凸优化和单调变分不等式的收缩算法

第一讲：变分不等式是应用数学中许多问题的统一表述模式

Variational inequality is a uniform approach for many problems in applied mathematics

南京大学数学系　　何炳生
hebma@nju.edu.cn

设 $\Omega \subset \Re^n$ 是一个闭凸集, F 是从 $\Re^n$ 到自身的一个算子, 变分不等式问题 VI(Ω, F), 是求 x^*, 使得

$$x^* \in \Omega, \quad (x - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{0.1}$$

一个变分不等式称为单调的, 是指 VI(Ω, F) 中的 F 是 Ω (或 $\Re^n$) 上的一个单调算子 (monotone operator), 即 F 满足

$$(x-y)^T(F(x) - F(y)) \geq 0, \quad \forall\, x,\, y \in \Omega\, (\text{resp. } \Re^n).$$

变分不等式是许多应用数学问题的一种统一表述模式. 管理科学与统计计算中存在大量凸优化问题. 信号处理, 图像恢复, 矩阵完整化, 机器学习等信息技术领域中也有许多问题可以归结为(或松弛成)一个凸优化问题. 凸优化的一阶必要性条件就是一个单调变分不等式. 在变分不等式的框架下研究凸优化的求解方法, 就像微积分中用导数求一元函数的极值, 常常会更加方便.

除了通常的最优化问题以外, 互补问题是约束为正卦限的变分不等式. 经济活动中的空间价格平衡, 保护资源– 保障供给中的调控手段, 用经济手段解决交通疏导等问题, 都可以用变分不等式（或其特殊形式互补问题）来描述. 这一讲叙述以下一些常见问题与变分不等式的关系.

- 凸优化与单调变分不等式
- 商品流通、保护资源、保障供给中的变分不等式
- 交通疏导中的变分不等式
- 广义线性规划问题的线性变分不等式
- 最短距离和问题的线性变分不等式
- 极小化最大特征值之变分不等式

1 凸优化与单调变分不等式

连续优化方法中一些代表性的数学模型

- 简单约束优化问题 $\min\{f(x) \mid x \in \Omega\}.$
- 线性约束优化问题 $\min\{\theta(x) \mid Ax = b,\ x \in \mathcal{X}\}.$
- 结构型优化问题 $\min\{\theta_1(x) + \theta_2(y) | Ax + By = b, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}.$
- 非线性互补问题 $x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^T F(x) = 0.$
- 变分不等式 $x \in \Omega, \quad (x' - x)^T F(x) \geq 0, \ \forall x' \in \Omega.$

1.1 可微凸优化等价于一个特殊的单调变分不等式

设 Ω 是 $\Re^n$ 中的非空闭凸集, 我们先来讨论可微凸优化问题

$$\min\{f(x) \mid x \in \Omega\} \tag{1.1}$$

的最优性条件. 类似于瞎子爬山原理, 我们有

- 如果某一点 x^* 是问题 (1.1) 的最优点, 它必须属于 Ω,
- 并且从这点出发的所有可行方向都不是下降方向.

我们用 $\nabla f(x)$ 表示 $f(x)$ 的梯度, 并记

- $Sd(x) = \{s \in \Re^n \mid s^T \nabla f(x) < 0\}$, 为点 x 处的下降方向集;
- $Sf(x) = \{s \in \Re^n \mid s = x' - x,\ x' \in \Omega\}$, 为点 x 处的可行方向集.

$$\boxed{x^* \text{ 是最优解} \quad \Longleftrightarrow \quad x^* \in \Omega \quad \text{且} \quad Sf(x^*) \cap Sd(x^*) = \emptyset}$$

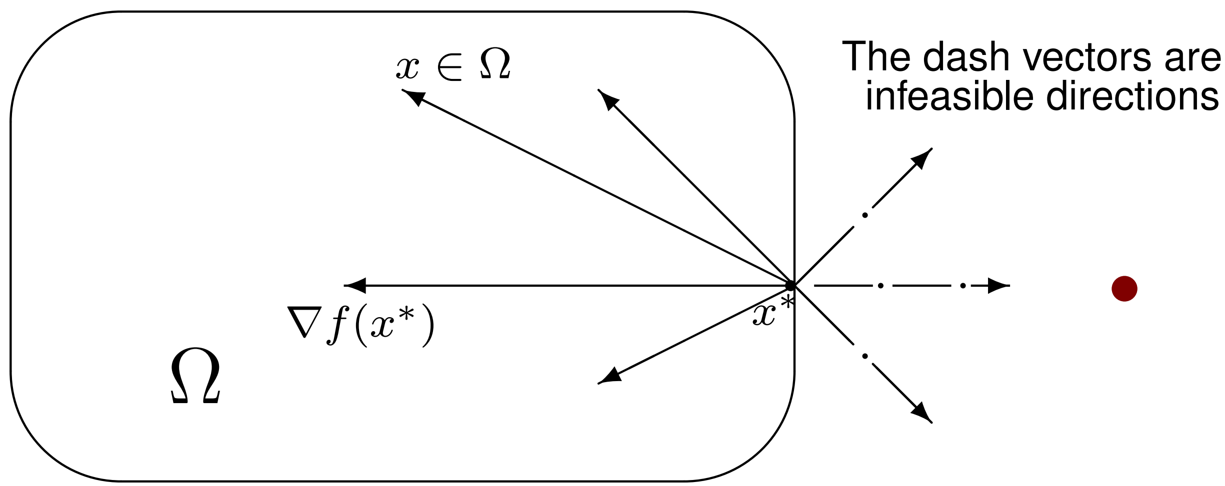


Fig. 1.1 Differential Convex Optimization and VI

上式可以写成： $x^* \in \Omega, \quad (x - x^*)^T \nabla f(x^*) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega.$

将 $\nabla f(x)$ 写成 $F(x)$, 可微凸优化问题 (1.1) 就归结为求

$$x^* \in \Omega, \quad (x - x^*)^T F(x^*) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.2}$$

以上形式就是一个变分不等式. 注意到, 在一般变分不等式问题 VI(Ω, F), 我们并不要求 (0.1) 中的算子 F 是某个多元函数的梯度.

1.2 线性约束的凸优化问题

我们考虑一般的线性约束凸优化问题

$$\min\{\theta(x) \mid Ax = b,\ x \in \mathcal{X}\}, \tag{1.3}$$

其中 $\theta : \Re^n \to \Re$ 是凸函数, $\mathcal{X} \subset \Re^n$ 是闭凸集, $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$.

