



2024 年上半年, 应华东师大、上海大学、复旦大学、南京应用数学中心、西工大、西交大、西电、兰州大学、新疆大学、清华大学、北京工业大学等单位的朋友邀请, 我做了题目为

### 凸优化分裂收缩算法的一些新进展

的报告。根据各校给我安排的时间, 报告篇幅有短有长。这里, 我统一做成一个讲起来需要一个半小的 PPT, 内容和以前做过的报告大同小异, 只是在必要的地方多做了一些注释。我们以变分不等式 (VI) 和邻近点算法 (PPA) 为工具开展凸优化求解方法的研究, 在线性约束凸优化问题拉格朗日函数的鞍点和单调变分不等式的解点等价的基础上, 提出的算法自成体系。

1. 凸优化问题和单调变分不等式。解释变分不等式是“盲人爬山”的数学表达形式, 讲述如何把线性约束的凸优化问题转换成形式统一的变分不等式。
2. 定义变分不等式的邻近点算法 (PPA) 和讲述 PPA 算法的主要性质。
3. 从一类 min-max 问题的原始-对偶混合梯度法讲到按需定制的邻近点算法, 这套法则被国际同行称为 A Very Simple yet Powerful Technique for Analyzing Optimization Methods。
4. 从增广乘子法到均困(分摊困难)的增广拉格朗日乘子法, 阐述如何灵活利用 PPA 技术, 构造适合求解不同工程问题需要的简单有效的算法。
5. 两块问题的算法。处理两个可分离块的问题, ADMM 已经耳熟能详。这一节在简单介绍了 ADMM 的主要性质以后, 同样给出可以平行处理原始 x-y 子问题的 PPA 算法。
6. 凸优化分裂收缩算法的预测-校正统一框架。我们提出凸优化分裂收缩算法的预测-校正统一框架, 已经有 10 个年头。以前, 我们主要是用它来便捷地证明一些算法的收敛性, 偶尔也用来凑成一些算法。这里同时介绍我们近几年发展起来的如何“从以前的好不容易凑出一个方法到如今并不费劲构造一簇算法”。
7. 利用统一框架处理多块可分离问题。读者将会看到, 这些方法完成一次预测-校正迭代的基本过程就像高斯消去法求解线性方程组的消元和回代。

利用变分不等式和邻近点算法这些概念求解线性约束凸优化问题, 路正在越走越宽, 方法也愈发简单和容易被用户理解。