第44卷第3期　　数　学　学　报　　Vol.44, No.3
2001年5月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　May, 2001

文章编号: 0583-1431(2001)03-0459-010　　**文献标识码**: **A**

同调方程

黄兆泳

(北京师范大学数学系　北京　100875)
(南京大学数学系　江苏　南京　210093)

摘　要　设 R 是左、右凝聚环， ${}_R\omega_R$ 是一个忠实平衡自正交双模. 对有限表现左 R- 模 A 和正整数 n, 本文研究了形如 $A = \mathrm{Ext}_R^n(X, \omega)$ 的同调方程. 给出了模范畴 $\{\mathrm{Ext}_R^n(B, R) \mid B$ 为有限表现右 R- 模 $\}$ 是子模闭的充要条件, 并举例说明了该模范畴并非总是子模闭的.

关键词　凝聚环；有限表现模；同调方程；子模闭
MR(2000) 主题分类　16E10, 16E30
中图分类　O153.3

Homological Equations

HUANG Zhao Yong

Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, *P. R. China*)
(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *P. R. China*

Abstract　Let R be a left and right coherent ring and ${}_R\omega_R$ a faithfully balanced self-orthogonal bimodule. For any finitely presented left R-module A and a positive integer n, we study in this paper the homological equations such as $A = \mathrm{Ext}_R^n(X, \omega)$. The necessary and sufficient conditions of the category of modules $\{\mathrm{Ext}_R^n(B, R) \mid B$ is any finitely presented right R-module$\}$ being submodule closed are given, and some examples are given to explain that such a category of modules as above is not always submodule closed.

Keywords　Coherent rings; Finitely presented modules; Homological equations; Submodule closed
MR(2000) Subject Classification　16E10, 16E30
Chinese Library Classification　O153.3

1　引言

设 R 是环， ${}_R\omega_R$ 是一个 R-R 双模， A 是一个左 (右) R- 模. 若对正整数 n, 存在右 (左) R- 模 B 使得 $A = \mathrm{Ext}_R^n(B, \omega)$, 则称同调方程 $A = \mathrm{Ext}_R^n(X, \omega)$ 有解. 讨论这类同调方程的解的问题是同调代数中的一个有趣课题. 一些学者研究了这个问题的几种特殊情形. Auslander M. 在 [1] 中证明了如下结论：设 R 是左、右 noether 环， B 是一个有限生成左 R- 模，则对 $\mathrm{Ext}_R^1(B, R)$

收稿日期：　1999-09-14；接受日期：　2000-04-25
基金项目：国家自然科学青年基金资助项目 (10001017); 国家教委留学回国人员科研启动基金资助项目

的任意商模 A, 方程 $A=\mathrm{Ext}_R^1(X,R)$ 总是有解. 进而他提出问题：是否对 $\mathrm{Ext}_R^1(B,R)$ 的任意子模 C, 方程 $C=\mathrm{Ext}_R^1(X,R)$ 也总是有解呢？在 [1] 中，他肯定回答了该问题的一部分：设 R 是左、右 noether 环， M 是有限生成左 R- 模. 如果 $M=M_1\oplus M_2$, 则方程 $M=\mathrm{Ext}_R^1(X,R)$ 有解当且仅当方程 $M_i=\mathrm{Ext}_R^1(Y,R)$ 有解，其中 $i=1,2$.

设 R 是环， A 是一个左 (右) R- 模. 如果存在有限生成投射左 (右) R- 模 P_0 和 P_1 使得 $P_1\to P_0\to A\to 0$ 是正合的，则称 A 是有限表现的. 如果环 R 的每个有限生成左 (右) 理想是有限表现的，则称 R 是左 (右) 凝聚环. 显然，左 (右) noether 环是左 (右) 凝聚环. 但反之不然 [2]. 如果对任意左 (右) 有限表现 R- 模 B, $\mathrm{Ext}_R^1(B,R)=0$, 则称 R 为左 (右) FP- 自内射环. 丁南庆在 [3] 中研究了形如 $A=\mathrm{Ext}_R^n(X,R)$ 的同调方程，他证明了，如果 R 是左、右凝聚环且左 FP- 自内射， n 为正整数，则对有限表现非零左 R- 模 A, 方程 $A=\mathrm{Ext}_R^n(X,R)$ 以某有限表现右 R- 模为其解.

如无特别说明，本文中的 R 是指左、右凝聚环，所讨论的模均指有限表现模. 我们用 $\mathrm{mod}\,R$ $\cdot(\mathrm{mod}\,R^{op})$ 表示由有限表现左 (右) R- 模组成的模范畴. 设 ${}_R\omega_R$ 是一个 R-R 双模. 如果 ${}_R\omega_R$ 满足如下两个条件：

(1) 自然同态 $R\to\mathrm{End}({}_R\omega)^{op}$ 和 $R\to\mathrm{End}(\omega_R)$ 都是同构；

(2) 对任意 $i\geq 1$, $\mathrm{Ext}_R^i({}_R\omega,{}_R\omega)=0=\mathrm{Ext}_R^i(\omega_R,\omega_R)$,

则称之为忠实平衡自正交双模. 显然， ${}_RR_R$ 是一个忠实平衡自正交双模. 设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{mod}\,R$ 的一个全子范畴. 如果 $\mathcal{X}$ 中任意模的子模仍在 $\mathcal{X}$ 中，则称 $\mathcal{X}$ 是子模闭的. 对正整数 n 和忠实平衡自正交双模 ${}_R\omega_R$, 我们将讨论同调方程 $A=\mathrm{Ext}_R^n(X,\omega)$ 的解的问题以及 $\mathrm{mod}\,R$ 的全子范畴 $\mathcal{E}_n(R)=\{\mathrm{Ext}_R^n(B,\omega)\mid B\in\mathrm{mod}\,R^{op}\}$ 的子模闭问题. 所得结果推广了 [1] 和 [3] 中的主要结果.

