中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 11 期: 1729 ∼ 1738
SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

粘合倾斜模

献给刘绍学教授 90 华诞

马欣, 黄兆泳*
南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: maxin@smail.nju.edu.cn, huangzy@nju.edu.cn

收稿日期: 2017-12-15; 接受日期: 2018-04-18; 网络出版日期: 2018-10-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11571164) 资助项目

摘要 设 Λ、Λ' 和 Λ'' 均是 Artin 代数且 $(\operatorname{mod}\Lambda', \operatorname{mod}\Lambda, \operatorname{mod}\Lambda'')$ 是一个黏合 (recollement). 本文给出了由 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda''$ 中的倾斜模粘合得到 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的倾斜模的构造以及反过来的构造.

关键词 黏合 Artin 代数 倾斜模 粘合 挠对

MSC (2010) 主题分类 16G10, 18E40

1 引言

Abel 范畴和三角范畴的黏合由 Beĭlinson 等 [1] 引入, 它的想法是一个范畴由两个范畴 "粘合" 而成. 一些学者研究了一些代数结构, 如三角范畴中的余挠对 [2] 和 Abel 范畴中的挠对 [3] 等, 在黏合中的 "粘合" 问题. 特别地, Liu 等 [4] 给出了在三角范畴的黏合中半倾斜 (silting) 对象的 "粘合" 构造. 另一方面, 经典倾斜模由 Brenner 和 Butler [5] 以及 Happel 和 Ringel [6] 引入. 它与挠对有着密切的关系, 例如, 一个倾斜模可诱导一个挠对; 反过来, 在一定条件下, 一个挠对可诱导一个倾斜模 [7].

受以上工作的启发, 我们将研究在模范畴的黏合中倾斜模的 "粘合" 问题. 对 Artin 代数 Λ, 我们用 $\operatorname{mod}\Lambda$ 表示有限生成左 Λ- 模范畴. 本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 Λ、Λ' 和 Λ'' 均是 Artin 代数,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{mod}\Lambda' \arrow[r, "i_*"] & \operatorname{mod}\Lambda \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{mod}\Lambda'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

是一个黏合且 T' 和 T'' 分别是 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda''$ 中的倾斜模. 如果 $i^!$ 和 $j_!$ 都是正合的且 $i_*i^!(\mathcal{T})\subseteq\mathcal{T}$, 则 $T=i_*(T')\oplus j_!(T'')$ 是倾斜 Λ- 模且 $(\mathcal{T},\mathcal{F})=(\operatorname{Gen}(T),\mathcal{F}(T))$, 其中 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中相对于 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的挠对 $(\operatorname{Gen}(T'),\mathcal{F}(T'))$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda''$ 中的挠对 $(\operatorname{Gen}(T''),\mathcal{F}(T''))$ 的粘合挠对.

$\operatorname{Gen}(-)$ 和 $\mathcal{F}(-)$ 的含义见第 3 节. 另外, 在一定条件下, 我们证明了如上定理的逆是成立的. 最后, 我们给出例子对所得结果进行了说明.

英文引用格式: Ma X, Huang Z Y. On gluing tilting modules (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1729–1738, doi: 10.1360/N012017-00266

2 预备知识

首先回顾 Abel 范畴的黏合的定义.

定义 2.1 [8] 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 Abel 范畴. 如果如下加法函子的图:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

满足下列三个条件:

(1) (i^*, i_*)、$(i_*, i^!)$、$(j_!, j^*)$ 和 (j^*, j_*) 都是伴随对;

(2) i_*、$j_!$ 和 j_* 都是满忠实的 (fully faithful);

(3) $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j^*$,

则称之为一个黏合 (recollement), 记为 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 我们用 $\operatorname{proj}\mathcal{A}$ 和 $\operatorname{inj}\mathcal{A}$ 分别表示由 $\mathcal{A}$ 中的投射对象和内射对象构成的子范畴; 对 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{D}$, 我们用 $\operatorname{add}\mathcal{D}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中包含 $\mathcal{D}$ 的且直和项与有限直和都封闭的子范畴. 所有的子范畴都是加法满子范畴且在同构意义下是封闭的.

下面是我们将用到的一些 Abel 范畴的黏合的性质 (参见文献 [3, 8–11]).

引理 2.2 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合, 则有

(1) $i^* j_! = 0 = i^! j_*$.

(2) i_* 和 j^* 是正合函子, i^* 和 $j_!$ 是右正合函子且 $i^!$ 和 j_* 是左正合函子.

