南京大学数学系 Department of Mathematics Nanjing University
何 炳 生 教授 Prof. Dr. Bingsheng HE
邮编：210093 Email:hebma@nju.edu.cn Homepage: http://maths.nju.edu.cn/~hebma

直接推广的 ADMM 处理多个可分离函数的优化问题，很长一段时间，我们不知道方法是否收敛。

在对直接推广的 ADMM 证明不了收敛性的时候，我们就着手提出一些修正的算法。我们修正方法的原则第一是不对问题做强凸等额外要求，第二是对 ADMM 中需要调比选取的罚因子不做任何限制。一句话，只在方法结构上想办法 ！

由于 ADMM 是松弛了的增广拉格朗日乘子法(ALM)，论文 [1] 对三个可分离算子的单调变分不等式，采用平行分裂的 ALM 的预测校正方法。把松弛平行处理子问题的解当作预测点，然后再做校正。松弛意味着太自由，这篇文章的校正就做统一的回缩。论文于 2009 年发表在 COA 上。

我们这方面的第二篇文章 2012 年发表在 SIAM Optimization [2]。论文把直接推广的 ADMM 所取得的子问题的解当作预测点，校正就像求解线性方程组 Gauss 消去法中的回代。

论文 [3] 是发表在 JOTA 的一个预测校正方法。方法将直接推广的交替方向法中不精确求解子问题得到的解作为预测点，这个不精确解要求满足一定的相对误差准则，然后据此得到一个距离函数的下降方向。校正需要计算步长，与预测求解子问题相比，那只是很小的工作量。

论文 [4] 对直接推广的 ADMM 方法进行改造，为了避免校正，从原始变量的第二个子问题开始，都平行处理但额外加一个正则项。平行处理，意味着太自由，以后又不准备校正，那就用加正则项让它们不会走得太远。文章的初稿发到 Optimization Online 上，2015 年正式发表在 IMA Numerical Analysis。这个方法已经被 UCLA 数学系 S. Osher 教授 (Osher 是美国工程院院士，两次被世界数学家大会邀请报告，其中 2010 年的一次是一小时报告，2014 年世界数学家大会高斯奖得主) 和他的合作者用在非负矩阵分解和降维问题上 (The method proposed by He, Tao and Yuan is appropriate for this application)。文章花整整一页的篇幅介绍如何将我们的方法用来求解他们的具体问题。

中文论文[5]是《修正乘子交替方向法求解三个可分离算子凸优化》，是[2]和[4]的综述.

论文[6]是对增广拉格朗日乘子法做全面平行松弛，以后又做收缩校正，文章于 2015 年发表在 SIAM Optimization。校正可以采用一个保证收敛的有下界的固定步长，也可以通过计算得到合适的步长。由于固定步长往往过于保守，影响收敛速度，论文的算例说明应该采用通过计算得到的步长。

论文[7]给出的是处理线性约束的多个可分离目标函数的凸优化问题的预测-校正方法，文章于 2017 年发表在 Mathematics of Operation Research。方法的预测还是基于交替方向法的正式推广，校正可以分别采取向前和向后两种回代，步长都通过计算得到。

论文[8]首先证明线性约束的三个可分离目标函数的凸优化问题，只要约束矩阵中有两个是互相正交的，不管子问题如何排序，直接推广的 ADMM 还是保证收敛的。对一般的多个可分离目标函数的问题，直接推广的 ADMM 不能保证收敛，文章中用一个只有零解的齐次线性方程组 Ax=0 作为例子说明问题。

三个算子的实际问题中，线性约束矩阵中，往往至少有一个是单位矩阵。对这种更贴近实际应用的三个算子的问题，直接推广的 ADMM 方法，既没有证明收敛也没有举出反例，仍然是一个遗留下来的具有挑战性的问题。

最后说到论文[9]，它处理的是三个目标函数的问题，还是用直接推广的交替方向法做预测，在一个统一框架下指导下，提供了各种不同形式的校正，从而给出了一簇方法。

对求解线性约束的多个可分离目标函数的凸优化问题，我们主要推荐 [2]和[4] 中的方法。在阅读这些文章的时候，可以参考我主页上的第三个报告以及我的中文综述文章《我和乘子交替方向法 20 年》。