Memo No.
Date / /

模论与表示论初步

"representation theory"的字面意思是表现论，所做的事情是把抽象代数中抽象的内容具体化地表现出来。

数学不是逻辑的游戏。如果把数学比作一本小说，那么逻辑就是语法。换言之，数学需要逻辑的支撑，但不是逻辑的堆砌。

"All of mathematics is some kind of representation theory." —— I. M. Gelfand

History:

① 1896 Frobenius, linear representation of finite groups, character theory（有限群的线性表示，特征标理论）

② 1905 Schur, Schur's Lemma, 简化了 Frobenius 的工作，使得表示论有了现代的形式。

③ Cartan（陈省身的老师）等人将 Frobenius 的工作推广至紧群

④ Killing, Cartan 等人将紧群上的理论推广至李群（Lie Groups）

⑤ A. Borel 将表示论推广至一般线性代数的群

⑥ Brauer, Schur 的学生，有限群的模表示论

(Modular Representation Theory of Finite Groups)

References:

1. GTM 42, "Linear Rresentation of Finite Groups"
《有限群的线性表示》 J. P. Serre.

2. 冯克勤，章璞，李尚志《群与代数表示引论》，中科大出版社

3. GTM 129 "Representation Theory"《表示论基本教程》.

Memo No.
Date / /

Fulton-Harris，这本书重点介绍的是④⑤⑥的内容，需熟悉①②③才能看懂。

Content：

第一章 代数表示论

§1 结合代数（Associative Algebra）

Let F be a field.

Definition： A vector space A over F is called an associative algebra over F if $\exists\ A\times A\to A$, $(a,b)\mapsto ab$ satisfying

① $(ab)c=a(bc)$

② $\exists\ 1\in A$ s.t. $1a=a1=a$, $\forall a\in A$.

③ $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$, $\forall a,b,c\in A$

④ $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ $\forall a,b,c\in A$, $\lambda\in F$.

Remark：线性空间有8条性质，结合代数又有4条额外的性质。

Examples：

(1) $M_n(F)$，域F上的$n\times n$方阵，它是F上n^2维的线性空间依矩阵的乘法构成结合代数

(2) $F[x]$ F上的一元多项式环，依多项式的乘法构成结合代数

(3) $L(V)=\{\mathscr{A}: V\to V \mid \mathscr{A} \text{ is a linear map}\} = \mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_F(V)$

$\forall \lambda\in F,\ v\in V,\ (\lambda\cdot\mathscr{A})(v)=\lambda\mathscr{A}(v)$

$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(v)=\mathscr{A}(v)+\mathscr{B}(v)$, $(\mathscr{A}\mathscr{B})(v)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(v))$

线性变换依加法、数乘、复合也构成结合代数.

(4) Hamilton 四元数因不满足乘法交换律而不是域.

设 H 为 $\mathbb{R}$ 上的一个四维线性空间, $1, i, j, k$ 是一组基

由①~④的性质我们只需定义 $1, i, j, k$ 之间的乘法表即可. 性质②③④不需要验证, 而结合律①需要验证. 若逐一验证则需要64个式子.

思考题: 有没有简单的方法能验证右边的乘法表具有结合律呢?

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

(5) Group Algebra

设 G 是一个群, F 是一个域.

Define the group algebra denoted by FG.

① FG is the vector space spanned by $\{g \mid g\in G\}$

$FG=\{\sum_{g\in G}\lambda_g g \mid \lambda_g\in F\}$.

G 可以是无限群, 但 $\sum_{g\in G}\lambda_g g$ 必须是有限和, 不为0的 λ_g 只有有限个.

例: $G=\mathbb{Z}_2=\{e, g\}$, $FG=\{\lambda_1 e+\lambda_2 g \mid \lambda_1, \lambda_2\in F\}$, $\dim(FG)=2$

② $\forall g_1, g_2\in G$, $g_1\circ g_2=g_1g_2$. 结合代数 FG 中的乘法就是群 G 的运算

思考题2: $D_8=\langle x, y \mid x^4=y^2=1,\ yx=x^3y\rangle$ 为二面体群.

$Q_8=\langle i, j \mid i^4=j^4=1,\ i^2=j^2,\ ij=j^3i\rangle=\{\pm1, \pm i,$

$\pm j, \pm k\}$ 为四元数群，证明：$D_8 \not\cong Q_8$，$\mathbb{C}D_8 \cong \mathbb{C}Q_8$

群是不同构的，但在复数域上的群代数同构。

§2 代数同态

定义 设 A、B 为域 F 上的两个结合代数（F-代数）

$f: A \to B$ 称为一个代数同态 (morphism) 如果

① $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2)$，$\forall a_1, a_2 \in A$．$f(ka) = kf(a)$，$\forall k \in F, a \in A$

② $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$，$\forall a_1, a_2 \in A$

③ $f(1_A) = 1_B$

在没有乘法逆元的情况下 ② 不能推出 ③，③ 是必要的．

定义 $\ker(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\} = \{f(a) : a \in A\} = f(A)$

定义 称子集 $I \subseteq A$ 是 A 的一个理想 如果

① I 是线性空间 A 的子空间

② $\forall a \in A$，$aI \subseteq I$，$Ia \subseteq I$．

这与环中的理想 (ideal) 定义是一致的，记为 $I \trianglelefteq A$．

定义 子集合 $A_1 \subset A$ 称为 A 的一个子代数 (subalgebra) 如果

① A_1 是线性空间 A 的子空间

② $\forall a, b \in A_1$，$ab \in A_1$（乘法的封闭性）（定义与子环一致）

命题 (1) $\ker(f) \trianglelefteq A$

(2) $\mathrm{Im}(f)$ 是 B 的一个子代数

(3) $A/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ （证明留作习题）

Memo No.
Date / /

§3 代数的表示

定义 设A是一个F-代数，称pair (V,ρ) 为A的一个(线性)表示，

如果 ① V是F上的线性空间

② $\rho: A \to \mathrm{End}_F(V)$ 为一个代数同态

例：$\mathbb{Z}_2 = \{1, g\} = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$. $F\mathbb{Z}_2$ 为F上的结合代数

令 $V = \mathrm{span}\{e_1, e_g\}$ 为一个二维线性空间，

$\rho: F\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{End}_F(V)$. $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

用V中的基确定，可用矩阵表示线性变换，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是恒等变换，

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 就是把 e_1 映到 e_g，e_g 映到 e_1，容易验证 ρ 保持乘法.

定义 设 (V,ρ) 为A的一个表示，

① 称子空间 $W \subset V$ 为A的一个子表示，如果 $\rho(a)(W) \subseteq W$, $\forall a \in A$.

i.e. 对每个 $\rho(a)$，W是V的不变子空间

例：前面的例子 $V_1 = \mathrm{span}\{e_1 + e_g\}$, $\rho|_{V_1}: F\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{End}_F(V_1)$

这就是 (V,ρ) 的一个子表示. $\mathrm{End}_F(V_1) \cong F$.

② 一个表示称为不可约的如果它除了自身和0之外没有别的子表示

A representation is ineducible if it doesn't have any non-trivial sub-representation.

③ 设 (ρ_1, V_1) 为A的一个表示，称 $(V \oplus V_1, \rho \oplus \rho_1)$ 为A的一个直和表示

$\rho \oplus \rho_1: A \to \mathrm{End}_F(V \oplus V_1)$, $a \mapsto \begin{pmatrix} \rho(a) & \\ & \rho_1(a) \end{pmatrix}$

④ 一个表示称为不可分解的(indecomposable)

如果它不能表示为两个子表示的直和.

由定义，不可约表示都是不可分解的.

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.
Date / /

前面的例子 $V_2=\mathrm{span}\{e_1-e_g\}$, $\rho|_{V_2}: F\mathbb{Z}_2\to \mathrm{End}_F(V_2)$.

将 V 的基改为 $(e_1+e_g,\ e_1-e_g)$, $\rho: F\mathbb{Z}_2\to\mathrm{End}_F(V)$

$g\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $1\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 都是对角阵 $\therefore V=V_1\oplus V_2$

这个表示是可分解的.

§4 表示论基本任务

① 分类所有不可约表示

② 分类所有不可分解表示

§5 模

这一节我们先定义结合代数上的模，之后会将之推广到环上.

定义 设 A 为一个 F-代数. V 为 F 上的一个线性空间.

V 称为 A 上的一个模 (module) 如果存在映射 $A\times V\to V$,

$(a,m)\mapsto a\cdot m$ 满足

① $a\cdot(m_1+m_2)=a\cdot m_1+a\cdot m_2$, $\forall a\in A,\ m_1.m_2\in V$.

② $a\cdot(km)=k(a\cdot m)$, $\forall k\in F,\ a\in A,\ m\in V$

} 保 V 两种运算

③ $(a_1+a_2)\cdot m=a_1\cdot m+a_2\cdot m$ $\forall a_1.a_2\in A,\ m\in V$

④ $(ka)\cdot m=k(a\cdot m)$, $\forall k\in F,\ a\in A,\ m\in V$

⑤ $(a_1a_2)\cdot m=a_1\cdot(a_2\cdot m)$ $\forall a_1.a_2\in A,\ m\in V$.

} 保 A 三种运算

⑥ $1\cdot m=m$, $1=1_A\in A$. $\forall m\in V$. 幺元特殊性

V 是 A 的一个模则称 A 可以作用在 V 上 (类似群作用在集合上)

定理: (V,ρ) 是 A 的一个表示 $\Longleftrightarrow$ V 是 A 的一个模

"$\Rightarrow$": $\rho: A\to\mathrm{End}_F(V)$, $a\mapsto\rho(a)$.

Memo No.
Date / /

定义一个映射 $A\times V\to V$, $(a,v)\mapsto \rho(a)v$, 即线性变换 $\rho(a)$ 作用于 v, $a\in A$, $v\in V$.

因为 $\rho(a)$ 是线性变换, 所以模的性质①②有了. 而 ρ 为代数同态的性质①②③恰好对应模的性质③④⑤⑥.

"$\Leftarrow$", 已有一个模 $A\times V\to V$ $(a,v)\mapsto a\cdot v$,

定义表示 $\rho: A\to End_F(V)$, $a\mapsto \rho(a)$,

$\rho(a)v=a\cdot v$. i.e. $\rho(a): V\to V$, $v\mapsto a\cdot v$, $\forall v\in V$.

例: $\rho: F\mathbb{Z}_2\to End_F(V)$, $V=F\mathbb{Z}_2$.

$1\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $g\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 那么可将 $F\mathbb{Z}_2$ 看成 $F\mathbb{Z}_2$ 的一个模.

$g\in F\mathbb{Z}_2$. $g\cdot v=gv$ $\forall v\in F\mathbb{Z}_2$.

定义 由模的定义知 A 是 A 自身上的模, 作用于 A 上的方式为

$A\times A\to A$, $(a_1,a_2)\mapsto a_1a_2$. 对应的表示称为正则表示,

ρ_{reg}: $\rho: A\to End_F(A)$. $a\mapsto\rho(a)$. $\rho(a): A\to A$, $b\mapsto ab$.

$a,b\in A$. $\rho(a)1_A=a1_A=a$. $\rho(a)=0\Leftrightarrow a=0$

ρ 是一个单射, 因此任何有限维的结合代数均可嵌入矩阵.

第2章 群表示

§1 张量积 (Tensor Product)

1. 张量积的定义

本节默认 R 是一个幺环.

定义 若集合 M 的元素依加法构成 Abel 群, 则称 M 为一个加群.