设 λ 是 Lagrange 乘子, 问题 (1.3) 的 Lagrange 函数

$$L(x,\lambda) = \theta(x) - \lambda^T(Ax - b)$$

定义在 $\mathcal{X} \times \Re^m$ 上. Lagrange 函数的鞍点 $(x^*,\lambda^*) \in \ \mathcal{X} \times \Re^m$ 满足

$$L_{\lambda\in\Re^m}(x^*,\lambda) \le L(x^*,\lambda^*) \le L_{x\in\mathcal{X}}(x,\lambda^*)$$

为了简便, 我们假设 $\theta(x)$ 是可微的, 并且记 $\nabla\theta(x) = f(x)$, 鞍点问题等价于

$$\left\{ \begin{array}{lll} x^* \in \mathcal{X}, & (x - x^*)^T(f(x^*) - A^T\lambda^*) \ge 0, & \forall\, x \in \mathcal{X}, \\ \lambda^* \in \Re^m, & (\lambda - \lambda^*)^T(Ax^* - b) \ge 0, & \forall\, \lambda \in \Re^m. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

上述最优性条件的第二部分也实际上就是 $Ax^* = b$. 如果记

$$u = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad F(u) = \begin{pmatrix} f(x) - A^T\lambda \\ Ax - b \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Omega = \mathcal{X} \times \Re^m,$$

那么, (1.4) 可以写成变分不等式

$$\boxed{u^* \in \Omega, \qquad (u - u^*)^T F(u^*) \geq 0, \quad \forall\, u \in \Omega.}$$

当 (1.3) 中的等式约束 $Ax = b$ 改成不等式约束 $Ax \geq b$ 时, 相应的变分不等式中只要将 $\Omega = \mathcal{X} \times \Re^m$ 改成 $\Omega = \mathcal{X} \times \Re^m_+$.

如果凸函数 $\theta(x)$ 是非光滑的, 记 $F_a(u) = \begin{pmatrix} -A^T\lambda \\ Ax - b \end{pmatrix}$, 那么, 求 Lagrange 函数的鞍点就等价于求混合变分不等式 (有时就简称为变分不等式)

$$\boxed{u^* \in \Omega, \quad \theta(x) - \theta(x^*) + (u - u^*)^T F_a(u^*) \geq 0, \quad \forall\, u \in \Omega}$$

的解 u^*. 记 $F_a(u) = Mu + q$, 则 M 是斜对称矩阵, $F_a(u)$ 是仿射单调算子.

1.3 可分离结构的线性约束凸优化问题

可分离结构的线性约束凸优化问题是指

$$\boxed{\min\{\theta_1(x)+\theta_2(y)\,|\,Ax+By=b,\; x\in\mathcal{X},\; y\in\mathcal{Y}\}} \tag{1.5}$$

其中 $\theta_1(x)$ 和 $\theta_2(y)$ 是可微凸函数. 设 λ 是 Lagrange 乘子, 上述问题的 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=\theta_1(x)+\theta_2(y)-\lambda^T(Ax+By-b)$$

定义在 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\Re^m$ 上, 设 $f(x)=\nabla\theta_1(x),\; g(y)=\nabla\theta_2(y)$. 这个可分离结构凸优化问题的一阶最优性条件是

$$(x^*,y^*,\lambda^*)\in\Omega,\quad \left\{\begin{array}{l}(x-x^*)^T(f(x^*)-A^T\lambda^*)\geq 0,\\ (y-y^*)^T(g(y^*)-B^T\lambda^*)\geq 0,\qquad \forall\,(x,y,\lambda)\in\Omega,\\ (\lambda-\lambda^*)^T(Ax^*+By^*-b)\geq 0,\end{array}\right. \tag{1.6}$$

其中

$$\Omega=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\Re^m.$$

利用

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} f(x) - A^T\lambda \\ g(y) - B^T\lambda \\ Ax + By - b \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad F_a(w) = \begin{pmatrix} -A^T\lambda \\ -B^T\lambda \\ Ax + By - b \end{pmatrix},$$

最优性条件 (1.6) 可以写成

$$\boxed{w^* \in \Omega, \quad (w - w^*)^T F(w^*) \ge 0, \quad \forall\, w \in \Omega.}$$

当 $\theta_1(x), \theta_2(y)$ 是不可微凸函数时, 记 $u = (x, y)$ 为 w 的部分分量, 并记 $\theta(u) = \theta_1(x) + \theta_2(y)$, 问题 (1.5) 等价于混合变分不等式

$$\boxed{w^* \in \Omega, \ \big(\theta(u) - \theta(u^*)\big) + (w - w^*)^T F_a(w^*) \ge 0, \ \forall\, w \in \Omega.}$$

我们在后面的章节中展示, 在变分不等式框架下研究凸优化求解方法, 无论在算法设计和收敛性证明方面, 会变得相当简单和方便.

1.4 非线性互补问题是一类特殊的变分不等式

凸优化问题 (1.1) 中, 如果 $\Omega = \Re^n_+$ (实 n-维空间中的非负卦限) 并且 $f(x)$ 是可微的, 根据 §1.1 中的分析, x^* 是最优解的充要条件是

$$x^* \geq 0, \quad (x - x^*)^T \nabla f(x^*) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

设 F 是 $\Re^n \rightarrow \Re^n$ 的一个算子. 非负卦限 $\Re^n_+$ 上变分不等式的数学形式是

$$\boxed{\text{VI}(\Re^n_+, F): \quad x^* \geq 0, \quad (x - x^*)^\top F(x^*) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.}$$

非线性互补问题是最优化理论与方法中一类很重要的问题. 它的数学形式是

$$\text{(NCP)} \qquad x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0, \quad {x^*}^\top F(x^*) = 0. \tag{1.7}$$

事实上, **NCP** 是 $\Omega = \Re^n_+$ 的一类变分不等式. 因此, 在 $\Omega = \Re^n_+$ 时, 可微凸优化问题 (1.1) 与一个互补问题等价.

证明 为帮助阅读理解, 我们给出 **NCP** 与 **VI**$(\Re^n_+, F)$ 等价的具体证明.

如果 x^* 是 **NCP** 的解, 那么有 $x^* \geq 0$ 和 $F(x^*) \geq 0$.

对于任意的 $x \geq 0$ 有 $x^\top F(x^*) \geq 0$.