2 一些定义和引理

以下设 ${}_R\omega_R$ 是一个给定的忠实平衡自正交双模且 n 是一个正整数. 下面我们只给出关于左 R- 模的一些定义，对于右 R- 模 (即 R^{op}- 模) 可以给出类似的定义.

设 $A\in\mathrm{mod}\,R\,(\mathrm{mod}\,R^{op})$. $\mathrm{l.pd}_R(A)$ $(\mathrm{r.pd}_R(A))$, $\mathrm{w.gl.dim}R$ 分别表示 A 的左 (右) 投射维数和 R 的弱整体维数. 注意到对有限表现左 (右) R- 模 A 而言，其平坦维数和投射维数是一致的，所以 $\mathrm{w.gl.dim}\,R=\sup\{\mathrm{l.pd}_R(C)\mid C\in\mathrm{mod}\,R\}=\sup\{\mathrm{r.pd}_R(A)\mid A\in\mathrm{mod}\,R^{op}\}$. 记 $A^\omega=\mathrm{Hom}_R(A,\omega)$, $A^{\omega\omega}=(A^\omega)^\omega$. 自然同态 $\sigma_A:A\to A^{\omega\omega}$ 定义为： $\sigma_A(x)(f)=f(x)$, 其中 $x\in A$, $f\in A^\omega$. 如果 σ_A 是单同态，则称 A 为 ω- 无挠模；如果 σ_A 是同构，则称 A 为 ω- 自反模. 显然，任意有限生成投射模 P 以及对偶模 P^ω 都是 ω- 自反模，即 σ_P 和 σ_{P^ω} 都是同构. 如果 n 是最小的正整数使得对任意 $0\leq i\leq n-1$, $\mathrm{Ext}_R^i(A,\omega)=0$, 则定义 $\mathrm{grade}_\omega A=n$. 记 $\mathcal{G}_n(R)=\{A\in\mathrm{mod}\,R\mid\mathrm{grade}_\omega A=n\}$. 如果 $\mathrm{grade}_\omega A=n=\mathrm{l.pd}_R(A)$, 则称 A 为 (相对于 ω 的) n- 完全模. 称 R- 模正合序列 $X_1\to X_2\to\cdots\to X_n$ 是 (相对于 ω) 对偶正合的，如果由它导出的序列 $X_n^\omega\to\cdots\to X_2^\omega\to X_1^\omega$ 也正合.

当 R 是 artin 代数时，我们在 [4] 中证明了下面的两个引理. 其实，那里的证明同样适用于当 R 是左、右凝聚环的情形，故下面省去证明过程.

引理 2.1 设 $A\in\mathrm{mod}\,R\,(\mathrm{mod}\,R^{op})$, 下列陈述等价.

(1) 对任意 $1\leq i\leq n$, $\mathrm{Ext}_R^i(A,\omega)=0$;

(2) 任意正合序列 $0\to K\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0$ 是对偶正合的，其中每个 P_i

是有限生成投射模;

(3) 任意正合序列 $P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ 是对偶正合的，其中每个 P_i 是有限生成投射模.

引理 2.2 设 $A \in \operatorname{mod} R\,(\operatorname{mod} R^{op})$, $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to A \to 0$ 是 A 的一个有限生成投射分解. 记 $\operatorname{Tr}_\omega A = \operatorname{Coker} f^\omega$, 这里 $f^\omega = \operatorname{Hom}_R(f, \omega)$. 我们有下面的正合序列:

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}_\omega A, \omega) \to A \xrightarrow{\sigma_A} A^{\omega\omega} \to \operatorname{Ext}^2_R(\operatorname{Tr}_\omega A, \omega) \to 0.$$

对任意 R- 模 C (不必有限表现), 我们用 $\operatorname{l.fd}_R(C)$ 表示 C 的左平坦维数.

引理 2.3 设 I 是任意内射 R- 模 (I 不必有限表现), 则 $\operatorname{l.fd}_R(I) \le n-1$ 当且仅当

$$\operatorname{Hom}_R\big(\operatorname{Ext}^n_R(M, R), I\big) = 0, \quad \text{其中} \quad M \in \operatorname{mod} R^{op}.$$

证明 由 [5] 定理 9.51 “Remark” 易得. 证毕.

3 同调方程

本节我们将研究形如 $A = \operatorname{Ext}^n_R(X, \omega)$ 的同调方程的解的问题. 记 $\operatorname{add}(\omega_R) = \{C \in \operatorname{mod} R^{op} \mid C$ 是 ω_R 的有限直和的直和项, 即存在正整数 m, 使得 C 是 $\omega^{(m)}$ 的直和项 $\}$. 对任意 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$, 若存在正合序列 $\cdots \to A_i \to \cdots \to A_1 \to A_0 \to A \to 0$, 其中每个 $A_i \in \operatorname{add}(\omega_R)$, 则记 $\omega\text{-}\dim_R(A) = \inf\{t \mid$ 存在正合序列 $0 \to A_t \to \cdots \to A_1 \to A_0 \to A \to 0$, 其中每个 $A_i \in \operatorname{add}(\omega_R)\}$.

定理 3.1 设 $C \in \operatorname{mod} R$.

(1) 如果 C 是非零 n- 完全模, 则方程 $C \cong \operatorname{Ext}^n_R(X, \omega)$ 有解且其任意解 A 满足 $\operatorname{grade}_\omega A = n = \omega - \dim_R(A)$.

(2) 如果 $\operatorname{w.gl.dim} R = n$, 则存在一个对偶 $\operatorname{Ext}^n_R(-, \omega) : \mathcal{G}_n(R) \to \mathcal{G}_n(R^{op})$.

