南京大学数学系 Department of Mathematics Nanjing University
何 炳 生 教授 Prof. Dr. Bingsheng HE
邮编：210093 Email:hebma@nju.edu.cn Homepage: http://maths.nju.edu.cn/~hebma

说起我做变分不等式投影收缩算法的研究，跟人生经历还有一定关系。首先，我对优化感兴趣，源于文化大革命期间“推广优选法小分队”在我家乡县城的一个普及报告。文革结束恢复高考我上了大学，华罗庚先生 1980 年在南京大学礼堂关于优选法和数学应用的报告，以及南京大学何旭初先生在国内优化界的学术地位，决定了我选择最优化作为专业方向。

听优选法的报告使我懂得，现实生活中的数学问题里，函数一般没有显式表达式。华先生推广的优选法就是求一元单峰函数极值点的只用函数值且少用函数值的方法。在优化领域，最初我热心于变分不等式的研究，是因为它是描述平衡问题的核心工具，可以用来解释管理科学中的一些问题。由于受当年华先生推广优选法的影响，在变分不等式的求解方法中，我主要对只用函数值的方法感兴趣，致力于研究少用函数值的方法。

变分不等式的投影收缩算法，我先从线性变分不等式（LVI）做起。我的第一篇关于线性变分不等式求解的 SCI 论文 1992 年发表在 Applied Mathematics& Optimization。后来发现，这些方法可以设计得更加简化明了，我于 1994 年在 Mathematical Programming 和 Numerische Mathematik 上又发了[2]和[3]两篇短文。有兴趣读这两篇文章的朋友，只需要读文章的前面几页。这两篇文章中的方法被中山大学珠江学者张雨浓教授课题组成功应用到机器人的运动规划和实时控制中，在他们的论文中，[2]中的方法称为 94 LVI，因为方法是我们在 1994 年发表的求解 LVI 的方法；[3] 中的方法称为 E47，因为算法公式在论文中标号是公式 (4) 到（7）。据作者向我介绍，机器人控制中有一个规模不大的二次规划，要在三毫秒时间内算出结果，试用 MATLAB 中的程序都不能达到要求，他们用 94 LVI 和 E47 解决了问题，起到了其他算法无法替代的作用。

关于非线性变分不等式（NVI）的投影收缩算法，我的第一篇论文是南京大学数学研究所的预印本 94-11，1997 年发表在 Applied Mathematics & Optimization，也就是这里的论文[4]。文章中的(6)、(7) 和 (8) 三个简单而又重要的不等式，被我在后续的文章中称为三个基本不等式。已知的一些求解变分不等式的投影收缩算法，搜索方向都是根据这三个基本不等式的不同组合得的。

构造论文[5]中方法的搜索方向，要比[4]中方法的少用一个基本不等式，但完成迭代需要多一个到凸集上的投影，在许多实际问题中，这种投影往往是容易实现的。如果投影很容易，[5]和[4]中方法之间的关系，类似于求解线性变分不等式时[3]中的 E47 和[2]中的 94 LVI 之间的关系。

我们在求解 NVI 投影收缩算法方面发表的论文，得到了包括 UC Berkeley 计算机系 Michael I. Jordan 教授 (Jordan 教授是机器学习界最有影响的美国科学院和工程院院士，2018 年世界数学家大会一小时邀请被告人) 在内的学者引用。我们的一些相当细致的计算法则被他们借鉴，相关的定理被写进他们论文的附录。论文[4]和[5]中的方法中科院武汉岩土力学研究所国家重点实验室的郑宏研究员用来求解岩土裂缝工程问题，解决了岩土力学中长期困扰他们的问题。

论文[6]对[4]和[5]中的方法进行了比较，说明这两种方法采用的是一对孪生搜索方向和相同的步长，每次迭代多一次投影的方法能提高效率 30% 左右。

论文[7]和[8]对投影收缩算法做了一般的推广。投影收缩算法是通过投影得到预测点的预测校正方法，[7]和[8]的方法采用更一般的预测点，并提出了设计这类方法的统一框架。[8]中系统的算例说明：对 LVI，算法 E47 比 94 LVI 效率高，对 NVI, [5]中的方法比[4]中的方法效率高。

论文[9]和[10]分别证明了求解 NVI 和 LVI 的投影收缩算法的 O(1/t) 收敛速率，这些证明都不复杂。证明求解 LVI 的投影收缩算法的收敛速率比证明求解 NVI 的投影收缩算法的收敛速率反而复杂一些。

对变分不等式背景、应用和求解方法感兴趣的读者，也建议阅读我主页上系列讲义的 1-3 讲。

如果要问我初学者先读哪几篇，我建议先读我主页上系列讲义的第二讲，再读这里的论文[4]—[6]。