又因 $x^{*\top} F(x^*) = 0$, 得

$$\begin{aligned}(x - x^*)^\top F(x^*) &= x^\top F(x^*) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

所以 x^* 是 **VI**(R^n_+, F) 的一个解.

反过来, 如果 x^* 是 **VI**(R^n_+, F) 的一个解, 则 $x^* \geq 0$.

将 $x = 2x^*$ 和 $x = 0$ 代入 $(x - x^*)^\top F(x^*) \geq 0$, 我们得到 $\pm x^{*\top} F(x^*) \geq 0$. 因此 $x^{*\top} F(x^*) = 0$.

要证明 x^* 是 **NCP** 的解, 只剩下 $F(x^*) \geq 0$ 需要证明, 对此采用反证法. 如果 $F(x^*)$ 的某个分量 $F_j(x^*) < 0$, 我们取 x, 使得

$$x_i = \begin{cases} x_i^*, & \text{if } i \neq j \\ x_j^* + 1, & \text{if } i = j \end{cases}$$

这样的 $x \geq 0$. 但 $(x - x^*)^\top F(x^*) = F_j(x^*) < 0$, 这与 x^* 是 **VI**(R^n_+, F) 的解矛盾.

1.5 最小一模问题与等价的变分不等式

最小一模问题 (Least absolute deviations) 的数学形式是

$$\min \|Ax - b\|_1, \tag{1.8}$$

其中 $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$. 与最小二乘相比, 它提供了一种更稳健的数据拟合模型. 与最小二乘不同, 它是一个非光滑凸优化问题. 这类问题被广泛应用于统计学和经济研究, 一些最新的文献都有提及. 例如:

- T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction. Springer, second edition, 2009. $\S 10.6$.
- J. M. Wooldridge. Introductory Econometrics: A Modern Approach. South Western College Publications, fourth edition, 2009. $\S 9.6$.

我们用 e 表示每个分量都是 1 的 m-维向量. 容易验证

$$\|d\|_1 = \max\{y^T d \,|\, y \in B_\infty\}, \qquad B_\infty = \{y \in \Re^m \,|\, -e \le y \le e\}.$$

因此, 问题 (1.8) 就是一个形式为

$$\boxed{\min_{x\in\Re^n}\ \max_{y\in B_\infty}\ \ y^T(Ax-b).}$$

的 min-max 问题. 它的等价形式是下面的线性变分不等式:

$$\boxed{x^*\in\Re^n,\ y^*\in B_\infty,\quad \left\{\begin{array}{ll}(x-x^*)^T(A^Ty^*)\ge 0, & \forall x\in\Re^n,\\ (y-y^*)^T(-Ax^*+b)\ge 0, & \forall y\in B_\infty.\end{array}\right.}$$

可以写成更简单紧凑的形式

$$\boxed{u^*\in\Omega,\quad (u-u^*)^T(Mu^*+q)\ge 0,\quad \forall u\in\Omega}$$

其中

$$u=\left(\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right),\quad M=\left(\begin{array}{cc}0 & A^T\\ -A & 0\end{array}\right),\quad q=\left(\begin{array}{c}0\\ b\end{array}\right),\quad \Omega=\Re^n\times B_\infty.$$

只对结构型凸优化一阶算法感兴趣的读者, 这一讲的后继部分只需浏览一下.

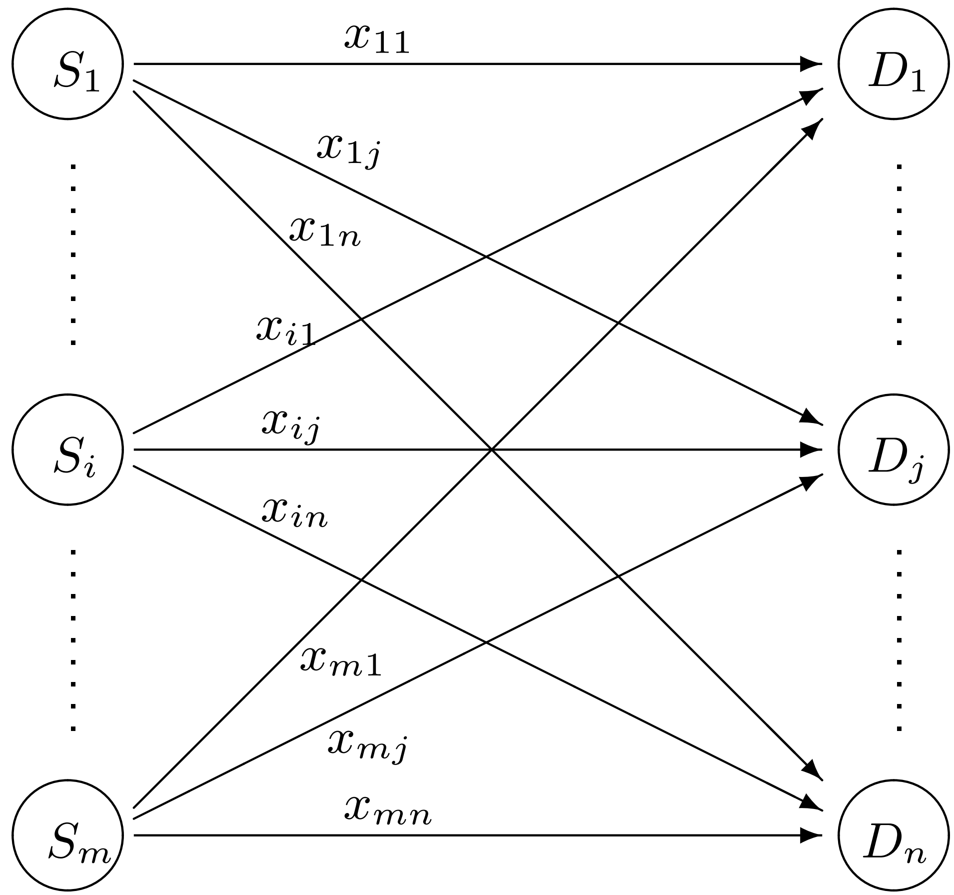
2 保护资源、保障供给中的互补问题

我们以下面的例子来说明一个经济平衡模型：

假设某种商品（例如煤）由 m 个资源地生产和 n 个需求地消费. 它由经营者们从资源地采购运到需求地销售. 经营者会根据贪婪原理找到他们的最优经营方案. 记

$s_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$

$d_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$



一些记号

S_i: 该种商品的第 i 个资源地;

D_j: 该种商品的第 j 个需求地;

x_{ij}: 从 S_i 到 D_j 的交易量;

s_i: 经营者们在资源地 S_i 的采购总量, $s_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$;

d_j: 经营者在需求地 D_j 的销售总量, $d_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$;

h_i^s: 经营者在资源地 S_i 处的采购价, 是 S_i 处采购量的函数;

h_j^d: 经营者在需求地 D_j 处的销售价, 是 D_j 处到货量的函数;

t_{ij}: 从 S_i 到 D_j 的交易费用 (包括运输费用等交易成本);

y_i: 政府为避免资源过度开采而在资源地 S_i 向经营者征收的资源税;

z_j: 政府为保障供给而在需求地 D_j 给经营者的经营补贴.