证明 (1) 设 C 是非零 n- 完全模, 即 $\operatorname{grade}_\omega C = n = \operatorname{l.pd}_R(C)$. 不妨设 $0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C \to 0$ 是 C 的一个有限生成投射分解. 因为 $\operatorname{grade}_\omega C = n$, 于是易知由上面的正合序列可以导出正合序列

$$0 \to P_0^\omega \xrightarrow{d_1^\omega} P_1^\omega \to \cdots \to P_{n-1}^\omega \xrightarrow{d_n^\omega} P_n^\omega \to \operatorname{Ext}^n_R(C, \omega) \to 0.$$

令 $A = \operatorname{Ext}^n_R(C, \omega)$. 显然, $\omega\text{-}\dim_R(A) \le n$ 且 $\operatorname{Ext}^{n+i}_R(A, \omega) \cong \operatorname{Ext}^i_R\big(P_0^\omega, \omega\big) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

注意到对任意 $1 \le i \le n$, σ_{P_i} 是同构, 于是我们有如下的正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \to \cdots \to & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow & C & \to 0 \\
& \downarrow{\sigma_{P_n}} & & \downarrow{\sigma_{P_{n-1}}} & & \downarrow{\sigma_{P_1}} & & \downarrow{\sigma_{P_0}} & & & \\
0 \to A^\omega \to & P_n^{\omega\omega} & \xrightarrow{d_n^{\omega\omega}} & P_{n-1}^{\omega\omega} & \to \cdots \to & P_1^{\omega\omega} & \xrightarrow{d_1^{\omega\omega}} & P_0^{\omega\omega} & \to & \operatorname{Ext}^n_R(A, \omega) & \to 0
\end{array}$$

因此 $A^\omega \cong \operatorname{Ker} d_n^{\omega\omega} \cong \operatorname{Ker} d_n = 0$ 且 $\operatorname{Ext}^n_R(A, \omega) \cong \operatorname{Coker} d_1^{\omega\omega} \cong \operatorname{Coker} d_1 \cong C \ne 0$. 于是知 $n = \sup\big\{t \mid \operatorname{Ext}^t_R(A, \omega) \ne 0\big\}$. 由 $\omega\text{-}\dim_R(A)$ 的定义, 不难证明, 若 $\omega\text{-}\dim_R(A) < \infty$, 则

$$\omega - \dim_R(A) = \sup\big\{t \mid \operatorname{Ext}^t_R(A, \omega) \ne 0\big\}.$$

所以 $\omega\text{-}\dim_R(A)=n$.

另外，由上图中第 2 行的正合性知正合序列 $P_0^\omega \xrightarrow{d_1^\omega} P_1^\omega \to \cdots \xrightarrow{d_n^\omega} P_n^\omega \to A \to 0$ 是对偶正合的，于是由引理 2.1 知，对任意 $1 \le i \le n-1$, $\operatorname{Ext}_R^i(A,\omega)=0$. 而上面已证 $A^\omega=0$ 和 $\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\neq 0$, 故 $\operatorname{grade}_\omega A=n$.

(2) 设 $C\in\mathcal{G}_n(R)\big(\mathcal{G}_n(R^{op})\big)$. 因为 $\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\neq 0$, 所以 $\operatorname{l.pd}_R(C)(\operatorname{r.pd}_R(C))\ge n$. 但是，$n=\operatorname{w.gl.dim}R=\sup\{\operatorname{l.pd}_R(A)\operatorname{mod}A\in\operatorname{mod}R\}=\sup\big\{\operatorname{r.pd}_R(B)\mid B\in\operatorname{mod}R^{op}\big\}$, 所以 $\operatorname{l.pd}_R(C)(\operatorname{r.pd}_R(C))=n$. 由 (1) 的证明过程知，$\operatorname{grade}_\omega\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)=n$ 且 $C\cong\operatorname{Ext}_R^n\big(\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega),\omega\big)$, 所以 $\operatorname{Ext}_R^n(-,\omega):\mathcal{G}_n(R)\to\mathcal{G}_n(R^{op})$ 是一个对偶. 证毕.

注意到当 ${}_R\omega_R={}_RR_R$ 时，对任意 $A\in\operatorname{mod}R^{op}$, $\omega\text{-}\dim_R(A)=\operatorname{r.pd}_R(A)$. 因此我们有

推论 3.2 设 $C\in\operatorname{mod}R$, ${}_R\omega_R={}_RR_R$.

(1) 如果 C 是非零 n- 完全模，则方程 $C\cong\operatorname{Ext}_R^n(X,R)$ 有解且其解也为 n- 完全模.

(2) 如果 $\operatorname{w.gl.dim}R=n$, 则存在一个对偶 $\operatorname{Ext}_R^n(-,R):\mathcal{G}_n(R)\to\mathcal{G}_n(R^{op})$.

推论 3.3[3] 设 R 是左 FP- 自内射环且 $0\neq C\in\operatorname{mod}R$. 则方程 $C\cong\operatorname{Ext}_R^n(X,R)$ 以有限表现右 R- 模 B 为其解，且 $\operatorname{r.pd}_R(B)=n\Leftrightarrow\operatorname{Hom}_R(C,R)=0$.

由定理 3.1, 我们还可得到 $\mathcal{G}_n(R)$ 和 $\mathcal{E}_n(R)$ 之间的如下包含关系.

命题 3.4 (1) 如果 $\operatorname{w.gl.dim}R=n$, 则 $\mathcal{G}_n(R)\subseteq\mathcal{E}_n(R)$.

(2) 设 $C\in\operatorname{mod}R\,(\operatorname{mod}R^{op})$. 如果 $\operatorname{l.pd}_R(C)(\operatorname{r.pd}_R(C))=n(\ge 2)$, 则 $\operatorname{grade}_\omega\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\ge 2$.

证明 (1) 设 $0\neq C\in\mathcal{G}_n(R)$. 因 $\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\neq 0$, 所以 $\operatorname{l.pd}_R(C)\ge n$. 但 $\operatorname{w.gl.dim}R=n$, 故 $\operatorname{grade}_\omega C=n=\operatorname{l.pd}_R(C)$. 于是由定理 3.1 知，存在 $A\in\operatorname{mod}R^{op}$ 使得 $C\cong\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$, 即 $C\in\mathcal{E}_n(R)$. 故 $\mathcal{G}_n(R)\subseteq\mathcal{E}_n(R)$.