定义 设加群 M 为一个左 R-模 如果存在映射 $R\times M\to M$, $(r,m)\mapsto r\cdot m$

Memo No.
Date / /

满足 (1) $r\cdot(m_1+m_2)=r\cdot m_1+r\cdot m_2$

(2) $(r_1+r_2)\cdot m=r_1\cdot m+r_2\cdot m$

(3) $(r_1r_2)\cdot m=r_1\cdot(r_2\cdot m)$

(4) $1_R\cdot m=m$

$\forall m.m_1.m_2\in M.\ r.r_1.r_2\in R$.

例：$\mathbb{Z}$为整数环，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$依加法构成Abel群，其中p为任意素数。

定义 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$(a,\bar{b})\mapsto\overline{ab}$

$(a,\bar{b_1})=(a,\bar{b_2})\Rightarrow p\mid b_1-b_2\Rightarrow p\mid a(b_1-b_2)\Rightarrow p\mid ab_1-ab_2$

$\Rightarrow ab_1\equiv ab_2\pmod p\Rightarrow\overline{ab_1}=\overline{ab_2}$。上面的映射 well-defined.

容易验证上面4条性质成立，因此$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$是个左$\mathbb{Z}$-模。

但$\mathbb{Z}$不是$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$模，将$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$作用在$\mathbb{Z}$上，$\bar{0}\cdot1=0$，$\bar{p}\cdot1=0$，

$\bar{p}\cdot1=(\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}}_{p个1})\cdot1=p\neq0$，矛盾，因此$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$不是$\mathbb{Z}$-模。

ex：给出右R-模的定义

定义 设$R.S$为两个幺环，M为加群，如果${}_RM$是一个左R-模，M_S是一个右S-模，且有$(r\cdot m)\cdot s=r\cdot(m\cdot s)$，$\forall r\in R.\ m\in M.\ s\in S$.

则称M为一个R-S双模。

定义 设${}_RM$为一个左R-模，N_R为一个右R-模，则N_R与${}_RM$的张量积通过以下方式定义：

① 令$\langle N\times M\rangle$为$N\times M$生成的自由Abel群。(即仅把$M.N$看做集合而不考虑其中的加法结构)。

② 令S为以下元素生成的群：

1) $(n_1+n_2,m)-(n_1,m)-(n_2,m)$

2) $(n, m_1+m_2)-(n,m_1)-(n,m_2)$

3) $(n\cdot r, m)-(n, r\cdot m)$

③ N与M的张量积定义为 $\langle N\times M\rangle/S$，$\langle N\times M\rangle$ 模 S 的商群.

记为 $N\otimes_R M$，张量积的结果是一个加群.

Remark：$\pi: \langle N\times M\rangle \to N\otimes_R M$，$n\times m \mapsto n\otimes m$ 为自然同态.

性质：① $(n_1+n_2)\otimes m = n_1\otimes m + n_2\otimes m$

② $n\otimes(m_1+m_2) = n\otimes m_1 + n\otimes m_2$

③ $n\cdot r\otimes m = n\otimes r\cdot m$

例1 $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

$n\otimes m = 1\cdot n\otimes m = 1\otimes n\cdot m = 1\otimes mn$

$\sum_i n_i\otimes m_i = \sum_i 1\otimes n_i m_i = 1\otimes \sum_i n_i m_i$

$\therefore \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \cong 1\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

例2 记 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，则 $\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

其中 (m,n) 为 m与n的最大公因数，证明留作习题.

例3 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m = 0$.

$\forall a\in\mathbb{Q}$，$s\in\mathbb{Z}$，$a\otimes\bar{s} = \frac{a}{m}\cdot m\otimes\bar{s} = \frac{a}{m}\otimes m\cdot\bar{s} = \frac{a}{m}\otimes\bar{0} = 0$

上述例子表明环上的张量积常产生令人意想不到的结果，

对研究代数拓扑的人来说这令人发怵，而研究黎曼几何的人通常

只考虑线性空间的张量积，则不会遇到这些麻烦.

2、泛性质 (universal property)

设 N_R，${}_RM$ 分别为右、左-R模，L是一个加群.

称 $\varphi: N\times M \to L$ 是一个平衡双线性映射，如果

① $\varphi(n_1+n_2, m) = \varphi(n_1, m) + \varphi(n_2, m)$

② $\varphi(n, m_1+m_2) = \varphi(n, m_1) + \varphi(n, m_2)$

③ $\varphi(n\cdot r, m) = \varphi(n, r\cdot m)$

以上是平衡双线性映射(balanced bilinear map)的定义.

命题(泛性质)

设 N_R, ${}_RM$ 分别为右、左 R-模, L为一个加群. 设 $\varphi: N\times M \to L$ 为平衡双线性映射, 则存在唯一的加群同态 $\bar{\varphi}: N\otimes_R M \to L$ 使得右边的映射交换图表成立. (证明留作习题)

$$\begin{tikzcd} N\times M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N\otimes_R M \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ L & \end{tikzcd}$$

$\varphi = \bar{\varphi}\circ\pi$.

3. 线性空间的张量积

取 V. W为域F上的两个线性空间, 则 V. W是两个 F 模 (运算是线性空间上数乘, 交换的, 左右不重要) 由刚才模的张量积, 即可定义线性空间的张量积 $V\otimes_F W$, 它是个加群, 并且还是F上的线性空间.

$\forall \lambda\in F$, $v\otimes w\in V\otimes W$, $\lambda v\otimes w = \lambda(v\otimes w) = v\otimes \lambda w$

泛性质:

设L是一个线性空间, $\varphi: V\times W \to L$ 为平衡双线性映射 i.e.

① $\varphi(v_1+v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$

② $\varphi(v, w_1+w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$

③ $\varphi(\lambda v, w) = \varphi(v, \lambda w) = \lambda\varphi(v, w)$

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & V\otimes_F W \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ L & \end{tikzcd}$$

则存在唯一的线性映射 $\bar{\varphi}: V\otimes_F W \to L$ 右图. $\varphi = \bar{\varphi}\circ\pi$

命题 $\dim V\otimes_F W = \dim V\cdot \dim W$

令 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$为$V$的一组基, $\beta_1, \beta_2 - \beta_n$ 为W的一组基.

Memo No.
Date / /

Claim: $\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ 为 $V\otimes_F W$ 的一组基

Lemma 1 $F\otimes_F V \cong V$

proof: $F\otimes_F V \to V$, $(\lambda, v)\mapsto \lambda v$

$V\to F\otimes_F V$, $v\mapsto 1\otimes v$, 互为逆映射

Lemma 2 $(V_1\oplus V_2)\otimes W \cong (V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$

线性空间的张量积对直和有分配律.

proof: Φ: $(V_1\oplus V_2)\otimes W \to (V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$

$(v_1+v_2)\otimes w \mapsto v_1\otimes w + v_2\otimes w$

两个嵌入映射: $V_1\otimes W \xrightarrow{i_1} (V_1\oplus V_2)\otimes W$, $v_1\otimes w\mapsto v_1\otimes w$

$V_2\otimes W \xrightarrow{i_2} (V_1\oplus V_2)\otimes W$, $v_2\otimes w\mapsto v_2\otimes w$

$\Psi = i_1+i_2$: $(V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)\to (V_1\oplus V_2)\otimes W$ 是 Φ 的逆映射.

现在我们可以证明上面的命题了.

$$V\otimes W = (F\alpha_1\oplus F\alpha_2\oplus\cdots\oplus F\alpha_m)\otimes W$$

$$\cong (F\alpha_1\otimes W)\oplus(F\alpha_2\otimes W)\oplus\cdots\oplus(F\alpha_m\otimes W)$$

$$\cong W\oplus W\oplus\cdots\oplus W \quad (m\text{个}W)$$

$\therefore \dim(V\otimes W) = mn$.

$\forall v\in V, w\in W$. 设 $v=\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i$, $w=\sum_{j=1}^n l_j\beta_j$.

$$v\otimes w = \left(\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^n l_j\beta_j\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n k_i l_j(\alpha_i\otimes\beta_j)$$

$V\otimes W$ 中的任一元素均可表出, 证毕。

§2 群表示

定义 设 G 是一个群, V 是一个 F-线性空间,

$\rho: G \to GL_V$ 称为群 G 的一个表示，如果 ρ 是一个群同态

Remark：之前代数的表示是映到 $End_F(V)$（V 上的线性变换或 V 到自身的同态映射），而群表示则映到 GL_V（V 上的线性自同构），这是因为群中的元素都有逆元。

有时，也称 ρ 是一个 G-表示，或 V 是一个 G-表示。

例 1（平凡表示）$V=F$，$\rho: G \to GL_F = F\setminus\{0\}$，$g \mapsto 1$，$\forall g \in G$.

例 2 sign representation，符号表示，

$sgn: S_n \to GL_F = F\setminus\{0\}$，

$\sigma \mapsto 1$，σ 是偶排列；$\sigma \mapsto -1$，σ 是奇排列。

命题：V 是一个 G-表示 $\Leftrightarrow$ V 是一个 FG 表示

"$\Rightarrow$"：$\rho: G \to GL_V$ 为群同态，扩张 $\rho': FG \to End_F(V)$，

$\sum_{g\in G} k_g g \mapsto \sum_{g\in G} k_g \rho(g)$，$k_g \in F$.

"$\Leftarrow$"：$\rho': FG \to End_F(V)$ 为代数同态，令 $\rho = \rho'|_G : G \to GL_V$.

$\rho'(g^{-1})\rho'(g) = \rho'(g^{-1}g) = \rho'(1) = id_V \in GL_V$.

如果表示是嵌入（ρ 是单射）则群的信息全部在矩阵中反映出来

例 3（正则表示），regular representation

群 G 在群代数 FG 上的作用就是群 G 的正则表示

记 $V=FG$，$\forall v \in V$，$v = \sum_{g\in G} k_g g$，$k_g \in F$，

$\rho: G \to GL_V$，$g' \mapsto \rho(g')$，$\rho(g'): V \to V$，$\sum_{g\in G} k_g g \mapsto \sum_{g\in G} k_g g'g$.

记 $|G| = n$，G 是 FG 的一组基，$\forall g \in G$，$\rho(g)$ 在 G 这组基下的矩阵 $B_{n\times n}$ 否是每行每列各有 1 个 1，其余元素均为 0.

例 4 $V = F\mathbb{Z}_n$，$\mathbb{Z}_n \curvearrowright F\mathbb{Z}_n$，$\mathbb{Z}_n$ 作用在 $F\mathbb{Z}_n$ 上的表示，是一个正则表示，

记 $\int=\sum_{g\in Z_n} g$. $h\cdot\sum_{g\in Z_n} g=\sum_{g\in Z_n} hg=\sum_{g\in Z_n} g$, $\forall h\in Z_n$ (例4限制) $F=\mathbb{C}$)

(1) $F\int$ 是平凡表示，

(2) $V_1=\sum_{n=0}^{n-1}\xi^i g^i$. $Z_n=\langle g\mid g^n=1\rangle$, $\xi=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ n次单位根，

FV_1 是一个 G-表示，

(3) $V_j=\sum_{i=1}^{n-1}(\xi^i)^j g^i$. FV_j 是一个 G-表示，

(4) $FZ_n=\bigoplus_{j=0}^{n-1}FV_j$，把正则表示分解成了 n 个一维表示的直和。

§3 表示之间的同态

定义 设 V_1. V_2 是群 G 的两个表示，$\rho_1: G\to GL_{V_1}$. $\rho_2: G\to GL_{V_2}$.

称线性映射 $f: V_1\to V_2$ 为表示之间的同态. 如果

$f(\rho_1(g)(v))=\rho_2(g)f(v)$, $\forall v\in V_1$. $g\in G$.

