模论与表示论初步 第九讲

回顾：确定不可约表示的个数 = 共轭类的个数.

§7. 特征标表与第二正交关系（特征标）

设G是有限的群. 令 $C_1, C_2, \dots, C_s$ 为群G的全体共轭类. 令 $g_i \in C_i$, $h_i := \underline{|C_i|}$（共轭类所含元素个数）

这个群一定也有 s 个不可约表示，对应的特征标记为 χ_1（平凡表示）、$\chi_2, \dots, \chi_s$.

来构造下面的表

	$\overset{1}{\underset{C_1}{(1)}}$	$\overset{h_2}{\underset{C_2}{(g_2)}}$	$\cdots$	$\overset{h_s}{\underset{C_s}{(g_s)}}$
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	$\cdots$	$\chi_1(g_s)$
χ_2	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	$\cdots$	$\chi_2(g_s)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_s	$\chi_s(g_1)$	$\chi_s(g_2)$	$\cdots$	$\chi_s(g_s)$

← 特征标表

Character Table

中心任务：确定特征标.

第一正交关系：$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} h_k \underline{\chi_i(g_k)\chi_j(g_k^{-1})} = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}$

$= \delta_{ij}$. （行正交关系）

令 $X = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \cdots & & \cdots \\ \chi_s(g_1) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{pmatrix}$. 则和第一正交关系可以表述为

$$X \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_s \end{pmatrix} \overline{X}^T = |G| I_s .$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{X}^T X \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s \end{pmatrix} = |G| I_s}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_1(g_1)} & \overline{\chi_2(g_1)} & \cdots & \overline{\chi_s(g_1)} \\ \overline{\chi_1(g_2)} & \overline{\chi_2(g_2)} & \cdots & \overline{\chi_s(g_2)} \\ \overline{\chi_1(g_s)} & \cdots & \cdots & \overline{\chi_s(g_s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_s) \\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_s) \\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \cdots & \chi_s(g_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & \ddots h_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \sum_{k=1}^{s} \overline{\chi_k}(g_i)\,\chi_k(g_j)\,h_j & \cdots \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |G| & & \\ & |G| & \\ & & \ddots\ |G| \end{pmatrix}$$

推论：$\sum_{k=1}^{s} \overline{\chi_k(g_i)}\,\chi_k(g_j) = \frac{|G|}{h_j}\delta_{ij}$

说明：称上述的正交关系为第二正交关系. ← 列正交关系.

§8. 例子.

- 常用方法：① 共轭类的个数

  ② 合理利用这两个正交关系

  ③ $|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2$

• S_3. S_3 有三个共轭类 C_1, C_2, C_3.

$C_1=\{(1)\}$. $C_2=\{(12),(13),(23)\}$. $C_3=\{(123),(132)\}$

$h_1=1$, $h_2=3$. $h_3=2$.

特征 $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ & (1) & (12) & (123) \\ & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

第二正交关系

$1\times1+1\times-1+2\times\alpha$
$=0$

$6=|G|=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1+1+n_3^2=1+1+2^2$.

分别用到 $|G|=n_1^2+n_2^2+n_3^2$, + 第二正交

由前面的例子, 我们知道 S_3 还有一个典范表示. 这个典范表示就是 S_3 唯一的二维不可约表示.

说明: (对称群的共轭类). S_n. $\tau=(i_1\, i_2 \cdots i_n)$

$\sigma\in S_n$. $\sigma\tau\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\,\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_n))$

• $\tau=(i^1_1\cdots i^1_{s_1})(i^2_1\cdots i^2_{s_2})\cdots(i^t_1\cdots i^t_{s_t})$ $\underbrace{(12)}\underbrace{(34)}$

循环轮换的乘积, $\tau=\prod_{j=1}^{t}(i^j_1\cdots i^j_{s_j})$

$\tau \rightsquigarrow (s_1, s_2, \dots, s_t)$ $(\sum s_i=n)$

$\therefore\ \forall\tau\in S_n$, 都$\exists!$的 n 的 partition $n_\tau:=(s_1, s_2, \dots, s_t)$

Conclusion: τ 与 τ' 在同一共轭类 $\Longleftrightarrow$ $n_\tau=n_{\tau'}$.

• S_4. 4. $(1,1,1,1)$ 平凡 $(2,1,1,0)$. 对换 $(12),(13)\cdots$ $(2,2,0,0)$ $(12)(34),\cdots$ $(3,1,0,0)$ $(123),(124)\cdots$ $(4,0,0,0)$ $(1234),(1324)\cdots$.

命题: 设 $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G'$ 是群的满同态. V 为 G' 的一个不可约表示. 则 $\rho': G \xrightarrow[\rho':=\rho\circ\pi]{} GL_V$ 也是一个不可约表示.

$\rho: G'\to GL_V$.

$G \xrightarrow{\pi} G' \xrightarrow{\rho} GL_V$ is irreducible.

证明: 设 $V_1\subset V$ 是 V 的一个真子表示.

$\therefore\ G \circlearrowright V_1\subseteq V_1$. $\forall g\in G$. $v\in V$. $g\cdot v \underset{\uparrow V_1}{=} \underline{\pi(g)\cdot v}$. 但是 π 是满射. $\therefore\ \pi(G)=G'$. 因而 $G'\cdot V_1\subseteq V_1$.

$\therefore\ V_1<V$ 也是作为 G'-表示的子表示.