(2) 设 $C\in\operatorname{mod}R$ 且 $\operatorname{l.pd}_R(C)=n(\ge 2)$. 不妨设 $0\to P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to C\to 0$ 是 C 的一个有限生成投射分解. 令 $B=\operatorname{Coker}d_n$. 则有正合序列

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to B \longrightarrow 0 \tag{3.4.1}$$

由它可导出正合序列

$$0 \to B^\omega \to P_{n-1}^\omega \xrightarrow{d_n^\omega} P_n^\omega \to \operatorname{Ext}_R^1(B,\omega) \to 0 \tag{3.4.2}$$

显然 $\operatorname{Ext}_R^1(B,\omega)\cong\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)$, 所以由正合序列 (3.4.2) 可导出如下的正合交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
0\to\big[\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\big]^\omega\to & P_n^{\omega\omega} & \xrightarrow{d_n^{\omega\omega}} & P_{n-1}^{\omega\omega} \\
 & \big\downarrow\sigma_{P_n} & & \big\downarrow\sigma_{P_{n-1}} \\
0\qquad\qquad\to & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1}
\end{array}$$

因为 σ_{P_n} 和 $\sigma_{P_{n-1}}$ 都是同构，所以 $\big[\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\big]^\omega\cong\operatorname{Ker}d_n^{\omega\omega}\cong\operatorname{Ker}d_n=0$.

将引理 2.2 应用于正合序列 (3.4.1) 可得如下正合序列

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^1\big(\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega),\omega\big) \to B \xrightarrow{\sigma_B} B^{\omega\omega} \to \operatorname{Ext}_R^2\big(\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega),\omega\big) \to 0.$$

因 B 是 P_{n-2} 的子模，所以 B 是 ω- 无挠的，即 σ_B 是单同态，因此 $\operatorname{Ext}_R^1\big(\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega),\omega\big)=0$. 故 $\operatorname{grade}_\omega\operatorname{Ext}_R^n(C,\omega)\ge 2$. 证毕.

推论 3.5 如果 $\operatorname{w.gl.dim}R=2$, 则 $\mathcal{G}_2(R)=\mathcal{E}_2(R)$.

证明 由命题 3.4(1) 知 $\mathcal{G}_2(R)\subseteq\mathcal{E}_2(R)$. 现设 $0\neq C\in\mathcal{E}_2(R)$, 即存在 $A\in\mathrm{mod}\,R^{op}$ 使得 $C\cong \mathrm{Ext}_R^2(A,\omega)$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^2(A,\omega)\neq 0$, 所以 $\mathrm{r.pd}_R(A)\geq 2$. 但 $\mathrm{w.gl.dim}\,R=2$, 所以 $\mathrm{r.pd}_R(A)=2$. 由命题 3.4(2) 知, $\mathrm{grade}_\omega C=\mathrm{grade}_\omega \mathrm{Ext}_R^2(A,\omega)\geq 2$, 从而 $\mathrm{grade}_\omega C\geq 2\geq \mathrm{l.pd}_R(C)$. 完全类似定理 3.1 的证明可证，存在非零 R^{op}- 模 B 使得 $\mathrm{Ext}_R^2(C,\omega)\cong B\neq 0$, 故 $\mathrm{grade}_\omega C=2$. 从而 $\mathcal{E}_2(R)\subseteq\mathcal{G}_2(R)$, 于是有 $\mathcal{E}_2(R)=\mathcal{G}_2(R)$. 证毕.

4 $\mathcal{E}_n(R)$ 的子模闭性

引言中的 Auslander 问题其实等价于：当 ${}_R\omega_R={}_RR_R$ 时，$\mathcal{E}_1(R)$ 是子模闭的吗？在本节的开始，我们考虑更广的情形，给出 $\mathcal{E}_n(R)$ 是子模闭的一个充要条件. 在后半段，我们将就 ${}_R\omega_R$ 不必等于 ${}_RR_R$ 的一般情形来讨论 $\mathcal{E}_n(R)$ 的性质.

设

$$0\ \to\ {}_RR\ \to\ I_0\ \xrightarrow{\alpha_0}\ I_1\ \xrightarrow{\alpha_1}\ I_2\ \to\ \cdots\ \to\ I_i\ \xrightarrow{\alpha_i}\ \cdots \tag{4.1.1}$$

是 R 作为左 R- 模的极小内射分解.

定理 4.1 设 ${}_R\omega_R={}_RR_R$ 且 $\mathrm{w.gl.dim}\,R=n$. 下列陈述等价：

(1) $\mathrm{l.fd}_R\big(\oplus_{i=0}^{n-1}I_i\big)\leq n-1$; (2) $\mathcal{G}_n(R)=\mathcal{E}_n(R)$ 且 $\mathcal{E}_n(R)$ 是子模闭的.

证明 (1)⇒(2) 设 $\mathrm{l.fd}_R\big(\oplus_{i=0}^{n-1}I_i\big)\leq n-1$. 由引理 2.3 知，对任意 $0\neq A\in\mathcal{E}_n(R)$, $\mathrm{Hom}_R(A,I_i)=0$, $0\leq i\leq n-1$. 将长正合序列 (4.1.1) 分解成短正合序列：

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\alpha_i\longrightarrow I_i\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\alpha_{i+1}\longrightarrow 0,$$