用模的记号可以简记为 $f(g\cdot v)=g\cdot f(v)$.

若 $v_1\in V_1$. 则 $g\cdot v_1=\rho_1(g)(v_1)$;

若 $v_2\in V_2$, 则 $g\cdot v_2=\rho_2(g)(v_2)$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

映射交换图

Remark: 如果 $f: V_1\to V_2$ 是 G 的两个表示之间的同态. 则

$\ker(f)=\{v\in V_1 \mid f(v)=0\}$ 是 V_1 的子表示，

$\operatorname{Im}(f)=\{f(v)\mid v\in V_1\}$ 是 V_2 的子表示，

$V_1/\ker(f)\cong\operatorname{Im}(f)$ (证明留作习题).

§4 表示的常用构造法

① 直和表示

设 V_1. V_2 为 G 的两个表示，则 $V_1\oplus V_2$ 也是 G 的表示.

Memo No.
Date / /

$g\cdot(v_1+v_2)=g\cdot v_1+g\cdot v_2$. 矩阵是个准对角阵.

② 张量表示

设 (V_1,ρ_1) (V_2,ρ_2) 是 G 的两个表示，则 $V_1\otimes V_2$ 通过以下方式

也成为 G 的一个表示： $\rho_{V_1\otimes V_2}: G\to GL_{V_1\otimes V_2}$, $g\mapsto \rho_{V_1\otimes V_2}(g)$

$\rho_{V_1\otimes V_2}(g)$: $V_1\otimes V_2\to V_1\otimes V_2$, $v_1\otimes v_2\mapsto \rho_1(g)v_1\otimes\rho_2(g)v_2$

用模的记号简记为 $g\cdot(v_1\otimes v_2)=g\cdot v_1\otimes g\cdot v_2$

Remark: $\rho_{V_1\otimes V_2}(g_1g_2)=\rho_{V_1\otimes V_2}(g_1)\rho_{V_1\otimes V_2}(g_2)$

验证: $(g_1g_2)\cdot(v_1\otimes v_2)=(g_1g_2)\cdot v_1\otimes(g_1g_2)\cdot v_2=g_1\cdot(g_2\cdot v_1)\otimes g_1\cdot(g_2\cdot v_2)$

$=g_1\cdot(g_2\cdot v_1\otimes g_2\cdot v_2)=g_1\cdot g_2\cdot(v_1\otimes v_2)$

Remark: 一般代数无法通过此方式定义张量表示.

这边我觉得有点省略

$\rho_1: A\to End_F(V_1)$ $\rho_2: A\to End_F(V_2)$

是结合代数 A 的两个表示. 模仿: $a\cdot(v_1\otimes v_2)=a\cdot v_1\otimes a\cdot v_2$.

$\rho: A\to End_F(V_1\otimes V_2)$. $\rho(a)(v_1\otimes v_2)=\rho_1(a)(v_1)\otimes\rho_2(a)(v_2)$

$\forall\lambda\in F$. $\rho(\lambda\cdot 1)(v_1\otimes v_2)=\rho_1(\lambda\cdot 1)(v_1)\otimes\rho_2(\lambda\cdot 1)(v_2)$

$=\lambda v_1\otimes\lambda v_2=\lambda^2 v_1\otimes v_2$.

$\rho(1)(v_1\otimes v_2)=v_1\otimes v_2$, $\lambda\rho(1)(v_1\otimes v_2)=\lambda v_1\otimes v_2$

则 $\lambda\rho(1)\neq\rho(\lambda\cdot 1)$. ρ 不是线性的. 加法、数乘都不保持.

但是 群代数是可以有张量表示的(依据第2节的命题).

ex: 给出群代数张量表示的刻画.

Remark: 张量表示的矩阵形式

令 $\{\alpha_i\mid 1\le i\le m\}$ $\{\beta_j\mid 1\le j\le n\}$ 分别为 V_1. V_2 的一组基,

$\rho_1: G\to GL_{V_1}$, $\rho_2: G\to GL_{V_2}$,

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

$\rho_1(g)(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)A$，$A=(a_{ij})_{m\times m}$

$\rho_2(g)(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)B$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$

$\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ 是 $V_1\otimes V_2$ 的一组基，那么

$\alpha_1\otimes\beta_1, \alpha_1\otimes\beta_2, \cdots, \alpha_1\otimes\beta_n, \alpha_2\otimes\beta_1, \alpha_2\otimes\beta_2, \cdots, \alpha_2\otimes\beta_n, \cdots\cdots$

$\alpha_m\otimes\beta_1, \alpha_m\otimes\beta_2 \cdots \alpha_m\otimes\beta_n$，将 mn 个元素排成一行。

$\rho(g)$ 在这组基下的矩阵就是右边那个

记为 $A\otimes B$，$mn\times mn$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

$tr(A\times B)=tr(A)tr(B)$

③ 反抗表示（对偶表示）

设 V 为 G 的一个表示，V^* 为 V 的对偶空间，$V^*=\{f: V\to F \mid f \text{ 线性}\}$

定义 在 V^* 上定义如下的作用：

$\rho: G\to GL_{V^*}$，$g\mapsto\rho(g)$，$\rho(g): V^*\to V^*$，$f\mapsto g\cdot f$.

$(g\cdot f)(v)=f(g^{-1}\cdot v)$，$\forall v\in V$. 称此表示为 V 的反抗表示

验证：只需验证 $(g_1g_2)\cdot f=g_1\cdot(g_2\cdot f)$，$\forall f\in V^*$，$g_1,g_2\in G$

$((g_1g_2)\cdot f)(v)=f((g_1g_2)^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}g_1^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot v))$

$(g_1\cdot(g_2\cdot f))(v)=(g_2\cdot f)(g_1^{-1}\cdot v)=f(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot v))$

④ $Hom_F(U,V)$

设 U,V 是 G 的两个表示，$Hom_F(U,V)$ 通过以下方式

也成为 G 的一个表示

$f\in Hom_F(U,V)$，$g\in G$，$g\cdot f: U\to V$，$u\mapsto g\cdot f(g^{-1}\cdot u)$.

验证：只需验证 $(g_1g_2)\cdot f=g_1\cdot(g_2\cdot f)$，留作习题.

命题：$Hom_F(U,V)\cong U^*\otimes V$ 是表示的同构.

Memo No.
Date / /

证明：设 $\dim U = m$，$\dim V = n$，$\dim Hom_F(U,V) = mn = \dim U^* \otimes V$.

令 $\Phi: U^* \otimes V \to Hom_F(U,V)$ 　$f \otimes v \mapsto \Phi(f \otimes v)$

$\Phi(f \otimes v): U \to V$，$u \mapsto f(u)v$.

1) Φ 是单射. 如果 $\Phi(f \otimes v) = 0$. 即 $\forall u \in U$，$\Phi(f \otimes v)(u) = 0$.

i.e. $f(u)(v) = 0$. 则 $v = 0$ 或 $f = 0$ $\Rightarrow$ Φ 是单射 ($\ker(\Phi) = \{0\}$)

由于 $\dim Hom_F(U,V) = \dim U^* \otimes V$，$\Phi$ 也是满射.

2) Φ 是表示之间的同态.

$\Phi(g \cdot f \otimes v)(u) = \Phi(g \cdot f \otimes g \cdot v)(u) = (g \cdot f)(u)(g \cdot v) = f(g^{-1} \cdot u)(g \cdot v)$

$(g \cdot \Phi(f \otimes v))(u) = g \cdot \Phi(f \otimes v)(g^{-1} \cdot u) = g \cdot (f(g^{-1} \cdot u) v) = f(g^{-1} \cdot u)(g \cdot v)$

$\therefore$ $\Phi(g \cdot f \otimes v) = g \cdot \Phi(f \otimes v)$. Φ 是表示之间的同态.

思考题：设 V 为 G 的任一表示，证明平凡表示是 $V^* \otimes V$ 的子表示.

Hint: $V^* \otimes V \cong Hom_F(V,V)$.

§5 Maschke 定理

Lemma 1 　设 V_1 为线性空间 V 的子空间，$\exists V_2$ s.t. $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow$

存在线性映射 $P: V \to V_1$ s.t. $P|_{V_1} = id_{V_1}$.

证明："$\Rightarrow$". $V = V_1 \oplus V_2$，$P: V_1 \oplus V_2 \to V_1$. $v_1 + v_2 \mapsto v_1$

"$\Leftarrow$"：令 $V_2 = \ker(P)$. $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

$\forall v \in V$，$P(v) \in V_1$. $P(v - P(v)) = P(v) - P \circ P(v) = P(v) - P(v) = 0$

$\therefore$ $v - P(v) \in V_2$，令 $P(v) = v_1$，$v - P(v) = v_2$. $v = v_1 + v_2$.

Lemma 2 　设 $V_1 \subseteq V$ 是群 G 的子表示. 存在 V 的另一个子表示 V_2 s.t.

$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \exists P: V \to V_1$ 为 G 的表示同态.

证明："$\Rightarrow$"：$V=V_1\oplus V_2$，$P: V_1\oplus V_2\to V_1$，$v_1+v_2\mapsto v_1$.

$$P(g\cdot(v_1+v_2))=P(g\cdot v_1+g\cdot v_2)=g\cdot v_1=g\cdot P(v_1+v_2)$$

"$\Leftarrow$"：令 $V_2=\ker(P)$，由引理1 $V=V_1\oplus V_2$.

$\forall g\in G$，$v_2\in V_2$，$P(g\cdot v_2)=g\cdot P(v_2)=0$，$\therefore g\cdot v_2\in V_2=\ker(P)$

V_2是V的子表示.

Maschke 定理

设域F的特征是 $ch(F)$，$ch(F)\nmid |G|$，$|G|$为有限群G的阶数.
则G的所有有限维表示都是完全可约的. 即如果V是域F上的一个线性空间，$\dim V<+\infty$，$\rho: G\to GL_V$ 为 G 的一个表示，则ρ总能分解为不可约表示的直和.

proof：设 $V_1\subset V$是V的任一不可约子表示，只需证明存在$V'\subset V$为V的另一个子表示使得 $V_1\oplus V'=V$，之后对V'重复做这件事即可.
(递归的思想)

由引理1 $\exists$ linear map $P: V\to V_1$，$P|_{V_1}=id_{V_1}$
(因为有限维线性空间的直和补总是存在的). 下面要把P改造成表示的同态

构造 (Maschke)

$\bar{P}: V\to V_1$，$v\mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}\cdot v)$ ($ch(F)\nmid|G|$ 才有 $\frac{1}{|G|}$)

要说明 $\bar{P}$为表示的同态，即证 $\forall h\in G$，$v\in V$，$\bar{P}(h\cdot v)=h\cdot\bar{P}(v)$

$$\bar{P}(h\cdot v)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}\cdot h\cdot v)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}h\cdot v)$$
$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hh^{-1}g\cdot P(g^{-1}\cdot h\cdot v)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h\cdot h^{-1}g\cdot P(g^{-1}h\cdot v)$$
$$=h\cdot\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h^{-1}g\cdot P(g^{-1}h\cdot v)\Big)\quad (h\text{作用的线性性})$$
$$=h\cdot\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}\cdot v)\Big)=h\cdot\bar{P}(v)\quad (h^{-1}g\text{ 恰取遍}G\text{中元素})$$

$\forall v_1 \in V_1$, $\bar{P}(v_1)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot P(g^{-1}\cdot v_1)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot g^{-1}\cdot v_1 = v_1$

由引理2，存在 V 的子表示 V' s.t. $V=V_1\oplus V'$，证毕。

Remark：Maschke定理的逆定理也是成立的，即

设 G 为有限群，G 的所有有限维表示均完全可约 $\Rightarrow ch(F)\nmid |G|$.