(3) 自然变换 $i^* i_* \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$, $1_{\mathcal{A}} \longrightarrow i^! i_*$, $1_{\mathcal{C}} \longrightarrow j^* j_!$ 和 $j^* j_* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ 都是自然同构; 进一步, i^*、$i^!$ 和 j^* 都是稠密函子.

(4) 对任意 $B \in \mathcal{B}$, 如果 i^* 是正合函子, 则存在正合列

$$0 \longrightarrow j_! j^*(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B \longrightarrow i_* i^*(B) \longrightarrow 0;$$

如果 $i^!$ 是正合函子, 则存在正合列

$$0 \longrightarrow i_* i^!(B) \longrightarrow B \xrightarrow{\eta_B} j_* j^*(B) \longrightarrow 0.$$

(5) 如果 i^* 是正合函子, 则 $i^! j_! = 0$; 如果 $i^!$ 是正合函子, 则 $i^* j_* = 0$.

(6) 如果 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象, 则函子 $i^* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 保持投射对象; 进一步, $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象且 $\operatorname{proj}\mathcal{A} = \operatorname{add}(i^*(\operatorname{proj}\mathcal{B}))$; 对偶地, 如果 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象, 则函子 $i^! : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 保持内射对象; 进一步, $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象且 $\operatorname{inj}\mathcal{A} = \operatorname{add}(i^!(\operatorname{inj}\mathcal{B}))$.

(7) 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象, 则函子 $j_! : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ 保持投射对象; 对偶地, 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象, 则函子 $j_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ 保持内射对象.

定义 2.3 [12] 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 满足下列条件:

(1) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$, 即对任意 $X \in \mathcal{T}$ 和 $Y \in \mathcal{F}$, 有 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$;

(2) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{A}$ 中的正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ 使得 $X \in \mathcal{T}$ 且 $Y \in \mathcal{F}$,

则称 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 为一个挠对.

设 $\mathcal{D}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴. 如果对 $\mathcal{A}$ 中的任意正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, $B \in \mathcal{D}$ 当且仅当 $A, C \in \mathcal{D}$, 则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴.

引理 2.4 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合, 则有

(1) $i_*(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$ 的 Serre 子范畴.

(2) 如果 i^* 是正合函子, 则 $\operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} j_!$; 进一步, $j_!(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的 Serre 子范畴.

(3) 如果 $i^!$ 是正合函子, 则 $\operatorname{Ker} i^! = \operatorname{Im} j_*$; 进一步, $j_*(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的 Serre 子范畴.

证明 (1) 由文献 [11, 命题 2.8] 可得.

(2) 由引理 2.2(1) 可知, $\operatorname{Im} j_! \subseteq \operatorname{Ker} i^*$. 反过来, 设 $X \in \operatorname{Ker} i^*$. 因为 i^* 是正合函子, 所以, 由引理 2.2(4) 知, $\mathcal{B}$ 中有正合列

$$0 \longrightarrow j_!j^*(X) \xrightarrow{\epsilon_X} X \longrightarrow i_*i^*(X) \longrightarrow 0,$$

因此, $X \cong j_!j^*(X) \in \operatorname{Im} j_!$. 余下的证明是平凡的.

类似地可得 (3). □

引理 2.5 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合, 则有

(1) 如果 i^* 是正合函子, 则 $j_!$ 也是正合函子;

(2) 如果 $i^!$ 是正合函子, 则 j_* 也是正合函子.

证明 (1) 设 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中的任意正合列. 由引理 2.2(2) 知, $j_!$ 是右正合函子, 因此可得 $\mathcal{B}$ 中正合列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow j_!(X) \longrightarrow j_!(Y) \longrightarrow j_!(Z) \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

由引理 2.2(2) 和 2.2(3) 知, j^* 是正合函子且 $j^*j_! \cong 1_{\mathcal{C}}$, 因此用函子 j^* 作用上面的正合列可得 $j^*(C) = 0$. 因为 $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j^*$, 所以存在 $C' \in \mathcal{A}$ 使得 $C \cong i_*(C')$. 由已知和引理 2.2(1) 知, i^* 是正合函子且 $i^*j_! = 0$, 因此用函子 i^* 作用正合列 (2.1) 可得 $i^*(C) = 0$. 从而, $C' \cong i^*i_*(C') \cong i^*(C) = 0$, 故 $C = 0$. 因此, $j_!$ 是正合函子.

对偶地可得 (2). □

我们需要下面简单而有用的观察.