其中 $0\leq i\leq n-1$, $R=\mathrm{Ker}\,\alpha_0$. 于是有如下的正合序列：

$$\begin{aligned}0\ &\to\ \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_i)\ \to\ \mathrm{Hom}_R(A,I_i)\ \to\ \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_{i+1})\\ &\to\ \mathrm{Ext}_R^1(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_i)\ \to\ 0\ \ (0\leq i\leq n-1).\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_i)=0$ $(0\leq i\leq n-1)$ 和 $\mathrm{Ext}_R^1(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_i)=0$ $(0\leq i\leq n-2)$. 注意到对任意 $0\leq i\leq n-2$, $\mathrm{Ext}_R^1(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_i)\cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(A,\mathrm{Ker}\,\alpha_0)=\mathrm{Ext}_R^{i+1}(A,R)$, 所以对任意 $0\leq i\leq n-1$, $\mathrm{Ext}_R^i(A,R)=0$, 即 $\mathrm{grade}_RA\geq n$. 下证 $\mathrm{grade}_RA=n$. 否则，如果 $\mathrm{grade}_RA>n$, 则 $\mathrm{Ext}_R^n(A,R)=0$. 因为 $\mathrm{w.gl.dim}\,R=n$, 所以对任意 $i\geq n+1$, $\mathrm{Ext}_R^i(A,R)=0$, 从而知对任意 $i\geq 0$, $\mathrm{Ext}_R^i(A,R)=0$. 于是由 [6] 推论 4.3 知 $A=0$, 矛盾. 故 $A\in\mathcal{G}_n(R)$, 即有 $\mathcal{E}_n(R)\supseteq\mathcal{G}_n(R)$. 由命题 3.4 知 $\mathcal{G}_n(R)\subseteq\mathcal{E}_n(R)$, 因此 $\mathcal{G}_n(R)=\mathcal{E}_n(R)$.

设 B 是 $\mathcal{E}_n(R)$ 中某个模 A 的非零子模. 因为对任意 $0\leq i\leq n-1$, $\mathrm{Hom}_R(A,I_i)=0$, 易知 $\mathrm{Hom}_R(B,I_i)=0$, $0\leq i\leq n-1$. 完全类似上面的讨论，我们有 $B\in\mathcal{G}_n(R)$. 从而 $B\in\mathcal{E}_n(R)$, 即 $\mathcal{E}_n(R)$ 是子模闭的.

(2)⇒(1) 先证 $\mathrm{l.fd}_R(I_0)\leq n-1$. 若 $\mathrm{l.fd}_R(I_0)>n-1$, 由引理 2.3 知，存在 $0\neq E\in\mathcal{E}_n(R)$, 使得 $f:E\to I_0$ 是非零同态. 因为 R 是 I_0 的本质子模，所以 $f^{-1}(R)$ 是 E 的一个非零子模，且属于 $\mathcal{E}_n(R)$ (因为 $\mathcal{E}_n(R)$ 是子模闭的), 从而属于 $\mathcal{G}_n(R)$. 于是 $\mathrm{Hom}_R(f^{-1}(R),R)=0$, 矛盾. 故 $\mathrm{l.fd}_R(I_0)\leq n-1$.

下证 $\mathrm{l.fd}_R(I_1)\leq n-1$. 若 $\mathrm{l.fd}_R(I_1)>n-1$, 由引理 2.3 知，存在 $0\neq E'\in\mathcal{E}_n(R)$, 使得 $g:E'\to I_1$ 是非零同态. 因为 $\mathrm{Ker}\,\alpha_1$ 是 I_1 的本质子模，所以 $g^{-1}(\mathrm{Ker}\,\alpha_1)$ 是 E' 的非零子模，且属于 $\mathcal{E}_n(R)$. 因为 $\mathrm{l.fd}_R(I_0)\leq n-1$, 于是由引理 2.3 知， $\mathrm{Hom}_R\big(g^{-1}(\mathrm{Ker}\,\alpha_1),I_0\big)=0$.

由正合序列 $0 \to R \to I_0 \to \operatorname{Ker}\alpha_1 \to 0$ 可导出正合序列

$$\operatorname{Hom}_R\big(g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1), I_0\big) \to \operatorname{Hom}_R\big(g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1), \operatorname{Ker}\alpha_1\big) \to \operatorname{Ext}_R^1\big(g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1), R\big) \to 0.$$

因为 $g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1) \in \mathcal{E}_n(R)$, 而由已知 $\mathcal{E}_n(R) = \mathcal{G}_n(R)$, 所以 $\mathcal{G}^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1) \in \mathcal{G}_n(R)$, 从而有 $\operatorname{Ext}_R^1\big(g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1), R\big) = 0$ (注：此时 $n \geq 2$). 故 $\operatorname{Hom}_R\big(g^{-1}(\operatorname{Ker}\alpha_1), \operatorname{Ker}\alpha_1\big) = 0$, 矛盾. 因此 $\operatorname{l.gf}_R(I_1) \leq n-1$.

如此地一直做下去，即有 $\operatorname{l.fd}_R(I_i) \leq n-1$, $0 \leq i \leq n-1$. 定理证毕.

推论 4.2 设 ${}_R\omega_R = {}_RR_R$ 且 $\operatorname{w.gl.dim} = 2$. 下列陈述等价：

(1) $\operatorname{l.fd}_R(I_0 \oplus I_1) \leq 1$; (2) $\mathcal{E}_2(R)$ 是子模闭的； (3) $\mathcal{G}_2(R)$ 是子模闭的.

证明 由定理 4.1 和推论 3.5 即得. 证毕.

注 在下面一节，我们将给出例子说明，存在环 R 满足 $\operatorname{w.gl.dim} R = 2$ 且满足推论 4.2 中的条件 (1), 则此时 $\mathcal{E}_2(R)$ 是子模闭的. 另外，还给出例子说明， $\mathcal{E}_2(R)$ 不总是子模闭的.

下面，我们就 ${}_R\omega_R$ 不必等于 ${}_RR_R$ 的一般情形来讨论哪些 R- 模在 $\mathcal{E}_n(R)$ 中或是 $\mathcal{E}_n(R)$ 中的模的子模.

先给出如下的引理.

引理 4.3 设 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$. 我们有正合序列

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega) \to \operatorname{Tr}_\omega\Omega^{n-1}(A) \xrightarrow{\sigma_{\operatorname{Tr}_\omega\Omega^{n-1}(A)}} \big[\operatorname{Tr}_\omega\Omega^{n-1}(A)\big]^{\omega\omega} \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A,\omega) \to 0 \quad (4.3.1)$$

其中 $\Omega^{n-1}(A)$ 表示 A 的第 $n-1$ 级合冲模.