群表示 $\begin{cases} \text{常表示}, & ch(F)\nmid |G| \\ \text{模表示}, & ch(F)\mid |G| \end{cases}$

域的特征是 characteristic，特征标是 character.

第2章 特征标

§1 特征的定义和简单性质

1. $\mathcal{A}\in End_F(V)$，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 V 的一组基，$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)A$，

Define $Tr(\mathcal{A})=Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$，

我们知道相似变换不改变矩阵的迹因此这个定义是合理的。

定义：设 (ρ,V) 是 G 的一个表示，$\rho: G\to GL_V$，令 $\chi_\rho: G\to F$，

$g\mapsto Tr(\rho(g))$　G 上的函数 χ_ρ 称为表示 ρ 的特征标。

说明：本章中如不加说明的话，取 $F=\mathbb{C}$，因为后续会用到代数闭域条件。

命题：(1) $\chi_\rho(g^{-1})=\overline{\chi_\rho(g)}$

(2) $\chi_\rho(g^{-1}hg)=\chi_\rho(h)$

证明：(1) 由于 $\exists g\in G$，$\exists n\in \mathbb{N}^+$，$g^n=1$，因此 $\rho(g)$ 可对角化

（高等代数的结论，最小多项式无重根的矩阵都可通过相似变换对角化，而 $\rho(g)$ 对应的矩阵有零化多项式 x^n-1，其最小多项式为 x^n-1 的因式，无重根）

Memo No.
Date / /

那么 V 中有一组基 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ s.t. $\rho(g)(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\lambda_1.\lambda_2\cdots\lambda_n$ 均为 n 次单位根，$\rho(g)$ 的值落在分圆域内。

$\rho(g^{-1})$ 对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n\end{pmatrix}$.

$Tr(\rho(g^{-1}))=\bar\lambda_1+\bar\lambda_2+\cdots+\bar\lambda_n=\overline{Tr(\rho(g))}$.

(2) $\chi_\rho(g^{-1}hg)=Tr(\rho(g^{-1}hg))=Tr(\rho(g^{-1})\rho(h)\rho(g))$

$=Tr(\rho(g)^{-1}\rho(h)\rho(g))=Tr(\rho(h))=\chi_\rho(h)$

相似矩阵的特征多项式相同，迹也相同。

2. G 上的函数

$(\mathbb{C}G)^*=\{f:\mathbb{C}G\to\mathbb{C}\mid f \text{ is linear}\}$

$\forall f\in(\mathbb{C}G)^*$，$f|_G$ 为 G 上的函数.

而 G 上的任一函数也能扩充成 $\mathbb{C}G$ 上的线性函数.

① $(\mathbb{C}G)^*$ 是线性空间.

② $(\mathbb{C}G)^*$ 是一个 $\mathbb{C}$- 结合代数.

$g\in G$. $f_1.f_2\in(\mathbb{C}G)^*$. $(f_1\cdot f_2)(g)=f_1(g)f_2(g)$ 定义 $f_1\cdot f_2$ 在

G 上的函数值，然后线性地扩充到 $\mathbb{C}G$ 上即可.

③ $\exists\ \bar{}\ :\ (\mathbb{C}G)^*\to(\mathbb{C}G)^*$. $f\mapsto\bar f$. $\bar f(g)=f(\bar g)$

$\overline{f+g}=\bar f+\bar g$. $\overline{f\cdot g}=\bar g\bar f$. 类似矩阵的转置.

定义 $f\in(\mathbb{C}G)^*$ 称为一个类函数如果 $f(ghg^{-1})=f(h)$. $\forall g.h\in G$.

特征标是一个类函数 (Class Function).

3. 常用构造法的特征标

命题 ① $\chi_{\rho_1\oplus\rho_2}=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_2}$

② $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}=\chi_{\rho_1}\cdot\chi_{\rho_2}$

③ $\chi_{\bar{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$ 其中 $\bar{\rho}$ 为反轭表示，$\overline{\chi_\rho}$ 为共轭。

证明：① $\rho_1 \oplus \rho_2 : \ g \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(g) & \\ & \rho_2(g) \end{pmatrix}$

$$Tr((\rho_1 \oplus \rho_2)(g)) = Tr(\rho_1(g)) + Tr(\rho_2(g))$$

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g) + \chi_{\rho_2}(g)$$

② $\rho_1 \otimes \rho_2 : \ g \mapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$，上一章第四节在张量表示的矩阵形式那里我们知道 $Tr(\rho_1 \otimes \rho_2(g)) = Tr(\rho_1(g))\, Tr(\rho_2(g))$

③ $\rho : G \to GL_V$，$g \mapsto \rho(g)$，$\rho(g)$ 可对角化，即存在 V 的一组基 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 使得 $\rho(g)$ 在这组基下对应矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\bar{\rho} : G \to GL_{V^*}$，取 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 的对偶基 $\alpha^1 \alpha^2 \cdots \alpha^n \in V^*$，

$$\alpha^i(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$\bar{\rho} : G \to GL_{V^*}$，$g \mapsto \bar{\rho}(g)$.

$$\bar{\rho}(g)(\alpha^i)(\alpha_j) = \alpha^i(g^{-1}\alpha_j) = \alpha^i(\lambda_j^{-1}\alpha_j) = \bar{\lambda}_j \delta_{ij}$$

$\therefore \bar{\rho}(g)(\alpha^i) = \bar{\lambda}_i \alpha^i$，$\bar{\rho}(g)$ 在基 $\alpha^1 \alpha^2 \cdots \alpha^n$ 下的矩阵 $\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$

$\therefore Tr(\bar{\rho}(g)) = \overline{Tr(\rho(g))}$，$\chi_{\bar{\rho}}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$

Remark：① χ_ρ 一般不是群同态，$Tr(\rho(gh)) = Tr(\rho(g)\rho(h))$.

$Tr(\rho(g)\rho(h))$ 与 $Tr(\rho(g))\, Tr(\rho(h))$ 一般不相等.

② 当 $\dim V = 1$ 时 χ_ρ 是群同态

③ 如果 $(\rho, V) \cong (\rho', V')$（同构的两个表示）

则 $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

$\rho : G \to GL_V$，$\rho' : G \to GL_{V'}$，

$$\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v) \iff \varphi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \varphi \iff \varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1} = \rho'(g). \ \forall v \in V$$

因此，特征标不相等的表示一定不同构.

Memo No.
Date / /

例：S_3 是最小的非 Abel 群，$V=\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

考虑 S_3 的典范表示，$\sigma\in S_3$. $\sigma\cdot e_i = e_{\sigma(i)}$

$V_1=\{\sum_{i=1}^{3} k_i e_i \mid k_1+k_2+k_3=0\}$, $\dim V_1 = 2$, $V_1\subseteq V$,

$V_1=\mathrm{span}\{e_1-e_2, e_2-e_3\}$，记 $\alpha_1=e_1-e_2$, $\alpha_2=e_2-e_3$.

$\rho: S_3\to GL_{V_1}$ 是典范表示的子表示，

χ_ρ: $1\mapsto 2$ $\quad (123)\mapsto -1$

$(12)\mapsto 0$ $\quad (132)\mapsto -1$

$(13)\mapsto 0$ $\quad \rho(12)(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$(23)\mapsto 0$ $\quad \rho(123)(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

对称群 S_n 中的元素写成不相交轮换的乘积，如果两元素中每一个轮换的长度都相同，则它们属于同一个共轭类。

§2 特征标的第一正交关系

1. Schur's Lemma

令 V_1. V_2 为 G 的两个不可约表示，$f: V_1\to V_2$ 为表示之间的同态，则

(1) 如果 $V_1\not\cong V_2$，则 $f=0$

(2) 如果 $V_1=V_2$，则 $f=\lambda Id_{V_1}$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

证明：(1) f 是同态，$\ker(f)$ 是 V_1 的子表示，$\mathrm{Im}(f)$ 是 V_2 的子表示，而 V_1 不可约，$\therefore \ker(f)=V_1$ 或 $\ker(f)=0$.

V_2 不可约，$\therefore \mathrm{Im}(f)=V_2$ 或 $\mathrm{Im}(f)=0$.

如果 $f\neq 0$，则 $\ker(f)\neq V_1$, $\mathrm{Im}(f)\neq 0$. 因此

$\ker(f)=0$, $\mathrm{Im}(f)=V_2$. 这与 $V_1 \ncong V_2$ 矛盾.

(2) $f\in \mathrm{Hom}(V_1,V_1)$, 由(1)知 $f=0$ 或为同构.

若 $f=0$, 取 $\lambda=0$, 结论成立. 若 f 为同构, 令 λ 为 f 的一个特征值.

$f'=f-\lambda \mathrm{Id}_{V_1}: V_1\to V_1$ 为表示的同态且有一个 0 特征值.

f' 作用在 λ 对应的特征向量上为 0, $\therefore f'$ 不是同构 $\Rightarrow f'=0$.

i.e. $f=\lambda \mathrm{Id}_{V_1}$.

Remark: Schur's Lemma 在复数域 $\mathbb{C}$ 上成立, 实数域 $\mathbb{R}$ 上就不一定了.

$\mathbb{R}$ 上的线性变换不一定有实特征值.

记号: $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=\{f\in \mathrm{Hom}(V_1,V_2) \mid f \text{ 为表示的同态}\}$

Schur's Lemma:

$$\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=\begin{cases} 0, & V_1\ncong V_2 \\ \lambda \mathrm{Id}_{V_1}, & V_1=V_2 \end{cases}$$ 其中 V_1, V_2 为不可约表示

$$\mathrm{End}_G(V)=\mathrm{Hom}_G(V,V)\cong \mathbb{C}.$$

① 令 V 为 G 的一个表示. $V^G=\{v\in V \mid g\cdot v=v,\ \forall g\in G\}\subseteq V$ 是 V 的子表示.

② $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$.

前面定义过 $f\in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, $f: V_1\to V_2$, $v\mapsto f(v)$

$g\cdot f: V_1\to V_2$, $v\mapsto g\cdot f(g^{-1}\cdot v)$. 如果 $f\in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$,

$f(v)=g\cdot f(g^{-1}\cdot v)$ $\quad g^{-1}\cdot f(v)=f(g^{-1}\cdot v)$, $\forall g\in G$, $v\in V$

那么, g 与 f 可交换. 因此 $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G\cong \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$.

2. $(\mathbb{C}G)^*$ 上的一个双线性型(二次型)

定义 $(\mathbb{C}G)^*\times(\mathbb{C}G)^*\longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\varphi_1,\varphi_2)\mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_1(g)\,\varphi_2(g^{-1})$$

Memo No.
Date / /

① 上面这个双线性型是对称的 (Symmetric). $(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)$

② 上面的这个双线性型是非退化的 (non-degenerate)

i.e. If $(\varphi,\varphi')=0$ for all $\varphi'\in(\mathbb{C}G)^*$, then $\varphi=0$.

3. 两个引理

Lemma 1 设 $\rho: G\to GLV$ 是群 G 的一个表示，则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^G}(g)=\dim V^G$$

χ_V 是表示 V 的特征标，χ_{V^G} 是子表示 V^G 的特征标.

证明：令 $Z=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\in \mathrm{End}_F(V)$.

$\forall h\in G$. $\rho(h)Z=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$

$\therefore \rho(h)Z=Z=Z\rho(h)$. $Z\cdot Z=Z$, Z 是 V 上的投影 (Projection) 变换.