2.1 经营者追求利益最大化之互补问题

用下图表示第 i 个资源地 S_i 和第 j 个需求地 D_j 之间的采购— 销售关系.

采购价 h_i^s，资源税 y_i 销售价 h_j^d，补贴 z_j

$$S_i \xrightarrow[\text{交易量 } x_{ij}]{\text{单位运输、劳务费用和必要的利润=交易费 } t_{ij}} D_j$$

如果$(h_i^s + y_i + t_{ij}) \geq (h_j^d + z_j)$, 没有人愿意做亏本买卖, 所以 $x_{ij} = 0$；

反之，根据贪婪原理，经营者会尽可能增大经营量 x_{ij},（通常这会导致采购价的上涨和销售价的下降）直到

$$(h_i^s + y_i + t_{ij}) = (h_j^d + z_j).$$

用数学语言描述就是：

$$h_i^s + y_i + t_{ij} \begin{cases} \geq h_j^d + z_j, & \text{如果} x_{ij} = 0, \\ = h_j^d + z_j, & \text{如果} x_{ij} > 0\,. \end{cases}$$

- 对给定的资源税率 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 和补贴标准 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ (政策),

  经营者们会根据“贪婪原理”找到他们的最优经营方案 x_{ij} (对策).

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

如果记

$$F(X) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{pmatrix},$$

其中

$$F_{ij}(X) = \{h_i^s(s_i) + y_i + t_{ij}\} - \{h_j^d(d_j) + z_j\},$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad d_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

那么, 由经营者的最优经营方案形成的非负 $m \times n$ 矩阵 X 和 $F(X)$ 中, 同样下标的元素中最多只能有一个大于零. 换句话说, 经营者的最优经营方案是互补问题

$$\boxed{X \geq 0, \qquad F(X) \geq 0, \qquad \textbf{Trace}(X^T F(X)) = 0}$$

的解. 上式中的 **Trace**$(\cdot)$ 表示矩阵的 “迹” —— 矩阵对角元的和.

- 我们能观测到的是问题解中相应的

$$\boxed{s_i(y,z) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(y,z) \quad \text{and} \quad d_j(y,z) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(y,z)}$$

它们是由政策向量 (y, z) 决定的.

2.2 政府部门制定最优政策之互补问题

政府部门的职责—保护资源和保障供给

- 坚持可持续发展及环境保护，防止资源被过度开采，$s_i \le s_i^{\max}$;
- 保障基本供给，从而保证社会稳定和民生，$d_j \ge d_j^{\min}$.

手段(政策)：

- 在资源过度开采的产地征收资源税，$y_1, \cdots, y_m$；
- 供应紧张的需求地给经营者提供补贴，$z_1, \cdots, z_n$.

经营者们会根据政策给出对策. 政府的任务是给出‘最好’的政策.

政府部门需要的最优政策是一个“黑箱”条件下的互补问题:

- 保护了资源, 同时又让经济尽可能繁荣;

$$y \geq 0, \qquad s^{\max} - s(y,z) \geq 0, \qquad y^T(s^{\max} - s(y,z)) = 0,$$

- 保障了供给, 同时又尽可能节约财政支出.

$$z \geq 0, \qquad d(y,z) - d^{\min} \geq 0, \qquad z^T(d(y,z) - d^{\min}) = 0.$$

职能部门的互补问题的紧凑形式是:

$$u \geq 0, \qquad F(u) \geq 0, \qquad u^T F(u) = 0,$$

其中

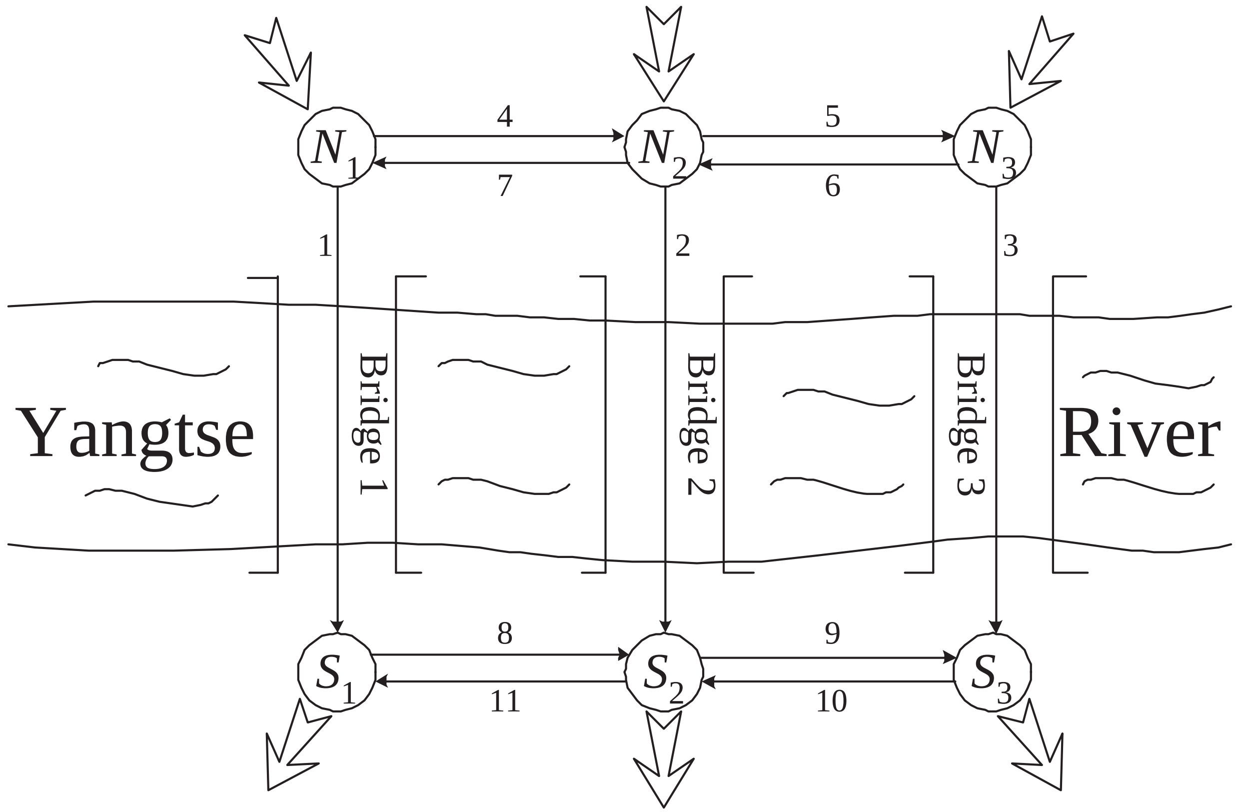
$$u = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad F(u) = \begin{pmatrix} s^{\max} - s(u) \\ d(u) - d^{\min} \end{pmatrix},$$