证明 设 $P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ 是 R^{op}- 模 A 的一个有限生成投射分解. 注意到 $\operatorname{Coker} d_n = \Omega^{n-1}(A)$, 于是有正合序列 $P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \Omega^{n-1}(A) \to 0$. 记 $A_n = \operatorname{Tr}_\omega\Omega^{n-1}(A)$, 则我们有正合序列

记 $\operatorname{Coker} d_n^{\omega\omega} = B_n$, 则有正合序列

而且有如下的正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \to & \Omega^{n-1}(A) \to 0 \\
 & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{P_n}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{P_{n-1}}} & & \\
0 \to & A_n^\omega & \to & & P_n^{\omega\omega} & \xrightarrow{d_n^{\omega\omega}} & P_{n-1}^{\omega\omega} & \to & B_n \quad \to 0
\end{array}$$

因为 σ_{P_n} 和 $\sigma_{P_{n-1}}$ 都是同构，所以 $\Omega^{n-1}(A)\cong \operatorname{Coker} d_n\cong \operatorname{Coker} d_n^{\omega\omega}\cong B_n$. 考虑下面的正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "g"] & P_n^{\omega} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{P_n^{\omega}}"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{A_1}"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & N^{\omega} \arrow[r, "\pi_2^{\omega}"] & P_n^{\omega\omega\omega} \arrow[r] & A_n^{\omega\omega} \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^1(N,\omega) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 g 是一个导出同态. 因 $\sigma_{P_n^{\omega}}$ 是同构，由 Snake 引理知， $\operatorname{Ker}\sigma_{A_n}\cong \operatorname{Coker} g$ 且

$$\operatorname{Coker}\sigma_{A_n}\cong \operatorname{Ext}_R^1(N,\omega)\cong \operatorname{Ext}_R^2(B_n,\omega)\cong \operatorname{Ext}_R^2(\Omega^{n-1}(A),\omega)\cong \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A,\omega).$$

因为 $\sigma_{P_n^{\omega}}\cdot i_1=\pi_2^{\omega}\cdot g$, 所以 $(\sigma_{P_n^{\omega}}\cdot i_1)\pi_1=\big(\pi_2^{\omega}\cdot g\big)\pi_1$, 即 $\sigma_{P_n^{\omega}}\cdot d_n^{\omega}=\pi_2^{\omega}\cdot g\cdot\pi_1$. 又因 $\sigma_{P_n^{\omega}}\cdot d_n^{\omega}=d_n^{\omega\omega\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}$, 所以 $d_n^{\omega\omega\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}=\pi_2^{\omega}\cdot g\cdot\pi_1$, 即 $\pi_2^{\omega}\cdot i_2^{\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}=\pi_2^{\omega}\cdot g\cdot\pi_1$. 而 π_2^{ω} 是一个单同态，所以 $i_2^{\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}=g\cdot\pi_1$. 显然， $\operatorname{Im}\big(i_2^{\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}\big)\subseteq\operatorname{Im} g$. 由 [7] 定理 3.6 知，存在导出同态 h 使得下面的正合图可换 (注：因 $\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}$ 是一个同构，所以下图中的上行正合):

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n-1}^{\omega} \arrow[r, "i_2^{\omega}\cdot\sigma_{P_{n-1}^{\omega}}"] \arrow[d, "\pi_1"] & N^{\omega} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ext}_R^1(B_n,\omega) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N^{\omega} \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

由 Snake 引理知 h 是一个同构，所以

$$\operatorname{Coker} g\cong \operatorname{Ext}_R^1(B_n,\omega)\cong \operatorname{Ext}_R^1(\Omega^{n-1}(A),\omega)\cong \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega).$$

故 $\operatorname{Ker}\sigma_{A_n}\cong \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$, 从而得到所需的正合序列. 证毕.

注 注意到 $\Omega^0(A)=A$, 所以当 $n=1$ 时，由引理 4.3 可得正合序列

$$0\ \to\ \operatorname{Ext}_R^1(A,\omega)\ \to\ \operatorname{Tr}_{\omega}A\ \xrightarrow{\sigma_{\operatorname{Tr}_{\omega}A}}\ (\operatorname{Tr}_{\omega}A)^{\omega\omega}\ \to\ \operatorname{Ext}_R^2(A,\omega)\ \to\ 0.$$

在正合序列 (4.3.1) 中，我们记 $A_n=\operatorname{Tr}_{\omega}\Omega^{n-1}(A)$, $T^n(A)=\operatorname{Im}\sigma_{A_n}$.

引理 4.4 设 $A\in\operatorname{mod}R^{op}$. 则由满同态 $A_n\to T^n(A)$ 可导出同构 $[T^n(A)]^{\omega}\to A_n^{\omega}$; 等价地，由单同态 $\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\to A_n$ 导出的同态 $A_n^{\omega}\to\big[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\big]^{\omega}$ 是零同态.

证明 设 σ_{A_n} 有如下分解

即 $\sigma_{A_n}=i\cdot\pi$, 所以 $\sigma_{A_n}^{\omega}=\pi^{\omega}\cdot i^{\omega}$. 由 [8] 命题 23.5 知 $\sigma_{A_n}^{\omega}\cdot\sigma_{A_n^{\omega}}=1_{A_n^{\omega}}$, 因此 $\sigma_{A_n}^{\omega}$ 是分裂满同态，从而 π^{ω} 是满同态. 而 π^{ω} 显然是单的，所以 π^{ω} 是同构. 由序列 $0\to[T^n(A)]^{\omega}\xrightarrow{\pi^{\omega}}A_n^{\omega}\to\big[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\big]^{\omega}$ 的正合性及 π^{ω} 是同构即知 $A_n^{\omega}\to\big[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\big]^{\omega}$ 是零同态. 证毕.

引理 4.5 设 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$, $N \in \operatorname{mod} R$ 且 $0 \to N \xrightarrow{f} A_n$ 是一个 R- 模正合序列. 如果 $A_n^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega$ 是零同态, 则 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$.

