得到. $\square$

命题: 设 $f \in C_f(G)$. 如果 $\langle f, \chi_V \rangle = 0$ for all irreducible representations V , 则 $f = 0$.

证明: 考虑正则表示 ρ_{reg} . 由 Maschke's 定理, $\rho_{\text{reg}} = n_1 \rho_{V_1} \oplus \dots \oplus n_s \rho_{V_s}$.

$$\rho_{\text{reg}}(f) = \bigoplus_{i=1}^s n_i \rho_{V_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^s n_i \frac{\langle f, \chi_{V_i}^* \rangle}{\dim V_i} 1_{V_i} = 0$$

$$\rho_{\text{reg}}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho_{\text{reg}}(g). \because \rho_{\text{reg}}(f) = 0 \therefore \forall h \in G. \quad \rho_{\text{reg}}(f)(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho_{\text{reg}}(g)(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) gh = 0 \Rightarrow f(g) = 0 \text{ for all } g \in G.$$

$$\therefore f = 0. \quad \square$$

定理的证明: 如前所述, 只需证 $\chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_s}$ 为 $C_f(G)$ 里的基. 只需证任意 $f \in C_f(G)$ 均可由 $\chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_s}$ 表出.

$$\text{Claim: } f = \sum_{i=1}^s \langle f, \chi_{V_i} \rangle \chi_{V_i}$$

$$\text{Claim 的证明: 考虑 } f - \sum_{i=1}^s \langle f, \chi_{V_i} \rangle \chi_{V_i}.$$

$$\text{则 } \langle f - \sum_{i=1}^s \langle f, \chi_{V_i} \rangle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \langle f, \chi_{V_j} \rangle - \sum_{i=1}^s \langle f, \chi_{V_i} \rangle (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \langle f, \chi_{V_j} \rangle - \langle f, \chi_{V_j} \rangle = 0.$$

$$\text{由前面的命题知道, } f - \sum_{i=1}^s \langle f, \chi_{V_i} \rangle \chi_{V_i} = 0 \quad \square$$

§6.3. 正则表示回顾.

命题: 每个不可约表示均为正则表示的子表示, 且 V_i 在正则表示中出现了 $\dim V_i$ 次.

$$\text{证明. } \langle \chi_{V_i}, \chi_{\text{reg}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) \chi_{\text{reg}}(g) = \frac{1}{|G|} \chi_{V_i}(1) \chi_{\text{reg}}(1) = \chi_{V_i}(1) = \dim V_i \quad \square$$

$$\text{说明: } \mathbb{C}G = (\dim V_1) V_1 \oplus (\dim V_2) V_2 \oplus \dots \oplus (\dim V_s) V_s. \Rightarrow |G| = (\dim V_1)^2 + \dots + (\dim V_s)^2 = \sum_{i=1}^s (\dim V_i)^2.$$

练习: 1) 证明平凡表示在 V 中出现的重数 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$.

2) 证明: 设 V 是 G 的 χ 表示. 如果 $\chi_V(g) = 0$ for all $g \neq 1$. 则 $\exists a \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, s.t. $\chi_V = a \chi_{\text{reg}}$.

3) 求出 q 阶群的不可约特征标.