

变分不等式框架下结构型 凸优化的分裂收缩算法

序言 与 目录

中学的数理基础 必要的社会实践
普通的大学数学 一般的优化原理

南京大学数学系 何炳生

<http://maths.nju.edu.cn/~hebma>

天元数学东北中心 2023年10月17 – 27日

序 言

这个讲座系统介绍最近 20 多年来我们对一些典型凸优化问题求解方法开展的颇具特色的研究, 包括一些被国际著名学者高度认可的成果.

变分不等式这个比较陌生的术语其实就是盲人爬山判别是否已经到达了顶点的数学表达形式, 读者将会看到, 用变分不等式的观点处理凸优化问题, 就像微积分中用导数求可微凸函数的极值点, 常常会带来很大的方便.

邻近点算法 (PPA) 和增广 Lagrange 乘子法 (ALM) 是最优化中的一些经典算法. ALM 本身就是 Lagrange 乘子的 PPA 算法, 这些算法生成的序列都具有向解集越靠越近的收缩性质, 因此我们称其为收缩算法. 变分不等式 (VI) 和邻近点算法 (PPA) 是我们开展凸优化方法研究的两大法宝.

在约束凸优化问题拉格朗日函数的鞍点和变分不等式的解点等价的基础上, 我们提出的预测-校正算法统一框架. 利用这个框架, 已有算法的收敛性证明只需要 (通过简单的矩阵运算) 验证两个条件; 理解掌握了这个框架, 设计求解结构型可分离凸优化问题的预测-校正方法, 难度犹如线性代数课程完成课堂练习一样. 学习这个课程, 只要求读者具备普通的大学数学知识.

根据商定课时拼凑成的讲义, 有错误的地方, 希望读者不吝指正.

变分不等式框架下结构型凸优化的分裂收缩算法 — 目录

第一讲	凸优化及其在变分不等式框架下的邻近点算法	1
第二讲	单块线性约束凸优化问题的PPA算法和均困的ALM方法	20
第三讲	交替方向法(ADMM)及PPA意义下的ADMM方法	44
第四讲	线性约束凸优化问题分裂收缩算法的统一框架	74
第五讲	三个可分离块凸优化问题的分裂收缩方法	98
第六讲	多个可分离块凸优化问题的ADMM类秩一&秩二校正方法	121
第七讲	求解线性约束凸优化问题的预测-校正型广义PPA算法	151
第八讲	基于投影收缩算法的可微凸优化问题的算法设计	174

PPT的篇幅较长, 包含所有的证明, 内容比较详细, 便于学员课后复习理解

个人研究生涯的几点感悟

一个科学家最大的本领就在于化复杂为简单,用简单的方法去解决复杂的问题。 — 冯康

✘ 先贤名言,铭记在心。纵然可以没有本领,也不迷失价值标准 ✘

爱美之心,人皆有之。数学往往被人认为是枯燥的,计算更是被人看作是繁琐的。领悟了数学之美的数学工作者,他的职业生涯才可能是充满乐趣的。

✘ 世上三百六十行,应是同一道理 ✘

数学之美,不是纯数学的专利。为应用服务的最优化方法研究,同样可以追求简单与统一。简单,他人才会看懂使用;统一,自己才有美的享受。

✘ 发现了其中的数学之美,研究才变得满怀激情和欲罢不能 ✘