



南京大学数学系 Department of Mathematics Nanjing University

何炳生教授

Prof. Dr. Bingsheng HE

邮编: 210093 Email:[hebma@nju.edu.cn](mailto:hebma@nju.edu.cn) Homepage: <http://maths.nju.edu.cn/~hebma>

“变分不等式”和“邻近点算法”是我们构造凸优化分裂收缩算法的两大法宝。首先,我们把 min-max 问题和线性约束的凸优化问题都化成等价的单调变分不等式,然后考虑求解单调变分不等式的邻近点算法。这种做法在处理大型结构性优化问题时的优越性,近年得到越来越多的学者认可。

论文[1]是我们 2012 年在 SIAM J. Imaging Science 发表的文章,初稿就被一些欧美学者在他们最新的论文中引用。A. Chambolle 和 T. Pock 是在图像学领域很有影响的学者,他们提出的方法,图像学界称之为 C-P 方法,我们读到他们的 Preprint,读不懂,就试图从变分不等式的角度,用 PPA 的格式去套,用变分不等式的 PPA 算法框架证明了 C-P 算法的收敛性。我们的文章在网上挂出来以后,就被 A. Chambolle 和 T. Pock (C-P 方法的提出者)说成是 which greatly simplifies the convergence analysis。

Chambolle 和 Pock 在他们后继发表在 Mathematical Programming 的文章里,将 He & Yuan 的 PPA 形式,称为一个 elegant interpretation。他们在文章的 Introduction 部分,就说是 exploit 我们的 Proximal-Point Implementation。当年刚从加州理工学院博士毕业的 S. Becker (2014 年世界数学家大会一小时邀请报告人 E. Candes 的学生)在一篇短文中第一句就说 Recent works such as [HY12] have proposed a very simple yet powerful technique for analyzing optimization methods, [HY12]就是我和袁晓明 2012 年发表在 SIAM J. Imaging Science 的这篇文章,这里的论文[1]。

对 VI 框架下 PPA 算法思想的通俗一些的解释,建议读者阅读我们 2012 年发表在中国科学中文版的文章[2]。文章对如何将简单的线性约束凸优化问题转换成单调变分不等式,怎样构造相应的邻近点算法求解,以及变分不等式邻近点算法的一些性质,都有阐述。

我们把这些方法叫做变分不等式框架下的 Customized proximal point algorithm,中文说成是“按需定制的邻近点算法”。说白了,就是通过怎样的方式去设计迭代过程中的子问题,结果就凑成了一个等价变分不等式问题的 PPA。文章[3]说的就是这些,2013 年发表在 Computational Optimization and Application。

发表在中国科学英文版的论文[4],是说对经典的 ADMM 通过交换  $y$  子问题求解和乘子更新的次序,相应的方法就可以看作一个 PPA 算法,进而得以延拓,提高算法效率。

为求解线性约束下的凸优化和鞍点问题,我们于 2014 年发表在 Computational Optimization and Application 的论文[5]给出了设计“按需定制邻近点算法”的统一框架。对一些典型问题,文章给出了具体的算法方案。

为大家所熟知的 Primal-Dual Hybrid Gradient Methods,是 Zhu 和 Chan 的一个没有正式发表的 Report,见 M. Zhu, T. F. Chan: An Efficient Primal-Dual Hybrid Gradient Algorithm for Total Variation Image Restoration, CAM Report 08-34, UCLA, Los Angeles, CA, 2008。我们的论文[6]说明,这类方法可以在变分不等式框架下改造成收敛的 PPA 类方法。

用好“变分不等式 (VI)”和“邻近点算法 (PPA)”两个法宝,是我主导的变分不等式投影收缩算法和凸优化的分裂收缩算法的主线。更清晰的介绍,我还是建议读者注意我主页上挂的一些最近的报告。