$s(u)$ 和 $d(u)$ 都是 u 的函数.

黑箱问题, 是指 $F(u)$ 是 u 的函数, 有确定的关系, 但没有函数表达式.

3 交通疏导问题之互补问题

设某跨江城市有三座长江大桥, 分别为 Bridge-1, Bridge-2 和 Bridge-3.



不失一般性, 我们可以将 N_1, N_2, N_3 看作由北向南的车辆在江北的出发地, 把 S_1, S_2, S_3 看作它们在江南的集散地.

我们只对管理部门的问题感兴趣, 假设只收过桥费. 管理部门想制定一个适当的收费标准合理控制桥上流量.

驾驶员基于 Wardrop 原理的最优出行方案 —— 最小费用路径

对给定的大桥收费 $y = (y_1, y_2, y_3)$, 驾驶员会找到他们的最优出行方案.

管理部门要求通过大桥合理收费控制桥上的流量

- $0 \le y \in \Re^3$: 桥上的收费向量;
- $f(y) \in \Re^3$: 桥上的流量, 它是收费 y 的函数;
- $0 < b \in \Re^3$: 管理部门希望控制的桥上的流量上界.

管理部门要求解的数学问题是

$$y \ge 0, \qquad F(y) = b - f(y) \ge 0, \qquad y^T F(y) = 0.$$

同样, 流量 $f(y)$ 确是收费 y 的函数, 但没有表达式. 只能对给定的自变量, 观测相应的函数值, 而这种观测, 往往代价不菲. 我们从事投影收缩算法研究, 着眼点是要得到效率高一些的、只用函数值和少用函数值的方法.

4 广义线性规划及鞍点问题之变分不等式

4.1 广义线性规划及之变分不等式

线性规划的标准形式是 $\min\{c^Tx \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$, 其中 $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$, $c \in \Re^n$. 在实际经济问题中, 向量 b 一般表示需求量, c 表示价格. 我们允许 b 和 c 都在一定范围之内变动, 因此考虑更一般的问题

$$\min\{\max_{\eta\in C} \eta^T x \,|\, Ax \in B,\ x \in D\} \tag{4.1}$$

其中 $C, D \subset \Re^n$, $B \subset \Re^m$ 是闭凸集. 我们称这样的问题为广义线性规划. 引进辅助变量 y 和 Lagrange 乘子 λ, 得到广义线性规划 (4.1) 的 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda, \eta) = \eta^T x - \lambda^T (Ax - y),$$

它定义在 $(D \times B) \times (\Re^m \times C)$ 上. 广义线性规划等价与一个 min-max 问题

$$L_{\lambda\in\Re^m,\eta\in C} L(x^*, y^*, \lambda, \eta) \leq L(x^*, y^*, \lambda^*, \eta^*) \leq L_{x\in D,\ y\in B}(x, y, \lambda^*, \eta^*).$$

设 $(x^*, y^*, \lambda^*, \eta^*)$ 是上述 min-max 问题的解, 则有

$$\left\{\begin{array}{rll} x^* \in D, & (x-x^*)^T(-A^T\lambda^* + \eta^*) \ge 0, & \forall\, x \in D \\ y^* \in B, & (y-y^*)^T(\lambda^*) \ge 0, & \forall\, y \in B \\ \lambda^* \in \Re^m, & (\lambda-\lambda^*)^T(Ax^* - y^*) \ge 0, & \forall\, \lambda \in \Re^m \\ \eta^* \in C, & (\eta-\eta^*)^T(-x^*) \ge 0, & \forall\, \eta \in C. \end{array}\right.$$

更紧凑的形式可以写成

$$\boxed{w^* \in \Omega, \quad (w-w^*)^T(Mw^* + q) \ge 0, \quad \forall w \in \Omega}$$

其中

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \\ \eta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A^T & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ A & -I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = 0$$

和

$$\Omega = D \times B \times \Re^m \times C.$$

一类常常被考虑的分裂可行问题 (Split Feasibility Problem)

$$\text{Find} \quad x \in D \quad \text{such that} \quad Ax \in B,$$

更是 (4.1) 问题中的一个特例. 将其转换成

$$\text{Find} \quad x \in D,\ y \in B, \quad \text{such that} \quad Ax - y = 0.$$

上述问题相当于一个目标函数为零的约束优化问题. 设 λ 为线性约束 $Ax - y = 0$ 的 Lagrange 乘子, 问题就等价与以下的线性变分不等式:

$$\boxed{u^* \in \Omega, \quad (u - u^*)^T M u^* \geq 0, \quad \forall u \in \Omega}$$

其中

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A^T \\ 0 & 0 & I \\ A & -I & 0 \end{pmatrix},$$

和

$$\Omega = D \times B \times \Re^m.$$

4.2 一般鞍点问题之变分不等式

用全变差极小处理图像去模糊 [1], 经离散化以后, 问题的数学模型是

$$\min_{x\in\mathcal{X}}\max_{y\in\mathcal{Y}} \ \Phi(x,y) := \theta_1(x) - y^T Ax - \theta_2(y) \tag{4.2}$$

其中$\mathcal{X} \subset \Re^n$, $\mathcal{Y} \subset \Re^m$ 是闭凸集, $A \in \Re^{m\times n}$. $\theta_1(x) : \Re^n \to \Re$, $\theta_2(y)$: $\Re^m \to \Re$ 为凸函数. 如果 $(x^*, y^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 是问题 (4.2) 的解, 则有

$$\Phi_{y\in\mathcal{Y}}(x^*, y) \le \Phi(x^*, y^*) \le \Phi_{x\in\mathcal{X}}(x, y^*).$$

