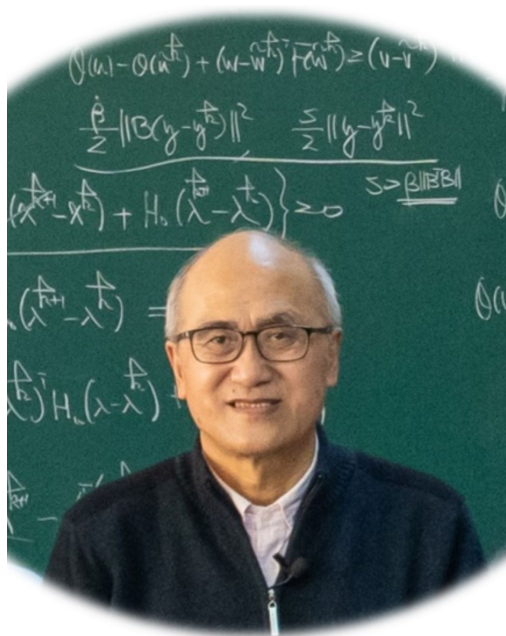


# 凸优化的一些典型问题及其求解方法

## 11. 凸优化分裂收缩算法统一框架的由来



南京大学数学系

何炳生

Bingsheng He

<http://maths.nju.edu.cn/~hebma/>

南京师范大学数学科学学院 2022年元月4日 - 9日

# 从变分不等式(VI) 的投影收缩算法 到凸优化的分裂收缩算法. 都是预测-校正方法

## 1 变分不等式的投影收缩算法

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个非空闭凸集,  $F$  是  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的一个映射. 考虑单调变分不等式:

$$u^* \in \Omega, \quad (u - u^*)^\top F(u^*) \geq 0, \quad \forall u \in \Omega. \quad (1.1)$$

我们说变分不等式单调, 是指其中的算子  $F$  满足

$$(u - v)^\top (F(u) - F(v)) \geq 0.$$

在求解变分不等式 (1.1) 的投影收缩算法中, 对给定的当前点  $u^k$  和  $\beta_k > 0$ , 我们利用投影

$$\tilde{u}^k = P_{\Omega}[u^k - \beta_k F(u^k)]$$

也即

$$\tilde{u}^k = \text{Arg min} \left\{ \frac{1}{2} \|u - [u^k - \beta_k F(u^k)]\|^2 \mid u \in \Omega \right\}$$

生成一个预测点  $\tilde{u}^k$ .

我们假设选取的  $\beta_k$  满足

$$\beta_k \|F(u^k) - F(\tilde{u}^k)\| \leq \nu \|u^k - \tilde{u}^k\|, \quad \nu \in (0, 1). \quad (1.2)$$

由于  $\tilde{u}^k$  是问题  $\min\{\frac{1}{2} \|u - [u^k - \beta_k F(u^k)]\|^2 \mid u \in \Omega\}$  的解, 根据最优性条件有

$$\tilde{u}^k \in \Omega, \quad (u - \tilde{u}^k)^{\top} \{\tilde{u}^k - [u^k - \beta_k F(u^k)]\} \geq 0, \quad \forall u \in \Omega.$$

上式两边都加上  $(u - \tilde{u}^k)^\top d(u^k, \tilde{u}^k)$ , 其中

$$d(u^k, \tilde{u}^k) = (u^k - \tilde{u}^k) - \beta_k [F(u^k) - F(\tilde{u}^k)]. \quad (1.3)$$

由此得到我们需要的预测公式

$$\tilde{u}^k \in \Omega, \quad (u - \tilde{u}^k)^\top \beta_k F(\tilde{u}^k) \geq (u - \tilde{u}^k)^\top d(u^k, \tilde{u}^k), \quad \forall u \in \Omega. \quad (1.4)$$

将  $u = u^*$  代入, 便有

$$\begin{aligned} (\tilde{u}^k - u^*)^\top d(u^k, \tilde{u}^k) &\geq (\tilde{u}^k - u^*)^\top \beta_k F(\tilde{u}^k) \\ &\geq (\tilde{u}^k - u^*)^\top \beta_k F(u^*) \geq 0. \end{aligned}$$

## 2 凸优化的分裂收缩算法

$$w^* \in \Omega, \quad \theta(u) - \theta(u^*) + (w - w^*)^\top F(w^*) \geq 0, \quad \forall w \in \Omega. \quad (2.1)$$

Prediction:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^k \in \Omega, \quad \theta(u) - \theta(\tilde{u}^k) + (w - \tilde{w}^k)^\top F(\tilde{w}^k) \\ \geq (v - \tilde{v}^k)^\top Q(v^k - \tilde{v}^k), \quad \forall w \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

将  $w = w^*$  代入, 便有

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}^k - v^*)^\top Q(v^k - \tilde{v}^k) \\ & \geq \theta(\tilde{u}^k) - \theta(u^*) + (\tilde{w}^k - w^*)^\top F(\tilde{w}^k) \\ & \geq \theta(\tilde{u}^k) - \theta(u^*) + (\tilde{w}^k - w^*)^\top F(w^*) \geq 0. \end{aligned}$$

✠ 从变分不等式的投影收缩算法到凸优化的分裂收缩算法, 一条主线, 一脉相承! ✠