证明 设由正合序列 $0 \to N \xrightarrow{f} A_n \xrightarrow{g} K \to 0$ (其中 $K = \operatorname{Coker} f$) 导出的同态 $A_n^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega$ 是零同态, 则 $K^\omega \xrightarrow{g^\omega} A_n^\omega$ 是一个同构, 从而 $A_n^{\omega\omega} \xrightarrow{g^{\omega\omega}} K^{\omega\omega}$ 也是一个同构. 于是由如下的上行正合的交换图 (4.5.1):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & A_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma_{A_n}"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_K"] & 0 \\
& & A_n^{\omega\omega} \arrow[r, "g^{\omega\omega}"] & K^{\omega\omega} &
\end{tikzcd}$$

知 $\sigma_{A_n} = (g^{\omega\omega})^{-1} \cdot \sigma_K \cdot g$, 因此 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker}\left[(g^{\omega\omega})^{-1} \cdot \sigma_K \cdot g\right] = \operatorname{Ker} \sigma_{A_n} = \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$. 证毕.

命题 4.6 设 $N \in \operatorname{mod} R$.

(1) 存在 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$, 使得 $N \subseteq \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$ 当且仅当有正合序列 $0 \to N \to A_n$ 使得 $A_n^\omega \to N^\omega$ 是零同态.

(2) 存在 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$, 使得 $N = \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$ 当且仅当有正合序列 $0 \to N \to A_n$ 使得 $A_n^\omega \to N^\omega$ 是零同态且 A_n/N 是 ω- 无挠模.

证明 (1) 由引理 4.5 知充分性成立. 现设 $N \subseteq \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$. 由引理 4.4 知, $A_n^\omega \to \left[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\right]^\omega$ 是零同态. 所以由合成的单同态: $N \rightarrowtail \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega) \rightarrowtail A_n$ 导出的同态 $A_n^\omega \to N^\omega$ 也是一个合成同态: $A_n^\omega \to \left[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\right]^\omega \to N^\omega$, 从而是零同态.

(2) 充分性. 设 $0 \to N \to A_n \to K \to 0$ 正合 (其中 $K = A_n/N$) 使得 $A_n^\omega \to N^\omega$ 是零同态且 K 是 ω- 无挠模. 此时我们仍有图 4.5.1 且 σ_K 是单同态, 故 $N \cong \operatorname{Ker} \sigma_A = \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$.

必要性. 设 $N = \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)$. 因为有正合序列 $0 \to \operatorname{Ext}_R^n(A,\omega) \to A_n \to T^n(A) \to 0$ 使得 $A_n^\omega \to \left[\operatorname{Ext}_R^n(A,\omega)\right]^\omega$ 是零同态且 $T^n(A)$ 是 ω- 无挠模 (因为 $T^n(A) \subseteq A_n^{\omega\omega}$), 故知结论成立. 证毕.

下面, 我们就 $n = 1$ 的情形来讨论 $\mathcal{E}_n(R)$ 的性质. 记 $\operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$ 为由 $\mathcal{E}_1(R)$ 中的模的子模组成的模范畴.

命题 4.7 (1) $\operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$ 和 $\mathcal{E}_1(R)$ 均是商模闭的 (注: 一个模范畴说是商模闭的, 是指该模范畴中的模的商模仍在其中).

(2) 设 $M, N \in \operatorname{mod} R$. 则 $M, N \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$ 当且仅当 $M \oplus N \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$; $M, N \in \mathcal{E}_1(R)$ 当且仅当 $M \oplus N \in \mathcal{E}_1(R)$.

(3) 设 $N(1), N(2)$ 是 R- 模 N 的子模. 若 $N(1), N(2) \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$, 则 $N(1) + N(2)$, $N(1) \cap N(2) \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$; 若 $N(1), N(2) \in \mathcal{E}_1(R)$, 则 $N(1) + N(2) \in \mathcal{E}_1(R)$.

(4) 设 $N \in \operatorname{mod} R$, $N(1), N(2), \ldots, N(n)$ 是 N 的子模且每个 $N(i) \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$, 则 N 的由 $N(1), N(2), \ldots, N(n)$ 生成的 N 的子模仍在 $\operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$ 中; 如果每个 $N(i) \in \mathcal{E}_1(R)$, 则由 $N(1), N(2), \ldots, N(n)$ 生成的 N 的子模仍在 $\mathcal{E}_1(R)$ 中.

(5) 如果 R- 模 $N \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$, 则 $N^\omega \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R^{op})$, $N^{\omega\omega} \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$.

证明 (1) 设 $N \in \operatorname{Sub}\mathcal{E}_1(R)$. 由命题 4.6(1), 存在 $A \in \operatorname{mod} R^{op}$, 使得有正合序列 $0 \to N \xrightarrow{f} A_1 \to K \to 0$ 且 $A_1^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega$ 是零同态. 对 N 的任意子模 N', 考虑如下的正合交换图 (4.7.1):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & N & \xrightarrow{f} & A_1 & \to & K & \to 0 \\
& \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \| & \\
0 \to & N/N' & \xrightarrow{f'} & A_1/N' & \to & K & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

则有 $f' \cdot h_1 = h_2 \cdot f$, 从而 $h_1^\omega \cdot f'^\omega = f^\omega \cdot h_2^\omega = 0$. 因为 h_1^ω 是一个单同态，所以 $f'^\omega = 0$. 利用引理 2.2, 类似引理 4.5 的证明，我们有 $N/N' \subseteq \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}_\omega(A_1/N'), \omega) \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$, 即 $\mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ 是商模闭的.

现设 $N \in \mathcal{E}_1(R)$. 由命题 4.6(2) 知，存在 $A \in \mathrm{mod}\,R^{op}$ 使得有正合序列 $0 \to N \xrightarrow{f} A_1 \to K \to 0$ 且 $A_1^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega$ 是零同态， K 是 ω- 无挠模. 对 N 的任意子模 N', 同样有正合交换图 4.7.1. 类似上面的讨论，我们知 $0 \to N/N' \xrightarrow{f'} A_1/N' \to K \to 0$ 正合且 $f'^\omega = 0$, K 是 ω- 无挠模. 利用引理 2.2, 类似命题 4.6(2) 充分性的证明知， $N/N' = \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tr}_\omega(A_1/N'), \omega) \in \mathcal{E}_1(R)$, 即 $\mathcal{E}_1(R)$ 是商模闭的.