换句话说, (x^*, y^*) 是 $\Phi(x, y)$ 在 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 上的鞍点. 因此, 问题 (4.2) 能够转换成等价的变分不等式: 求 $(x^*, y^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, 使得

$$\begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f(x^*) - A^T y^* \\ g(y^*) + Ax^* \end{pmatrix} \ge 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \tag{4.3}$$

其中 $f(x) \in \partial\theta_1(x), g(y) \in \partial\theta_2(y)$. 用记号

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} f(x) - A^T y \\ Ax + g(y) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

问题 (4.3) 就是变分不等式

$$u^* \in \Omega, \qquad (u - u^*)^T F(u^*) \geq 0, \quad \forall\, u \in \Omega. \tag{4.4}$$

由于 $\theta_1(x)$ 和 $\theta_2(y)$ 是凸函数, 容易验证, 这里的 $F(u)$ 是单调的. 关心这类问题求解方法的可以参阅第六讲与第七讲. 当 $\theta_1(x), \theta_2(y)$ 是非光滑凸函数时, 问题 (4.2) 也可以表述成混合变分不等式问题:

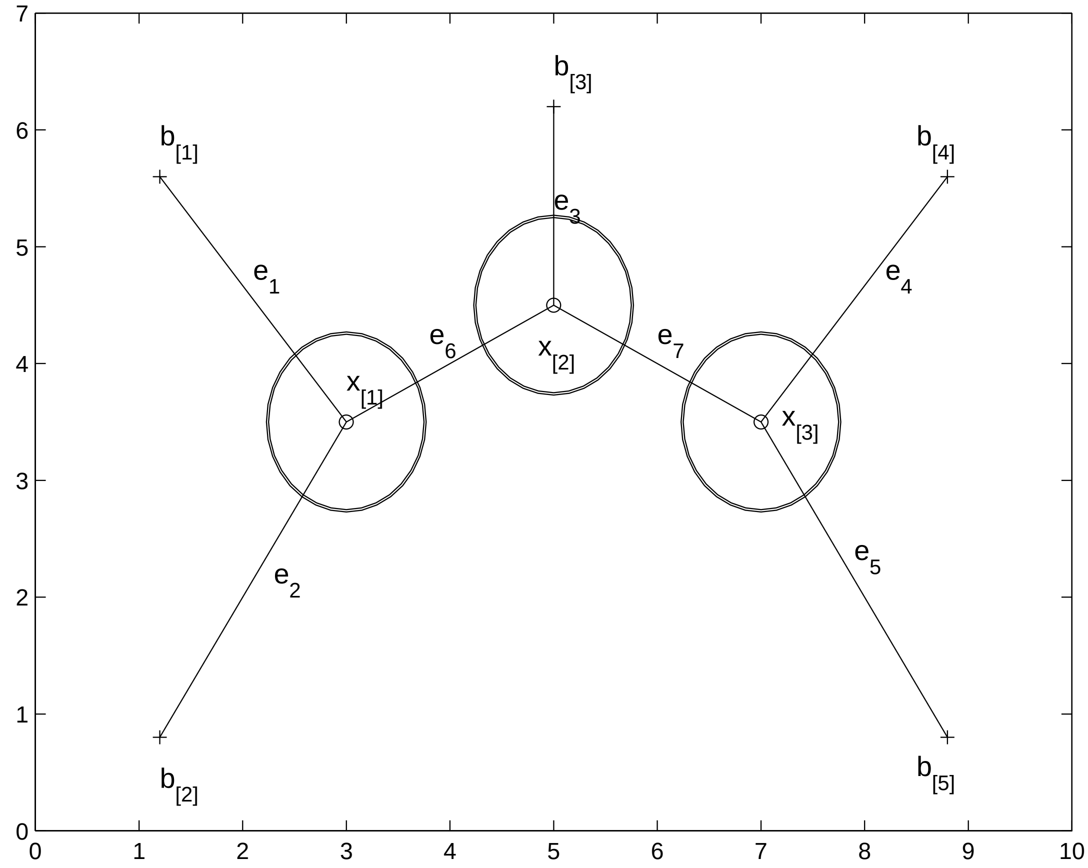
$$\theta(u) - \theta(u^*) + (u - u^*)^T M u^* \geq 0, \quad \forall\, u \in \Omega, \tag{4.5}$$

其中 $\theta(u) = \theta_1(x) + \theta_2(y),\ M = \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称矩阵. 换句话说, 混合变分不等式(4.5) 是单调的.

5 最短距离和问题之变分不等式

有些典型的非光滑凸优化问题可以化成结构相当简单的变分不等式. 这一节我们以最短距离和问题为例加以说明.

假设 $b_{[1]}, \ldots, b_{[5]}$ 是确定的村镇. 现在要用一个如右图的网络把它们连接起来. $x_{[1]}, x_{[2]}, x_{[3]}$ 是待选的连接点, 它们必须分别在划定的范围 X_1, X_2, X_3 内. 如何确定 $x_{[1]}, x_{[2]}, x_{[3]}$ 的位置, 使得网络线路长度最短.



我们在 p-模意义下求上述网络的最短距离. 该问题的数学模型是

$$\min_{x_{[j]}\in X_j} \left\{ \begin{array}{lll} \|x_{[1]}-b_{[1]}\|_p & +\|x_{[1]}-b_{[2]}\|_p & +\|x_{[2]}-b_{[3]}\|_p \\ & +\|x_{[3]}-b_{[4]}\|_p & +\|x_{[3]}-b_{[5]}\|_p \\ & +\|x_{[1]}-x_{[2]}\|_p & +\|x_{[2]}-x_{[3]}\|_p \end{array} \right\}. \tag{5.1}$$

主要对 $p=1,2,\infty$ 感兴趣. 注意到这里是距离和问题, 不是距离的平方和问题. 此类问题是一个非光滑凸优化问题.