令 $V_1=\{v\in V\mid Z\cdot v=v\}=\mathrm{Im}(Z)$ （Z 的像空间，不是复数的虚部）

$V_2=\{v\in V\mid Z\cdot v=0\}=\ker(Z)$

则 $V=V_1\oplus V_2$, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)=\mathrm{Tr}(Z)=\dim V_1$. 下证 $V'=V^G$.

$\forall v\in V^G$. $g\cdot v=v$. $\forall g\in G$. $Z\cdot v=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g\cdot v=\frac{1}{|G|}|G|v=v$.

$\therefore v\in V_1$. $\forall v\in V_1$. $\forall g\in G$, $g\cdot v=g\cdot(Z\cdot v)=(g\cdot Z)\cdot v=Z\cdot v=v$.

$\therefore v\in V^G$. $\therefore v\in V^G\Leftrightarrow v\in V_1$. $V'=V^G$.

Lemma 2 设 $U.V$ 为 G 的两个表示. 则 $(\chi_U,\chi_V)=\dim \mathrm{Hom}_G(V,U)$

证明：$(\chi_U,\chi_V)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g)\chi_V(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g)\overline{\chi_V(g)}$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g)\chi_{V^*}(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes U}(g)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,U)}(g)\overset{\text{Lemma 1}}{=\!=\!=}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,U)^G}(g)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_G(V,U)}(g)$$

$$=\dim\mathrm{Hom}_G(V,U)\qquad(\text{Lemma 1})$$

Memo No.
Date / /

定理(第一正交关系)

设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示, $(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \begin{cases} 0, & V_1 \ncong V_2 \\ 1, & V_1 \cong V_2 \end{cases}$

证明: $(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, 由 Schur 引理.

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 0, & V_1 \ncong V_2 \\ 1, & V_1 \cong V_2 \end{cases}.$$

推论: 设 V_1, V_2 是 G 的两个不可约表示, 则 $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

证明: "$\Rightarrow$": $\checkmark$. "$\Leftarrow$": 如果 $V_1 \ncong V_2$, 则 $(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = 0$.

反设 $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$, 则 $(\chi_{V_1}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V_1}(g)\chi_{V_1}(g^{-1})$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V_1}(g)\overline{\chi_{V_1}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\chi_{V_1}(g)|^2 > 0.$$

这是因为 $\chi_{V_1}(1) = \dim V_1$, $|\chi_{V_1}(1)|^2 > 0$, 矛盾.

因此 $\chi_{V_1} = \chi_{V_2} \Rightarrow V_1 \cong V_2$.

4. 相关应用

① 不可约表示的判定

命题: V 是 G 的表示, V 不可约的充要条件是 $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

"$\Rightarrow$": 第一正交关系.

"$\Leftarrow$": 假设 V 可约, 由 Maschke 定理 V 可分解为不可约表示的直和

$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, $n > 1$. 我们把同构的放到一起.

$V \cong n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$, 其中 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 互不同构.

$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$, $\chi_V = n_1\chi_{V_1} + n_2\chi_{V_2} + \cdots + n_s\chi_{V_s}$,

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i,j} n_i n_j (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \sum_{i=1}^{s} n_i^2 > 1.$$

例: 上节提到 S_3 的典范表示, 有一个二维的子表示 $\rho: S_3 \to GL_{V_1}$

$\chi_{V_1}: S_3 \to \mathbb{C}$.

$1 \mapsto 2$.

$(12) \mapsto 0 \qquad (123) \mapsto -1$

$(13) \mapsto 0 \qquad (132) \mapsto -1$

$(23) \mapsto 0 \qquad (\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{|S_3|}\sum_{g\in S_3} \chi_{V_1}(g)\chi_{V_1}(g^{-1}) = \frac{1}{6}(4+1+1) = 1$

这是一个不可约表示.

例：设 V, W 是群 G 的两个表示，将之分解为不可约表示的直和

$V \cong n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \cdots \oplus n_sV_s, \quad \chi_V = n_1\chi_{V_1} + \cdots + n_s\chi_{V_s}$

$W \cong m_1V_1 \oplus m_2V_2 \oplus \cdots \oplus m_sV_s. \quad \chi_W = m_1\chi_{V_1} + \cdots + n_s\chi_{V_s}$

其中 n_i. m_i 可以为0，$n_i\,(m_i)$ 称为 V_i 在 $V\,(W)$ 中出现的重数

$(\chi_V, \chi_{V_i}) = (\sum_{j=1}^{s} n_j\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = (n_i\chi_{V_i}, \chi_{V_i}) = n_i$

$(\chi_W, \chi_{V_i}) = (\sum_{j=1}^{s} m_j\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = (m_i\chi_{V_i}, \chi_{V_i}) = m_i$

$\therefore \chi_V = \chi_W \Leftrightarrow V \cong W$ (表示的同构).

§3. 特征标的第二正交关系

1. Class Function

$f \in (\mathbb{C}G)^*$ is called a class function if $f(g^{-1}hg) = f(h)$, $\forall g, h \in G$.

Convention

① Denote the conjugacy classes (共轭类) of G by $C_1\, C_2 \cdots C_s$

② All class functions is denoted by $CF(G)$

exercise: Show that $\dim_{\mathbb{C}} CF(G) = s$.

Remark: 类函数作为 $(\mathbb{C}G)^*$ 的子空间，维数有限.

特征标 χ_ρ 又是彼此正交 (orthogonal) 的类函数.

We only have finitely many characters.

2. Regular Representation

定理 (Frobenius) 设 (V,ρ) 为 G 的一个不可约表示，则 (V,ρ) 出现在正则表示中的重数为 $\dim V$.

证明：$(\chi_\rho, \chi_{reg}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\chi_{reg}(g^{-1})$

当 $g\neq 1$ 时，$\chi_{reg}(g^{-1}) = Tr(\rho_{reg}(g^{-1})) = 0$.

$\therefore (\chi_\rho, \chi_{reg}) = \frac{1}{|G|}\chi_\rho(1)\chi_{reg}(1) = \chi_\rho(1) = \dim V$.

说明：① 不可约表示的个数有限

② $\mathbb{C}G = n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \cdots \oplus n_tV_t$，其中 $n_i = \dim V_i$.

两边维数相等 i.e. $|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_t^2$.

③ 下面我们要证明 $s=t$，不可约表示的个数等于共轭类的个数.

证明：① 不可约表示的个数 t 是特征标的个数.

共轭类的个数 s 是类函数的维数，因此 $t\le s$.

Construct: $\forall f\in CF(G)$，(ρ, V) 为一个不可约表示，

令 $\rho(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho(g) \in End(V)$

② Claim: $\rho(f)\in End_G(V) = Hom_G(V,V)$

i.e. $\rho(f)(h\cdot v) = h\cdot\rho(f)(v)$，$\forall h\in G, v\in V$.

proof: $\rho(f)(h\cdot v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho(g)(h\cdot v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)(gh\cdot v)$

$= h\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)(h^{-1}gh\cdot v)$

$= h\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(h^{-1}gh)(h^{-1}gh\cdot v)$

$= h\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)(g\cdot v)$

$= h\cdot\rho(f)(v)$.

③ 由②+Schur引理，$\rho(f)=\lambda Id_V$，$\lambda\in\mathbb{C}$.

$Tr(\rho(f))=\lambda \dim V$.

$Tr\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\rho(g)\right)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)Tr(\rho(g))$

$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\chi_\rho(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\chi_{\bar\rho}(g^{-1})=(f,\chi_{\bar\rho})$

如果 $(f,\chi_{\bar\rho})=0$，则 $Tr(\rho(f))=0$. $\lambda=0$，$\rho(f)=0$.

④ Claim：如果 $(f,\chi_{\bar\rho})=0$ 对每个不可约表示 (ρ,V) 成立，则 $f=0$.

proof：考虑正则表示 $\chi_{reg}=\dim V_1\chi_1+\dim V_2\chi_2+\cdots+\dim V_t\chi_t$.

$\rho_{reg}(f)=\sum_{i=1}^{t}(\dim V_i)\rho_i(f)$. 由③的结果

$(f,\chi_{\bar\rho_i})=0\Rightarrow\rho(f_i)=0\Rightarrow\rho_{reg}(f)=0$

任取 $h\in G\subseteq\mathbb{C}G$，$0=\rho_{reg}(f)(h)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\rho_{reg}(g)(h)$

$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)gh\in\mathbb{C}G$. 当 g 取遍 G 中元素时 gh 是一组基 ($\mathbb{C}G$ 的一组基)

$\therefore f(g)=0$，$\forall g\in G$. i.e. $f=0$.

⑤ Claim：$f=\sum_{i=1}^{t}(f,\chi_i)\chi_i$

proof：令 $f_1=f-\sum_{i=1}^{t}(f,\chi_i)\chi_i$.

$(f_1,\chi_j)=\left(f-\sum_{i=1}^{t}(f,\chi_i)\chi_i,\chi_j\right)=(f,\chi_j)-((f,\chi_j)\chi_j,\chi_j)$

$=(f,\chi_j)-(f,\chi_j)=0$，$j=1,2,\cdots,t$.

$\therefore f_1=0$. $f=\sum_{i=1}^{t}(f,\chi_i)\chi_i$.

特征标构成了类函数的一组基，于是 $s=t$.

4. 特征标表 (Character Table)

群 G 有 s 个共轭类 $C_1 C_2\cdots C_s$. $|C_i|=h_i$

$g_1 g_2\cdots g_s$ 是各共轭类选出的一个代表元，一般默认 $C_1=\{e\}$.

$h_1=1$. $g_1=e$，$\chi_1\chi_2\cdots\chi_s$ 是 s 个不可约表示的特征标.

Memo No.
Date / /

χ_1 对应平凡表示。

	h_1 c_1 g_1	h_2 c_2 g_2	$\cdots$	h_s c_s g_s
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	$\cdots$	$\chi_1(g_s)$
χ_2	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	$\cdots$	$\chi_2(g_s)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_s	$\chi_s(g_1)$	$\chi_s(g_2)$	$\cdots$	$\chi_s(g_s)$

第一正交关系： $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1})=\delta_{ij}$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s}h_k\chi_i(g_k)\chi_j(g_k^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s}h_k\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}$$

记 $X=\begin{pmatrix}\chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_s)\\ \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \chi_s(g_1) & \chi_s(g_2) & \cdots & \chi_s(g_s)\end{pmatrix}=(\chi_i(g_j))_{s\times s}$ 称为特征标矩阵.

则第一正交关系可表示为 $X\begin{pmatrix}h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s\end{pmatrix}\overline{X}^T=|G|\,I_{s\times s}$.

5. 第二正交关系

命题 $\frac{h_j}{|G|}=\sum_{i=1}^{s}\overline{\chi_i(g_j)}\chi_i(g_k)=\delta_{jk}$

这里 h_j 换成 h_k 也可以，因为当 $j\neq k$ 时 $\delta_{jk}=0$.

证明. 由第一正交关系 $X\begin{pmatrix}h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s\end{pmatrix}\overline{X}^T=|G|I_s$，则 $\overline{X}^TX\begin{pmatrix}h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s\end{pmatrix}=|G|I_s$.

$(AB=I\Rightarrow BA=I)$，把矩阵写成求和的式即是上述命题.

画特征标表需要合理利用两个正交关系.

6. 举例

(1) S_3 有共轭类 $C_1\ C_2\ C_3$，$C_1=\{1\}$，$C_2=\{(12),(13),(23)\}$，

$C_3=\{(123),(132)\}$. $h_1=1$，$h_2=3$，$h_3=2$.

χ_1 为平凡表示，χ_2 为符号表示，将 S_3 中的置换映到其逆序数

$6=|S_3|=n_1^2+n_2^2+n_3^2$. $n_1=n_2=1$，$n_3=2$. $\therefore \chi_3(1)=2$.