(2) 易证，当 $M, N \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ (或 $\mathcal{E}_1(R)$) 时， $M \oplus N \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ (或 $\mathcal{E}_1(R)$). 而由论断 (1) 即知，当 $M \oplus N \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ (或 $\mathcal{E}_1(R)$) 时， $M, N \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ (或 $\mathcal{E}_1(R)$).

(3) 注意到总有正合序列 $0 \to N(1) \cap N(2) \to N(1) \oplus N(2) \to N(1) + N(2) \to 0$. 于是由论断 (1) 和 (2) 易知结论成立.

(4) 设 $N(1), N(2), \ldots, N(n)$ 为 R- 模 N 的子模且每个 $N(i) \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$ (或 $\mathcal{E}_1(R)$). 由于由 $N(1), N(2), \ldots, N(n)$ 生成的 N 的子模是 $N(1) \oplus N(2) \oplus \cdots \oplus N(n)$ 的同态象，于是由论断 (1) 和 (2) 知结论成立.

(5) 设 $N \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$. 由命题 4.6(1) 知，存在 $A \in \mathrm{mod}\,R^{op}$ 使得有正合序列 $0 \to N \xrightarrow{f} A_1 \to K \to 0$ 且 $A_1^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega$ 是零同态. 因为 $A_1^\omega \xrightarrow{f^\omega} N^\omega \to \mathrm{Ext}_R^1(K, \omega)$ 是正合的，所以有单同态 $0 \to N^\omega \to \mathrm{Ext}_R^1(K, \omega)$, 即 $N^\omega \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R^{op})$. 由对称性即知 $N^{\omega\omega} \in \mathrm{Sub}\,\mathcal{E}_1(R)$. 证毕.

5 例子

在本节，我们将举例说明 $\mathcal{E}_1(R)$ 和 $\mathcal{E}_2(R)$ 不必是子模闭的. 但存在代数，使得 $\mathcal{E}_2(R)$ 是子模闭的.

设 K 是一个域且令 ${}_R\omega_R = {}_RR_R$.

例 1 设 R 是一个有限维遗传 K- 代数，即 $\mathrm{gl.dim}\,R \leq 1$. 设 $A \in \mathrm{mod}\,R$, $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ 是 A 的不可分分解，用 τ 表示 Auslander-Reiten 变换 (translate). 注意到 τ 一般只对不可分解模有定义，这里定义 $\tau A = \bigoplus_{i=1}^n \tau A_i$. 记 $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$. 由 [9, 第 76 页] 知， $\mathrm{Ext}_R^1(A_i, R) \cong D\,\mathrm{Hom}_R(R, \tau A_i) \cong D(\tau A_i)$, $1 \leq i \leq n$, 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(A, R) \cong D(\tau A)$. 故 $\mathcal{E}_1(R)$ 是子模闭的等价于模范畴 $\{\tau A \mid A \in \mathrm{mod}\,R\}$ 是商模闭的.

现设 Γ 是如下箭图：

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

令 $R=K\Gamma$. 易证 $\mathrm{gl.dim}\,R=1$ 且模范畴 $\{\tau A \mid A\in \mathrm{mod}\,R\}$ 不是商模闭的，从而 $\mathcal{E}_1(R)$ 不是子模闭的.

例 2 设 Γ 是如下箭图：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & 3 \arrow[d, "\delta"] \\ 2 \arrow[r, "\beta"'] & 4 \end{tikzcd}$$

令 $R=K\Gamma/(\beta\alpha)$. 易知 $\mathrm{gl.dim}\,R=2$, $P(4)=4$ 是顶点 4 对应的不可分解投射模，它是 ${}_RR$ 的直和项. 又因为 $P(4)$ 的内射包络同构于顶点 4 对应的不可分解内射模 $I(4)$ 且 $\mathrm{l.fd}_R(I(4))=2$, 因此 ${}_RR$ 的内射包络的平坦维数等于 2. 于是由推论 4.2 知， $\mathcal{E}_2(R)$ 不是子模闭的.

例 3 设 Γ 是例 2 中的箭图. 令 $R=K\Gamma/(\beta\alpha-\delta\gamma)$, 则 $\mathrm{gl.dim}\,R=2$. 若 $0\to {}_RR\to I_0\to I_1\to I_2\to 0$ 是 R 作为左 R- 模的极小内射分解，则 $\mathrm{l.fd}_R(I_0)=0$, $\mathrm{l.fd}_R(I_1)=1$, $\mathrm{l.fd}_R(I_2)=2$. 于是由推论 4.2 知， $\mathcal{E}_2(R)$ 是子模闭的.

致谢 作者对惠昌常教授和邓邦明教授的讨论表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Auslander M., Comments on the Functor Ext [J], Topology, 1969, **8**: 151–166.
[2] Glaz S., Commutative Coherent Rings [M], Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1989, **1371**.
[3] Ding N. Q., GQF Rings [J], Chin. Ann. of Math., 1992, **13A**: 230–238 (in Chinese).
[4] Huang Z. Y., On a Generalization of the Auslander-Bridger Transpose [J], Comm. in Algebra, 1999, **27**: 5791–5812.
[5] Rotman J. J., An Introduction to Homological Algebra [M], New York: Academic Press, 1979.
[6] Huang Z. Y., FP-Selfinjective Dimension over Non-Commutative Coherent Rings [J], Acta. Math. Sinica, 1997, **40**: 167–174 (in Chinese).
[7] Anderson F. W., Fuller K. R., Rings and Categories of Modules [M], 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1992, **13**.
[8] Faith C., Algebra II, Ring Theory [M], Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, Berlin: Springer-Verlag, 1976, **191**.
[9] Ringel C. M., Tame Algebras and Integral Quadratic Forms [M], Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1984, **1099**.