5.1 欧氏模下的最短距离和问题

将问题转化为 min-max 问题. 注意到对任意的 $d\in\Re^2$, 有

$$\|d\|_2=\max_{\xi\in B_2}\xi^T d, \tag{5.2}$$

其中

$$B_2=\{\xi\in\Re^2\mid \|\xi\|_2\le 1\}.$$

利用 (5.2), 上述欧氏模意义下的最短距离和问题可以化为 min-max 问题

$$\min_{x_{[i]}\in X_i}\ \max_{z_{[j]}\in B_2}\left\{\begin{array}{r} z_{[1]}^T(x_{[1]}-b_{[1]})+z_{[2]}^T(x_{[1]}-b_{[2]})+\ z_{[3]}^T(x_{[2]}-b_{[3]}) \\ +\ z_{[4]}^T(x_{[3]}-b_{[4]})+\ z_{[5]}^T(x_{[3]}-b_{[5]}) \\ +\ z_{[6]}^T(x_{[1]}-x_{[2]})+z_{[7]}^T(x_{[2]}-x_{[3]}) \end{array}\right\}$$

它的紧凑形式为

$$\boxed{\min_{x\in\mathcal{X}}\ \max_{z\in\mathcal{B}_2}\ \ z^T(Ax-b)}$$

其中

$$\mathcal{X}=X_1\times X_2\times X_3\ , \qquad \mathcal{B}_2=B_2\times B_2\times\cdots\times B_2.$$

$$x=\begin{pmatrix} x_{[1]} \\ x_{[2]} \\ x_{[3]} \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} z_{[1]} \\ z_{[2]} \\ \vdots \\ z_{[7]} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

分块矩阵 A 和向量 b 的结构分别是

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_2 & -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_{[1]} \\ b_{[2]} \\ b_{[3]} \\ b_{[4]} \\ b_{[5]} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在这个 min-max 问题中, 每个 $x_{[i]}$ 对应一个点, 而每个 $z_{[j]}$ 则对应一条边.

设 $(x^*, z^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}_2$ 是 min-max 问题的解, 则对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $z \in \mathcal{B}$, 有

$$\boxed{z^T(Ax^* - b) \le z^{*T}(Ax^* - b) \le z^{*T}(Ax - b)}$$

它的等价形式是下面的线性变分不等式:

$$\boxed{x^* \in \mathcal{X},\ z^* \in \mathcal{B}_2, \quad \begin{cases} (x - x^*)^T (A^T z^*) \ge 0, & \forall x \in \mathcal{X}, \\ (z - z^*)^T (-Ax^* + b) \ge 0, & \forall z \in \mathcal{B}_2. \end{cases}}$$

可以写成更简单紧凑的形式

$$\boxed{u^* \in \Omega, \quad (u - u^*)^T (Mu^* + q) \ge 0, \quad \forall u \in \Omega}$$

其中有

$$u = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

和

$$\Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{B}_2.$$

5.2 l_1-模下的最短距离和问题

由于对任意的 $d \in \Re^2$, 有

$$\|d\|_1 = \max_{\xi \in B_\infty} \xi^T d,$$

其中

$$B_\infty = \{\xi \in R^2 \mid \|\xi\|_\infty \le 1\}.$$

与欧氏模下的最短距离和问题一样, 问题 (5.1) 在 l_1-模意义下也可以表示成一个 min-max 问题

$$\min_{x_{[i]} \in X_i} \max_{z_{[j]} \in B_\infty} \left\{ \begin{array}{r} z_{[1]}^T(x_{[1]} - b_{[1]}) + z_{[2]}^T(x_{[1]} - b_{[2]}) + \ z_{[3]}^T(x_{[2]} - b_{[3]}) \\ + \ z_{[4]}^T(x_{[3]} - b_{[4]}) + \ z_{[5]}^T(x_{[3]} - b_{[5]}) \\ + \ z_{[6]}^T(x_{[1]} - x_{[2]}) + \ z_{[7]}^T(x_{[2]} - x_{[3]}) \end{array} \right\}$$

它的紧凑形式为

$$\boxed{\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{z \in \mathcal{B}_\infty} \quad z^T(Ax - b)}$$

与欧氏模下的距离和问题一样, 它等价于变分不等式

$$\boxed{u^* \in \Omega, \quad (u-u^*)^T(Mu^*+q) \geq 0, \quad \forall u \in \Omega}$$

矩阵 M 和向量 q 都不变, 所不同的只是这时集合

$$\Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{B}_\infty, \qquad \mathcal{B}_\infty = B_\infty \times B_\infty \times \cdots \times B_\infty.$$

5.3 l_∞-模下的最短距离和问题

由于对任意的 $d \in \Re^2$, 有

$$\|d\|_\infty = \max_{\xi \in B_1} \xi^T d,$$

其中

$$B_1 = \{\xi \in R^2 \mid \|\xi\|_1 \leq 1\}.$$

与欧氏模下的最短距离和问题一样, 问题 (5.1) 在 l_∞-模意义下也可以表示成

一个 min-max 问题

$$\min_{x_{[i]}\in X_i}\ \max_{z_{[j]}\in B_1}\left\{\begin{array}{r} z_{[1]}^T(x_{[1]}-b_{[1]})+z_{[2]}^T(x_{[1]}-b_{[2]})+\ z_{[3]}^T(x_{[2]}-b_{[3]}) \\ +\ z_{[4]}^T(x_{[3]}-b_{[4]})+\ z_{[5]}^T(x_{[3]}-b_{[5]}) \\ +\ z_{[6]}^T(x_{[1]}-x_{[2]})+z_{[7]}^T(x_{[2]}-x_{[3]}) \end{array}\right\}$$

并化成等价的变分不等式

$$\boxed{u^*\in\Omega,\quad (u-u^*)^T(Mu^*+q)\ge 0,\quad \forall u\in\Omega}$$

矩阵 M 和向量 q 都不变, 所不同的只是这时集合

$$\Omega=\mathcal{X}\times\mathcal{B}_1,\qquad \mathcal{B}_1=B_1\times B_1\times\cdots\times B_1.$$

将处理欧氏模问题时的 $\mathcal{B}_2$ 换成了$\mathcal{B}_1$. 我们会在第三讲具体介绍这类最短距离和问题的求解方法.