但是 V 作为 G'-模是不可约的. $\therefore\ V_1=V$ or $V_1=0$. ↯. □.

近世代数: $K_4 \triangleleft S_4$. $K_4=\{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$.

? $\boxed{S_4/K_4 \cong ?}$. Conclusion: $S_4/K_4\cong S_3$.

$\pi: S_4 \twoheadrightarrow S_3$

$(1) \longmapsto (1)$, $(12) \longmapsto (12)$, $(12)(34) \longmapsto (1)$

$(123) \longmapsto (123)$, $(1234) \longmapsto (13)$.

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

	1	6	8	3	6
	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1 a	0 b	$\overset{-1}{c}$	$\overset{-1}{d}$
χ_5	3	-1	0	-1	1

$24 = n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2 = 1+1+4+n_4^2+n_5^2 \Rightarrow n_4 = n_5 = 3$.

行正交关系:
$$\begin{cases} 3+6a+8b+3c+6d=0 \\ 3-6a+8b+3c-6d=0 \\ 6+0-8b+6c+0=0 \\ 9+6|a|^2+8|b|^2+3|c|^2+6|d|^2=24 \end{cases}$$

$\Longrightarrow b=0,\ c=-1,\quad \begin{cases} a=1 \\ d=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ d=1 \end{cases}$.

待补: 写出 χ_3, χ_4, χ_5 对应的表示.

- 计算 $\chi_2 \cdot \chi_3 \rightsquigarrow V_2 \otimes V_3$. $\chi_2 \cdot \chi_4 = ?$

  $\chi_4 \cdot \chi_4 = ? \rightsquigarrow V_4 \otimes V_4$

- $D_8 = \{x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yxy = x^{-1}\}$

$x^2 \in C(D_8) =$ Center of D_8.

$D_8 / \langle x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$ $\quad \overline{yxy^{-1}} = \overline{x^{-1}} \Rightarrow \overline{yx} = \overline{xy}$

$\rho_1: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto 1,\ y \mapsto 1$ $\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x \mapsto 1,\ y \mapsto -1$. $\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x \mapsto -1,\ y \mapsto 1$. $\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ $x \mapsto -1,\ y \mapsto -1$.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow$

	(1) C_1	(x) C_2	(y) C_3	(xy) C_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

$yxy^{-1} = x^3$

$xyx^{-1} = x^2 y$

D_8.

$\Downarrow$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	1	1	2	2	2
	(1)	(x^2)	(x)	(y)	(xy)
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

$8 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$

练习: 写出 V_5. （回顾二面体群的表示）.

- 计算一下 $V_5 \otimes V_5$ 的张量积分解公式.

（关键词: Fusion Category 范畴的概念）

- $Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ xy = y^3 x \rangle$.

$Q_8 / (x^2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	1	1	2	2	2
	(1)	(x^2)	(x)	(y)	(xy)
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Q_8 与 D_8 具有相同的特征标表.

但 $Q_8 \not\cong D_8$ 作为群. （考察它们元的阶）

练习: ① 确定 Q_8 的二维表示是如何的?

② 确定 Q_8 的张量积分解公式.

③ 计算指示量: $\nu_2(V) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2)$. （2阶 Frobenius-Schur's Indicator）.

④ 尝试推广 n阶 Frobenius-Schur indicator.

- 交换群的情况.

命题. 群G(有限)是交换的 $\Leftrightarrow$ G的所有不可约表示都是一维的.

证明: "$\Rightarrow$" ∵ G是交换的. ∴ 所有共轭类里都只含一个元素. ∴ $|G| = n_1^2+n_2^2 \cdots + n_{|G|}^2$ ∴ $n_1=n_2=\cdots=n_{|G|}=1$.

故所有不可约表示都是一维的.

"$\Leftarrow$" ∵ 所有不可约表示都是一维的. ∴ 由

$$|G| = n_1^2+n_2^2+\cdots+n_s^2 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{s}$$ ∴ $s=|G|$. 即 G有 $|G|$ 个共轭类. 故每个共轭类里只有 1个元素. ∴ G是交换的.

练习(扩展): Potryagin (庞得里亚金) 对偶.

考虑一个特殊情形: $\mathbb{Z}_n$.

令 $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

$$\rho_j: \underset{=\langle g\rangle}{\mathbb{Z}_n} \longrightarrow \mathbb{C}^*.\quad g\mapsto \xi_n^j,\quad g^l \mapsto (\xi_n^j)^l.$$

ρ_j 显然是 $\mathbb{Z}_n$ 的一个不可约表示 for $0\le j\le n-1$

练习: 证明 $\rho_j \ncong \rho_{j'}$ 若 $j\neq j'$. $(0\le j,j'\le n-1)$.

∴ 找到了 $\mathbb{Z}_n$ 的 n个不可约表示.

观察: $\rho_j \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} = (\mathbb{C}\mathbb{Z}_n)^*$.

$$\rho_j\rho_{j'}(g) = \rho_j(g)\rho_{j'}(g) = \xi_n^{j+j'} = \rho_{j+j'}(g).$$

∴ $\{\rho_0, \rho_1 \dots \rho_{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n$. We denote this group by $\widehat{\mathbb{Z}}_n$: 特征标群. (庞得里亚金对偶).

$\widehat{(\widehat{\mathbb{Z}}_n)} \cong \mathbb{Z}_n$.