知道前两行后即可根据第2正交关系算出第3行.

χ_3 就是本章第一节提及的 S_3 的典范表示的一个2维子表示，它是一个不可约表示.

	$\overset{1}{C_1}$ 1	$\overset{3}{C_2}$ (12)	$\overset{2}{C_3}$ (123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	1

Remark：画特征标表可以利用的信息和工具包括

① 群G共轭类的个数　　③ $|G| = n_1^2+n_2^2+\cdots+n_t^2$

② 第一、第2正交关系　　④ 知道一些简单的表示

命题　设 G、G' 是两个群，如果存在满同态 $\pi: G \to G'$，则 G' 的不可约表示也是 G 的不可约表示.

证明：设 $\rho: G' \to GL_V$ 为 G' 的一个不可约表示.

构造 $G \xrightarrow{\pi} G' \xrightarrow{\rho} GL_V$，可知 V 是 G 的一个表示.

反设 V 是 G 的可约表示，那么有 V 的真子表示 V_1，$g\cdot V_1 = V_1$ 对 $\forall g \in G$ 成立. $g\cdot V_1 = \rho(\pi(g))(V_1)$，由于 π 是满射，$\forall g' \in G'$，$g'\cdot V_1 = \rho(g')(V_1) = V_1$. V_1 也是 $\rho: G' \to GL_V$ 的真子表示，矛盾.

说明：上述命题提供了一种思路，如果能找到群G的一个正规子群H，那么商群 G/H 的不可约表示也是G的不可约表示.（$G/\ker(\pi) \cong \mathrm{Im}(\pi)$）我们可以通过 G/H 的特征标来求G的特征标.

(2) 画出二面体群 D_8 的特征标表

$D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yx = x^3 y \rangle$　生成关系

D_8 共有8个元素，5个共轭类

5个共轭类就意味着 D_8 有5个不同的不可约表示.

	1	1	2	2	2
	1	x^2	$\{x, x^3\}$	$\{y, x^2y\}$	$\{xy, yx\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

χ_1 为平凡表示，χ_2 为符号表示，两者的特征标可以直接写出。

$8=1^2+1^2+1^2+1^2+2^2$，第一列也可以写出。5个表示当中有4个是一维的，1个是2维的。

我们在近世代数中学过群 G 的中心 $Z(G)=\{g\in G \mid hg=gh,\ \forall h\in G\}$

由 $x^2\in Z(D_8)$，x^2 可生成 D_8 的正规子群

$|\langle x^2\rangle|=2$，$\langle x^2\rangle=\{1, x^2\}$，$\langle x^2\rangle \trianglelefteq D_8$，$D_8/\langle x^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

Klein 四元群 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 有4个不同的一维表示，特征标表如下：

	1	a	b	c
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

通过商映射 $\pi: D_8\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

就可以得到 D_8 的第3行和第4行

最后，利用第2正交关系

$\frac{h_j}{|D_8|}\sum_{i=1}^{5}\overline{\chi_i(g_j)}\chi_i(g_k)=\delta_{jk}$ 算出第5行。

那么第5行的 χ_5 对应哪一个表示呢？

二面体群 D_8 可以视为保平面上的正方形不变的线性变换群。

群里的元素是一些线性变换，且均为反射和旋转（正交变换），用矩阵形式写出来：

1	x	x^2	x^3	y	x^2y	yx	xy
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

这是D_8的一个2维表示，特征标正是表中的第5行 χ_5.

$$(\chi_5,\chi_5)=\frac{1}{|D_8|}\sum_{g\in G}\chi_5(g)\chi_5(g^{-1})=\frac{1}{8}(2^2+(-2)^2)=1$$

这确实是一个不可约表示.

(3) 画出四元数群 Q_8 的特征标表.

$Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ 生成关系 $Q_8=\langle i,j \mid i^4=j^4=1,$
$i^2=j^2,\ ij=j^3i\rangle$. 与D_8一样，也有8个元素5个共轭类.

	1	1	2	2	2
	1	-1	$\{i,-i\}$	$\{j,-j\}$	$\{k,-k\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

注意到 $Q_8/\langle -1\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$，因此前4行也可以用Klein四元群的4个不可约表示写出. 同样根据第2正交关系算出第5行.

χ_5:	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$

D_8有2个4阶元5个2阶元. Q_8有6个4阶元1个2阶元. 两者不同构.
但是D_8与Q_8的特征标表是一样的.
这个例子说明特征标表不能反映群的全部信息.

(4) 画出对称群 S_4 的特征标表.

S_4有24个元素，5个共轭类，5个不可约表示.

	1	6	8	3	6
	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

前两行就是平凡表示和符号表示，然后，我们需要找商群了。

注意到第一、四两个共轭类组成了一个Klein四元群

$\{1\} \trianglelefteq K_4 \trianglelefteq S_4$. $S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/K_4 \cong S_3$

	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	1

把右边那个 S_3 的表拉进来得 S_4 第三行.

$24 = 1^2+1^2+2^2+3^2+3^2$，第一列有了.

设第4行为 $3, a, b, c, d$，由第一正交关系

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)} = \delta_{ij}.$$

$$\begin{cases} 3+6a+8b+3c+6d=0 & ① \\ 3-6a+8b+3c-6d=0 & ② \\ 6 \quad -8b+6c \quad =0 & ③ \\ 9+6a^2+8b^2+3c^2+6d^2=24 & ④ \end{cases}$$

①+②：

$$\begin{cases} 6+16b+6c=0 \\ 6-8b+6c=0 & ③ \end{cases} \Rightarrow b=0,\ c=-1$$

代入①②④式 $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ d=1 \end{cases}$ 恰好是最后两行.

那么 χ_4 和 χ_5 对应的三维表示，是什么呢？

令 $V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 为 S_4 的典范表示，

$V_1 = \{\sum_{i=1}^{4} k_i e_i \mid \sum_{i=1}^{4} k_i = 0,\ k_i \in \mathbb{C}\}$ 是 V 的三维子表示，

$v_{12} = e_1 - e_2$, $v_{23} = e_2 - e_3$, $v_{34} = e_3 - e_4$ 为 V_1 的一组基

这个表示的特征标就是 χ_4.

$$\rho:\quad 1 \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Tr(\rho(1))=3.$$

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Tr(\rho(12))=1$$

$$(123) \mapsto \begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Tr(\rho(123))=0.$$

$$(12)(34) \mapsto \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad Tr(\rho(12)(34))=-1$$

$$(1234) \mapsto \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad Tr(\rho(1234))=-1$$

$\chi_5=\chi_2\chi_4$. 第5个表示就是 2.4 两者的张量表示. $\chi_5=\chi_{2\otimes4}$.

命题 V_1 是 G 的一维表示, V 是 G 的不可约表示, 则 $V_1\otimes V$ 也不可约.

证明: $\rho: G\to GL_{V_1}=\mathbb{C}^*$, $g\mapsto \rho(g)$

建立 $\bar{\rho}: G\to\mathbb{C}^*$, $g\mapsto\overline{\rho(g)}$ 为 G 的另一个一维表示.

$\rho\otimes\bar{\rho}: G\to\mathbb{C}^*$, $\alpha\otimes\beta\mapsto\rho(g)\alpha\otimes\bar{\rho}(g)\beta=\rho(g)\bar{\rho}(g)\,\alpha\otimes\beta$

$=\rho(g)\overline{\rho(g)}\,\alpha\otimes\beta=\alpha\otimes\beta$ (因为 $\rho(g)$ 是个单位根), 平凡表示 $\bar{\rho}\otimes\rho$.

反设 $V_1\otimes V$ 可约, $V_1\otimes V=W_1\oplus W_2$, $\bar{\rho}\otimes(V_1\otimes V)=\bar{\rho}\otimes(W_1\oplus W_2)$

$V\cong(\bar{\rho}\otimes V_1)\otimes V\cong\bar{\rho}\otimes(V_1\otimes V)=\bar{\rho}\otimes(W_1\oplus W_2)\cong\bar{\rho}\otimes W_1\oplus\bar{\rho}\otimes W_2$

这与 V 不可约相矛盾, 因此 $V_1\otimes V$ 也不可约.

7. Abel 群的表示

命题: G 是交换的 $\Longleftrightarrow$ G 的所有不可约表示都是一维的.

"$\Rightarrow$": Abel 群 G 有 $|G|$ 个共轭类

$|G|=n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{|G|}^2$ $\therefore n_1=n_2=\cdots=n_{|G|}=1$

"$\Leftarrow$" $|G|=n_1^2+n_2^2+\cdots+n_t^2$, $\because n_1=n_2=\cdots=n_t=1$.

$\therefore t=|G|$ G 有 $|G|$ 个共轭类, G 是 Abel 群.

推论: 有限循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的不可约表示都是一维的.

$\rho: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$. $\mathbb{Z}_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$. 把 g 映往 n 次单位根.

即 $\mathbb{Z}_n$ 的 n 个不可约表示.

Prop 有限 Abel 群结构性定理

设 G 是有限 Abel 群, 则 $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \mathbb{Z}_{m_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_{m_n}$

其中 $m_1\ m_2 \cdots m_n$ 均为素数的幂次

说明: 设 $G_1 . G_2$ 是两个群. (V_1, ρ_1) (V_2, ρ_2) 分别为 $G_1 . G_2$ 的表示,

构造 $\rho_1 \# \rho_2: G_1 \times G_2 \to GL V_1 \otimes V_2$

$(g_1, g_2) \mapsto \rho_1 \# \rho_2 (g_1 . g_2)$, $\rho_1 \# \rho_2 (g_1, g_2): V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$

$v_1 \otimes v_2 \mapsto g_1 \cdot v_1 \otimes g_2 \cdot v_2$.

命题: 如果 (V_1, ρ_1) (V_2, ρ_2) 为 $G_1 . G_2$ 的不可约表示,

则 $\rho_1 \# \rho_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的不可约表示.

证明: $(\chi_{\rho_1 \# \rho_2}, \chi_{\rho_1 \# \rho_2})$

$$= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1 . g_2) \in G_1 \times G_2} \chi_{\rho_1 \# \rho_2}((g_1 . g_2)) \chi_{\rho_1 \# \rho_2}((g_1, g_2)^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G_1|} \frac{1}{|G_2|} \sum_{\substack{g_1 \in G_1 \\ g_2 \in G_2}} \chi_{\rho_1}(g_1) \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_1}(g_1^{-1}) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= (\chi_{\rho_1} . \chi_{\rho_1}) (\chi_{\rho_2} . \chi_{\rho_2}) = 1 \times 1 = 1.$$

定理 设 $G = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$. 则它的不可约表示的形式为

$\{ \rho_{\zeta m_1}^{i_1} \# \rho_{\zeta m_2}^{i_2} \# \cdots \# \rho_{\zeta m_n}^{i_n} \mid 1 \le i_1 \le m_1, \cdots, 1 \le i_n \le m_n \}$

这样就有了 Abel 群的所有不可约表示.