6 极小化最大特征值之变分不等式

设 $A_i, i = 1, \ldots, m$ 和 B 是给定的 $n \times n$ 对称矩阵, $c \in \Re^m$. 考虑问题

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{\max \lambda_{\max}[\mathcal{A}(x) + B] + c^T x\} \tag{6.1}$$

其中 $\mathcal{X} \subset \Re^m$,

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^m x_i A_i. \tag{6.2}$$

这是经典半定规划中的对偶问题 [10]. 对给定的 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 矩阵 A 的对角元的和称为矩阵 A 的迹, 记为 $\mathrm{Tr}(A)$, 即有

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

熟知, 矩阵的特征值的和等于矩阵的迹. 对由 (6.2) 定义的 $\mathcal{A}(x)$ 和给定的 $n \times n$ 矩阵 Y, 我们用

$$\mathcal{A}^*(Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(A_1 Y) \\ \vdots \\ \mathrm{Tr}(A_m Y) \end{pmatrix}$$

定义 $\mathcal{A}^*(Y) \in \Re^m$. 在一些应用问题中, 集合 $\mathcal{X}$ 往往是个单纯形, 即 $\mathcal{X} = \{x \in \Re^m \mid \sum_{i=1}^m = 1,\ x \geq 0\}$. 注意到相似变换不改变矩阵特征值这一事实, 可以得到

$$\lambda_{\max}(A) = \max\{\mathrm{Tr}(YA) \mid \mathrm{Tr}(Y) = 1,\ Y \succeq 0\}.$$

所以, 问题 (6.1) 等价于下面的 $\min - \max$ 问题：

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \max_{Y\succeq 0} \{\sum_{i=1}^m \big(x_i \mathrm{Tr}(YA_i)\big) + \mathrm{Tr}(YB) + c^T x \mid \mathrm{Tr}(Y) = 1\}. \tag{6.3}$$

设 (x^*, Y^*) 是问题 (6.3) 的解, 那么有 $\lambda^* \in \Re$, 使得

$$\Phi_{y\in\mathcal{S}^n_+, \lambda\in\Re}(x^*, Y, \lambda) \leq \Phi(x^*, Y^*, \lambda^*) \leq \Phi_{x\in\mathcal{X}}(x, Y^*, \lambda^*),$$

其中

$$\Phi(x, Y, \lambda) = \sum_{i=1}^m \big(x_i \mathrm{Tr}(YA_i)\big) + \mathrm{Tr}(YB) + c^T x + \lambda(\mathrm{Tr}(Y) - 1),$$

是问题 (6.3) 的 Lagrange 函数. 问题就转化为求 函数 $\Phi(x, Y, \lambda)$ 在 $\mathcal{X} \times (\mathcal{S}^n_+ \times \Re)$ 上的鞍点 (x^*, Y^*, λ^*). 因此, 问题 (6.1) 可以转换成下面的变分

不等式: 求 $(x^*, Y^*, \lambda^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{S}_+^n \times \Re$, 使得

$$\left\{\begin{array}{lll} x^* \in \mathcal{X}, & (x - x^*)^T \{\mathcal{A}^*(Y^*) + c\} \geq 0, & \forall x \in \mathcal{X}, \\ Y^* \succeq 0, & \langle Y - Y^*, -\mathcal{A}(x^*) - \lambda^* I - B \rangle \geq 0, & \forall\, Y \succeq 0, \\ \lambda^* \in \Re, & (\lambda - \lambda^*)(\mathrm{Tr}(Y^*) - 1) \geq 0, & \forall\, \lambda \in \Re. \end{array}\right.$$

上述变分不等式的紧致形式就是

$$u^* \in \Omega, \quad (u - u^*)^T F(u^*) \geq 0, \quad \forall\, u \in \Omega,$$

其中

$$u = \left(\begin{array}{c} x \\ Y \\ \lambda \end{array}\right), \quad F(u) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{A}^*(Y) + c \\ -\mathcal{A}(x) - \lambda I - B \\ \mathrm{Tr}(Y) - 1 \end{array}\right) \quad \text{and} \quad \Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{S}_+^n \times \Re.$$

变分不等式是描述数学模型的强有力的统一工具

当然, 这并不是说, 上面提及的问题都要化成变分不等式去求解. 从后面的篇章能清楚看到, 变分不等式的框架有利于设计算法和分析算法的收敛性质.

岩土力学中的许多工程问题可以归结为不同类型的变分不等式

岩土工程中的力学问题, 归结成的微分方程, 离散化以后得到的非线性变分不等式, 往往具备我们所说的单调性条件 [16]. 中科院武汉岩土力学研究所的科技工作者, 用 [4, 5] 中的方法解决了长期困扰岩土力学界的一些问题 [11, 12].

References

[1] A. Chambolle and T. Pock, A first-order primal-dual algorithms for convex problem with applications to imaging, J. Math. Imaging Vison, **40**, 120-145, 2011.

[2] P.T. Harker, J.S.Pang, Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications, *Mathematical Programming*, **48**, 161-220, 1990.

[3] B.S. He, A projection and contraction method for a class of linear complementarity problems and its application in convex quadratic programming, Applied Mathematics and Optimization, **25**, 247-262, 1992.

[4] B.S. He, A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities, Applied Mathematics and Optimization, **35**, 69-76, 1997.

[5] B.S He and L-Z Liao, Improvements of some projection methods for monotone nonlinear variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications, **112**, 111-128, 2002

[6] B.S. He, X.M. Yuan and J.J.Z. Zhang, Comparison of two kinds of prediction-correction methods for monotone variational inequalities, Computational Optimization and Applications, **27**, 247-267, 2004

[7] B. S. He and M.-H. Xu, A general framework of contraction methods for monotone variational inequalities, Pacific J. Optimization, **4**, 195-212, 2008.

[8] B.S. He, W. Xu , H. Yang, and X.M. Yuan, Solving resource protection and supply guarantee problems in economic equilibrium, Netw. Spat. Econ., 11,. 127-138, 2011.

[9] J. Stoer and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimension I*. Springer-Verlag, 1970.

[10] L. Vandenberghe and S. Boyd, Semidefinite programming, SIAM Review, **38**, 49-95, 1995.

[11] Hong Zheng, Feng Liu and Xiuli Du, Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 295 (2015) 150-171.

[12] Hong Zheng, Peng Zhang and Xiuli Du, Dual form of discontinuous deformation analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 305 (2016) 196-216.

[13] 何炳生, 论求解单调变分不等式的一些投影收缩算法, 〖计算数学〗, **18**, 54-60, 1996.

[14] 何炳生，邵虎，徐明华, 大桥流量分配调控中的隐式互补问题. 中国科技论文在线优秀论文集, 第三辑, 1-10, 2006.

[15] 何炳生, 徐薇, 杨海, 袁晓明, 经济平衡中的一类保护资源何保障供给问题, 中国科技论文在线优秀论文集, 第三辑, 11一19, 2006.

[16] 郑宏, 葛修润, 节理岩体的变分不等式模型, 中国科学(B辑) 25 卷, 第9期，986–993，1995.