8. 整除关系

定义 ① 代数数: 有理系数多项式的根

② 代数整数: 首一整系数多项式的根

等价定义 ① 代数数: 有理矩阵的特征值

② 代数整数：整数矩阵的特征值

已知多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

可构造友矩阵如右 $f(x)=|xI-A|$

代数整数依照通常的加法乘法构成一个环．（这个我不会证）

例、$\rho: G\to GL_V$，特征标 $\chi_\rho(g)$ 是代数整数．

有理代数整数只有整数　　（容易证明）

定义　设 G 为群，$g\in G$，我们在近世代数中学过

$C_G(g)=\{h\in G \mid gh=hg\}$ 称为 g 的中心化子．

为避免与共轭类 C_g 混淆 下面将 g 的中心化子记为 Z_g

$Z_g\le G$．$[G:Z_g]=\dfrac{|G|}{|Z_g|}=|C_g|$　$\Longleftarrow$　$g_1Z_g=g_2Z_g \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1\in Z_g$
$\Leftrightarrow g_2^{-1}g_1g=gg_2^{-1}g_1 \Leftrightarrow g_1gg_1^{-1}=g_2gg_2^{-1}$

引理　设 G 为群，$\rho: G\to GL_V$ 为不可约表示

则 $\dfrac{[G:Z_g]\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$ 是一个代数整数．

证：令 $f=\sum_{h\in C_g}\rho(h): V\to V$．其中 C_g 为 g 所在的共轭类．

$\forall g'\in G$，$f(g'\cdot v)=\sum_{h\in C_g}\rho(h)\rho(g')v=\sum_{h\in C_g}\rho(hg')v=\sum_{h\in C_g}\rho(g'g'^{-1}hg')v$

$=\sum_{h\in C_g}\rho(g'h)v=\sum_{h\in C_g}\rho(g')\rho(h)v=\rho(g')\sum_{h\in C_g}\rho(h)v=g'\cdot f(v)$

f 是 $V\to V$ 的 G-模同态．由 Schur 引理 $\exists\lambda\in\mathbb{C}$．$f=\lambda\,\mathrm{Id}_V$

$Tr(f)=\lambda\dim V=\lambda\chi_\rho(1)$

$Tr(f)=\sum_{h\in C_g}Tr(\rho(h))=\sum_{h\in C_g}\chi_\rho(h)=|C_g|\chi_\rho(g)=[G:Z_g]\chi_\rho(g)$

比较上面两个等式．$\lambda=\dfrac{[G:Z_g]\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$，$\lambda$ 是 f 的特征值．

下证 f 在某组基下对应的矩阵（其实就是 $\lambda I_{n\times n}$）为整数矩阵之和

不可约表示 V 是正则表示的子表示，$\mathbb{C}G=V\oplus\cdots$．

Memo No.
Date / /

那么，$\forall g\in G$，$v\in V$，$P_{reg}(g)(v)=P(g)(v)$，$f(v)=\sum_{h\in C_g} P_{reg}(h)(v)$

而正则表示的矩阵每行每列一个1其余为0，因此f也是整矩阵。

λ是整矩阵的特征值也就是代数整数。

定理 设V是G的一个不可约表示，则 $\dim V \mid |G|$。

$|G|=n_1^2+n_2^2+\cdots+n_t^2$，每个 n_i 都整除 $|G|$。

证明：由V不可约 $1=(\chi_v,\chi_v)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_v(g)\chi_v(g^{-1})$

$=\frac{1}{|G|}\sum_{C_g}[G:Z_g]\chi_v(g)\chi_v(g^{-1})$

$\therefore \frac{|G|}{\chi_v(1)}=\sum_{C_g}\frac{[G:Z_g]\chi_v(g)\chi_v(g^{-1})}{\chi_v(1)}=\sum_{C_g}\frac{[G:Z_g]\chi_v(g)}{\chi_v(1)}\chi_v(g^{-1})$

$\frac{[G:Z_g]\chi_v(g)}{\chi_v(1)}$ 是个代数整数，$\chi_v(g^{-1})$ 是个代数整数，

因此 $\frac{|G|}{\chi_v(1)}$ 是个有理代数整数，$\frac{|G|}{\chi_v(1)}$ 是整数。

第四章 诱导表示

1. 张量积回顾

R、S为幺环，M、N为加群，${}_RN$ 为左R-模，M_R 为右R-模，

张量积 $M\otimes_R N$ 的结果是一个加群。

如果 ${}_SM_R$ 是一个 S-R双模，则可让S作用在 $M\otimes_R N$ 上，

定义 $s\cdot(m\otimes n)=(s\cdot m)\otimes n$，可验证这个定义是合理的。

则 $M\otimes_R N$ 是一个左S-模。

命题：$R\otimes_R N\cong N$

证明：令 Φ：$R\otimes_R N\to N$，$r\otimes n\mapsto r\cdot n$，验证张量积模掉的三种关系下的像是0可知 Φ 定义合理。

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.
Date / /

$\forall r_1 \in R$，$\Phi(r_1\cdot(r\otimes n)) = r_1\cdot r\cdot n = r_1\cdot \Phi(r\otimes n)$ 这是个左R-模同态

令Ψ: $N \to R\otimes_R N$，$n \mapsto 1\otimes n$．$\Phi\cdot\Psi = Id_N$．$\Psi\cdot\Phi = Id_{R\otimes_R N}$．

- $Hom_G(V_1, V_2)$，表示的同态也是左G-模同态

推广：$Hom_S({}_SM_R, {}_SN) = \{f: M\to N \mid f$ 为左S-模同态$\}$

说明：$Hom_S({}_SM_R, {}_SN)$ 是一个左R-模

$f\in Hom_S({}_SM_R, {}_SN)$．令 $(r\cdot f)(m) = f(m\cdot r)$

关键点是结合律．$(r_1r_2\cdot f)(m) = f(m\cdot r_1r_2)$．

$(r_1\cdot(r_2\cdot f))(m) = (r_2\cdot f)(m\cdot r_1) = f(m\cdot r_1\cdot r_2)$

如果在 $Hom_S({}_SM_R, {}_SN)$ 上定义 $(f\cdot r)(m) = f(m\cdot r)$．

则 $(f\cdot r_1r_2)(m) = f(m\cdot r_1r_2)$．

$((f\cdot r_1)\cdot r_2)(m) = (f\cdot r_1)(m\cdot r_2) = f(m\cdot r_2\cdot r_1) = f(m\cdot r_2r_1)$

结合律不满足因此不是左R-模．

命题：$Hom_R(R, {}_RN) \cong {}_RN$．

证明：Φ: $Hom_R(R, {}_RN) \to {}_RN$，$f\mapsto f(1_R)$

$\Phi(r\cdot f) = r\cdot f(1_R) = f(1_R\cdot r) = f(r)$．$\because f$ 为R-模同态，

$\therefore r\cdot\Phi(f) = r\cdot f(1_R) = f(r\cdot 1_R) = f(r)$．$\Phi$是左R-模同态．

令Ψ: ${}_RN \to Hom_R(R, {}_RN)$，$n\mapsto f_n$．$f_n: R\to {}_RN$，$r\mapsto r\cdot n$．

验证f_n是左R-模同态．$f_n(r_1r_2) = (r_1r_2)\cdot n$，$r_1\cdot f_n(r_2) = r_1\cdot(r_2\cdot n)$，

$\because (r_1r_2)\cdot n = r_1\cdot(r_2\cdot n)$（${}_RN$的定义）．$\therefore f_n(r_1r_2) = r_1\cdot f_n(r_2)$．验证完毕．

$\Psi\circ\Phi(f) = \Psi(f(1_R)) = f_{f(1_R)}$．$f_{f(1_R)}(r) = r\cdot f(1_R) = f(r\cdot 1_R) = f(r)$，

$\forall r\in R$．$\therefore f_{f(1_R)} = f$．$\Psi\circ\Phi(f) = f$，$\Psi\circ\Phi = Id_{Hom_R(R,{}_RN)}$

$\Phi\circ\Psi(n) = n$，$\forall n\in N$ 可由定义直接得出．$\therefore \Phi\circ\Psi = Id_{{}_RN}$．

Memo No.
Date / /

伴随性现象 (Adjoin)

定理 $R.S$ 是两个环，$M.N.L$ 是3个加群，${}_RM_S$, ${}_SN$, ${}_RL$ 为3个模，$Hom_R(M\otimes_S N, L)$ 作为Abel群同构于 $Hom_S(N, Hom_R(M,L))$.

证明：令 $\Phi: Hom_R(M\otimes_S N, L) \longrightarrow Hom_S(N, Hom_R(M,L))$

$f\mapsto \Phi(f)$. $\Phi(f): n\mapsto \Phi(f)(n)$. $\Phi(f)(n): m\mapsto f(m\otimes n)$

逻辑上应该从后往前说明定义的合理性

验证 $\Phi(f)(n): M\to L$ 为左 R-模同态，i.e. $\Phi(f)(n)(r\cdot m) = r\cdot(\Phi(f)(n)(m))$

左边 $= f((r\cdot m)\otimes n) = f(r\cdot m\otimes n)$. 右边 $= r\cdot f(m\otimes n)$

由于 f 是左 R-模同态知两者相等，第一步验证完成.

验证 $\Phi(f)$ 为左 S-模同态. i.e. $s\cdot(\Phi(f)(n)) = \Phi(f)(s\cdot n)$.

$\Phi(f)(s\cdot n)(m) = f(m\otimes(s\cdot n)) = f(m\otimes s\cdot n)$

$(s\cdot(\Phi(f)(n)))(m) = \Phi(f)(n)(m\cdot s) = f((m\cdot s)\otimes n) = f(m\cdot s\otimes n)$

由张量积的性质(3)平衡性，第2步验证完成.

这样 Φ 就是一个同态映射. 反过来，

令 $\Psi: Hom_S(N, Hom_R(M,L)) \longrightarrow Hom_R(M\otimes_S N, L)$

$f\mapsto \Psi(f)$, $\Psi(f): M\otimes_S N\to L$, $m\otimes n\mapsto f(n)(m)$.

先验证 $\Psi(f)$ 定义合理 i.e. $\Psi(f)(m\otimes n)$ 与张量积代表元 $m\otimes n$ 无关.

由 $f(n)$ 的线性性 $\Psi(f)((m_1+m_2)\otimes n - m_1\otimes n - m_2\otimes n)$

$= f(n)(m_1+m_2) - f(n)(m_1) - f(n)(m_2) = 0$.

由 f 的线性性 $\Psi(f)(m\otimes(n_1+n_2) - m\otimes n_1 - m\otimes n_2)$

$= f(n_1+n_2)(m) - f(n_1)(m) - f(n_2)(m) = 0$.

Memo No.
Date / /

$\Phi(f)\ (m\cdot s\otimes n - m\otimes s\cdot n) = f(n)(m\cdot s) - f(s\cdot n)(m)$

由 $f: N\to \mathrm{Hom}_R(M,L)$ 为左 S-模同态知

$f(n)(m\cdot s) = (s\cdot f(n))(m) = f(s\cdot n)(m)$.

$\therefore$ $\Phi(f)\ (m\cdot s\otimes n - m\otimes s\cdot n) = 0$. $\Phi(f)$ 定义合理性证毕.

然后验证 $\Phi(f)$ 是一个左 R-模同态, i.e. $\Phi(f)(r\cdot(m\otimes n)) = r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n))$

$\Phi(f)(r\cdot(m\otimes n)) = \Phi(f)(r\cdot m\otimes n) = f(n)(r\cdot m)$

$r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n)) = r\cdot f(n)(m)$. 由 $f(n)\in \mathrm{Hom}_R(M,L)$ 为左R-模

同态知两者是相等的, 因此 $\Phi(f)\in \mathrm{Hom}_R(M\underset{S}{\otimes}N, L)$

最后一步是验证 Φ, Ψ 互为逆映射.

$(\Phi\circ\Psi(f))(m\otimes n) = (\Psi(f)(n))(m) = f(m\otimes n)$

$(\Psi\circ\Phi(f))(n)(m) = \Phi(f)(m\otimes n) = f(n)(m)$

$\therefore$ $\Phi\circ\Psi(f) = f$, $f\in \mathrm{Hom}_R(M\underset{S}{\otimes}N, L)$; $\Psi\circ\Phi(f) = f$. $f\in \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M,L))$

2. 诱导表示 (Induced Representation)

G is a finite group, H is a subgroup of G $(H<G)$.

(ρ, V) 为 H 的一个表示, $\rho: H\to GL_V$,

定义 称 $\mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}V$ 为从 H 到 G 的一个诱导表示, 记为 (ρ^G, V_H^G)

① Lemma: $\dim V_H^G = [G:H]\dim V$.

proof: $H<G$. 设 $[G:H]=r$. $\{g_1\ g_2 \cdots g_r\}$ 为 r 个左陪集代表元,

$G = g_1H\cup g_2H\cup\cdots\cup g_rH$. $\mathbb{C}G = \mathbb{C}g_1H\oplus \mathbb{C}g_2H\oplus\cdots\oplus \mathbb{C}g_rH$.

若考虑 $\mathbb{C}G$ 的右 $\mathbb{C}H$-模, 它是 r 个正则作用的直和

$V_H^G = \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}V = (\mathbb{C}g_1H\oplus\mathbb{C}g_2H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}g_rH)\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}V$

$= \bigoplus_{i=1}^{r}(\mathbb{C}g_iH\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}V) \cong V\oplus V\oplus\cdots\oplus V$ (r个 V)

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.
Date / /

最后一步利用的是本章开头的命题 $R\otimes_R M \cong {}_R M$.

② G 在 V_H^G 上的作用

令 $v_1\, v_2 \cdots v_n$ 是 V 的一组基.

引理 $\{g_i\otimes v_j \mid 1\le i\le r,\ 1\le j\le n\}$ 为 V_H^G 的一组基.

只需证 $\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V$ 中的元素均可被 $g_i\otimes v_j$ 线性表出.

$\forall g\in G,\ v\in V,\ \exists\, l\in\{1,2,\cdots,r\},\ h\in H,\ s.t.\ g=g_l h$.

$g\otimes v = g_l h\otimes v = g_l\otimes hv = g_l\otimes \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n (g_l\otimes a_i v_i),\ a_i\in\mathbb{C}$.

例1: $V=\mathbb{C}H$. $V_H^G=\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}\mathbb{C}H\cong\mathbb{C}G$ 是 G 的正则表示

例2: S_4 的子群 $\{1,(12),(34),(12)(34)\}$ 为 Klein 四元群 K

取 K 的平凡表示 1_K. $1_K^G=\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}K}\mathbb{C}$ 就是一个六维的表示.

矩阵形式: 设 (ρ,V) 为群 H 的一个表示, H 是 G 的子群. $[G:H]=l$.

$v_1\, v_2 - v_n$ 是 V 的一组基. $G=g_1H\cup g_2H\cup\cdots\cup g_lH$ 为陪集分解.

$\{g_i\otimes v_j \mid 1\le i\le l,\ 1\le j\le n\}$ 为 $\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}V$ 的一组基.

定义 $\rho^G(g)(g_i\otimes v_j)=g\cdot(g_i\otimes v_j)=gg_i\otimes v_j$

$\forall g\in G,\ 1\le i\le l,\ \exists!\, s,\ gg_i\in g_sH,\ 1\le s\le l.\ \exists!\, h\in H,\ gg_i=g_sh$.

$h=g_s^{-1}gg_i$. 在 $g_1^{-1}gg_i,\ g_2^{-1}gg_i,\cdots,g_l^{-1}gg_i$ 这 l 个元素中只有 $g_s^{-1}gg_i\in H$.

$\rho: H\to GL_V$. $\rho(h)=(a_{ij}(h))_{n\times n}$ 为 $\rho(h)$ 在基 $v_1\, v_2 - v_n$ 下的矩阵

令 $\dot a_{ij}(g)=\begin{cases}0, & g\notin H\\ a_{ij}(g), & g\in H\end{cases}$. $\dot\rho(g)=(\dot a_{ij}(g))_{n\times n}$.

则 $g\cdot(g_i\otimes v_j)=gg_i\otimes v_j=\sum_{s=1}^l g_s\otimes\dot\rho(g_s^{-1}gg_i)v_j$

$=\sum_{s=1}^l g_s\otimes\sum_{t=1}^n \dot a_{tj}(g_s^{-1}gg_i)v_t$, 这是 g 作用在 V_H^G 的一组基上的效果

$g\cdot(g_1\otimes v_1,\cdots,g_1\otimes v_n,\cdots\cdots g_2\otimes v_1,\cdots g_2\otimes v_n,\cdots\cdots g_l\otimes v_1,\cdots g_l\otimes v_n)$

$=(g_1\otimes v_1,\cdots,g_1\otimes v_n,\cdots\cdots g_2\otimes v_1,\cdots,g_2\otimes v_n,\cdots g_l\otimes v_1,\cdots,g_l\otimes v_n)(\dot\rho(g_i^{-1}gg_j))_{l\times l}$

其中每个 $\dot{\rho}(g_i^{-1}gg_j)$ 为 $n\times n$ 矩阵，$(\dot{\rho}(g_i^{-1}gg_j))_{l\times l}$ 为 $nl\times nl$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_l) \\ \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{\rho}(g_l^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_l^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_l^{-1}gg_l) \end{pmatrix}$$

诱导表示的特征标

引入 $\dot{\chi}(g)=\begin{cases}0, & g\notin H\\ \chi(g), & g\in H\end{cases}$，其中 $\chi(g)$ 为 H 的表示 (ρ, V) 的特征标。

$\chi_{\rho^G}(g)=\sum_{s=1}^{l}Tr(\dot{\rho}(g_s^{-1}gg_s))=\sum_{s=1}^{l}\dot{\chi}(g_s^{-1}gg_s)$

本质上 $g_s^{-1}gg_s\in H$
$\Leftrightarrow h^{-1}g_s^{-1}gg_sh\in H$
则就是有下面的改进

命题

(1) 如果 $g\notin\bigcup_{s=1}^{l}g_s^{-1}Hg_s$，那么 $\chi_{\rho^G}(g)=0$.

(2) 如果 $H\trianglelefteq G$，$g\notin H$，那么 $\chi_{\rho^G}(g)=0$.

(3) 如果 $H\subseteq Z(G)$，那么 $\chi_{\rho^G}(g)=[G:H]\dot{\chi}(g)$

上面3个命题一个比一个特殊。

接下来我们要改进 $\chi_{\rho^G}(g)$ 的公式使其不依赖陪集代表元。

$\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{h\in H}\dot{\chi}((g_ih)^{-1}g(g_ih))=\sum_{i=1}^{l}\sum_{h\in H}\dot{\chi}(h^{-1}g_i^{-1}gg_ih)$

$=\sum_{i=1}^{l}\sum_{h\in H}\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)=\sum_{i=1}^{l}|H|\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)=|H|\sum_{i=1}^{l}\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)=|H|\chi_{\rho^G}(g)$

↑ 注意到当 $g_i^{-1}gg_i\in H$ 时 $\dot{\chi}=\chi$ 类函数，$g_i^{-1}gg_i\notin H$ 时 $\dot{\chi}(g_i^{-1}gg_i)=0$.

$\therefore\ \chi_{\rho^G}(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)$

S_3	1	3	2
	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

例：$S_3<S_4$，取 V 为 S_3 的2维不可约表示，

$V_{S_3}^{S_4}$ 是一个八维的表示。

$\dot{\chi}=\chi_3$ if $x^{-1}gx\in S_3$

S_4 的5个共轭类各取代表元求特征标

$1\quad(12)\quad(123)\quad(12)(34)\quad(1234)$. $\chi_{\rho^G}(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx)$

$\chi_{\rho^G}(1)=\frac{1}{6}\cdot 24\times 2=8$

$\chi_{\rho^G}((12)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(12)x) = 0$.

$\chi_{\rho^G}((123)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(123)x) = \frac{1}{6}\times(-6) = -1$

用到一个公式，$\sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$

$\chi_{\rho^G}((12)(34)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(12)(34)x) = 0$

$x^{-1}(12)(34)x \notin S_3$, $\forall x\in S_4$.

$\chi_{\rho^G}((1234)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(1234)x) = 0$

$x^{-1}(1234)x \notin S_3$. $\forall x\in S_4$.

1	(12)	(123)	$(12)(34)$	(1234)
8	0	-1	0	0

对照前面 S_4 的特征标表，$\chi_{\rho^G} = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$

$\therefore V_{S_3}^{S_4} = V_3 \oplus V_4 \oplus V_5$.

§3. Frobenius 互反律 (Reciprocity)

命题 (1) 设 $H < G_1 < G$，则 $V_H^G \cong (V_H^{G_1})_{G_1}^G$

(2) $(V_1\oplus V_2)_H^G \cong (V_1)_H^G \oplus (V_2)_H^G$

(3) 设 V 是 H-模，W 是 G-模，则 $V_H^G \otimes_{\mathbb{C}} W \cong (V\otimes_{\mathbb{C}} W|_H)_H^G$

其中 $W|_H$ 指的是把 G 的表示限制在 H 上后 W 即为 H 的表示.

(1) $(V_H^{G_1})_{G_1}^G = (\mathbb{C}G_1 \otimes_{\mathbb{C}H} V)_{G_1}^G = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G_1} (\mathbb{C}G_1 \otimes_{\mathbb{C}H} V)$

$\cong (\mathbb{C}G_1 \otimes_{\mathbb{C}G_1} \mathbb{C}G_1) \otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V = V_H^G$

(2) $(V_1\oplus V_2)_H^G = \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}(V_1\oplus V_2) = \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V_1 \oplus \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V_2 = (V_1)_H^G \oplus (V_2)_H^G$

(3) $V_H^G \otimes W = (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V) \otimes_{\mathbb{C}} W$

$(V\otimes_{\mathbb{C}} W|_H)_H^G = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} (V\otimes_{\mathbb{C}} W|_H)$

Memo No.
Date / /

令 Φ：上→下，$g\otimes v\otimes w \mapsto g\otimes v\otimes g\cdot w$

Φ 作为空间的同构是自然成立的，只需验证 Φ 是 G-模同态，即可证明 Φ 是 G-表示的同构，忽略了这个定义的合理性也要验证一下，留作习题。

定理（Frobenius）

设 $H<G$，V 是 H-模，W 是 G-模，则有

$$\mathrm{Hom}_G(V_H^G, W) \cong \mathrm{Hom}_H(V, W|_H)$$

证明　由之前的结论 $\mathrm{Hom}_R(R, {}_RN) \cong {}_RN$ 得 $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}G, W) \cong W$

再根据伴随性现象，

$$\mathrm{Hom}_G(V_H^G, W) = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V, W)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}G, W)) \cong \mathrm{Hom}_H(V, W|_H)$$

复习：① 会证 Maschke 定理

② 会画特征标表，S_3, S_4, D_8, Q_8.

③ 会求诱导表示的特征标

④ 会证 Frobenius 互反律，能写出伴随性现象证明关键步骤

⑤ $\mathrm{Hom}(U, V)^G \cong \mathrm{Hom}_G(U, V)$

⑥ $V \cong V^*$（反抗表示）$\Leftrightarrow$ V 上存在一个 G-不变的双线性型

Hint：$\Phi: V\to V^*$ 同构，$(v_1, v_2) \mapsto \Phi(v_1)(v_2)$ 即双线性型

$f(v_1, v_2)$ 为 G-不变双线性型，令 $\Phi: V\to V^*$，$v \mapsto \Phi(v)$.

$\Phi(v): V\to \mathbb{C}$, $v' \mapsto f(v, v')$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

刘公祥 gxliu@nju.edu.cn.

人力资源处，行政北楼504，025-89683306.