命题 2.6 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合, 则有

(1) 如果 j_* 是正合函子且 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象, 则 j^* 保持投射对象; 进一步, $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象且 $\operatorname{proj}\mathcal{C} = \operatorname{add}(j^*(\operatorname{proj}\mathcal{B}))$.

(2) 如果 $j_!$ 是正合函子且 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象, 则 j^* 保持内射对象; 进一步, $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象且 $\operatorname{inj}\mathcal{C} = \operatorname{add}(j^*(\operatorname{inj}\mathcal{B}))$.

证明 设 P 是 $\mathcal{B}$ 中任意投射对象且

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

是 $\mathcal{C}$ 中的任意正合列. 由已知, j_* 是正合函子, 因此有如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(j^*(P),X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(j^*(P),Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(j^*(P),Z) \arrow[d, "\cong"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(P,j_*(X)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(P,j_*(Y)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(P,j_*(Z)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

于是上行也是一个短正合列, 故 $j^*(P)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象.

设 $C \in \mathcal{C}$. 因为 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象, 所以存在 $\mathcal{B}$ 中的正合列

$$P \longrightarrow j_*(C) \longrightarrow 0,$$

其中 P 是 $\mathcal{B}$ 中的投射对象. 又因为 j^* 是正合函子, 所以可得 $\mathcal{C}$ 中正合列 $j^*(P) \longrightarrow j^*j_*(C)(\cong C) \longrightarrow 0$, 其中 $j^*(P)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象. 故 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象.

$\operatorname{add} j^*(\operatorname{proj}\mathcal{B}) \subseteq \operatorname{proj}\mathcal{C}$ 是显然的. 反过来, 如果 C 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象, 则 $C \in \operatorname{add} j^*(P)$, 从而, $\operatorname{proj}\mathcal{C} \subseteq \operatorname{add} j^*(\operatorname{proj}\mathcal{B})$.

对偶地可得 (2). □

命题 2.7 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合, 则有

(1) 如果 $i^!$ 是正合函子且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均有足够多的投射对象, 则 i_* 和 j^* 均保持投射对象;

(2) 如果 i^* 是正合函子且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均有足够多的内射对象, 则 i_* 和 j^* 均保持内射对象.

证明 设 $i^!$ (或 i^*) 是正合函子, 则由引理 2.5 知, j_* (或 $j_!$) 也是正合函子. 于是有命题 2.6 知, j^* 保持投射对象 (或保持内射对象). 类似命题 2.6 的证明可得, i_* 保持投射对象 (或保持内射对象). □

3 模范畴的黏合中的倾斜模

设 $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴的一个黏合且 $(\mathcal{T}',\mathcal{F}')$ 和 $(\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 中的挠对. 由文献 [3, 定理 1] 知, $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个挠对, 其中

$$\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{B} \mid i^*(B) \in \mathcal{T}',\ j^*(B) \in \mathcal{T}''\},$$
$$\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{B} \mid i^!(B) \in \mathcal{F}',\ j^*(B) \in \mathcal{F}''\}.$$

在这种情形下, 称 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 是一个相对于 $(\mathcal{T}',\mathcal{F}')$ 和 $(\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')$ 的粘合挠对.

下面先回顾经典倾斜模的定义.

定义 3.1 [5,6] 设 Λ 是 Artin 代数且 $T \in \operatorname{mod}\Lambda$. 如果下列条件成立:

(1) T 的投射维数 $\operatorname{pd}_\Lambda T \leqslant 1$;

(2) $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0$,

则称 T 为偏倾斜模. 设 $T \in \operatorname{mod}\Lambda$ 是偏倾斜模. 如果下列等价条件之一成立:

(3) 存在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的正合列 $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$, 其中 $T_0, T_1 \in \operatorname{add} T$;

(3′) 对任意有限生成不可分解投射左 Λ- 模 P, 存在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \widetilde{T_0} \longrightarrow \widetilde{T_1} \longrightarrow 0,$$

其中 $\widetilde{T_0}, \widetilde{T_1} \in \operatorname{add} T$;

(3″) $|T| = |\Lambda|$, 其中 $|T|$ 和 $|\Lambda|$ 分别表示 T 中互不同构的不可分解直和项的个数和 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中互不同构的单模的个数,

则称 T 为倾斜模.

设 Λ 是 Artin 代数且 $T \in \operatorname{mod}\Lambda$. 用 $\operatorname{Gen}(T)$ 表示由 T 生成的模构成的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的子范畴, 即 $M \in \operatorname{Gen}(T)$ 当且仅当存在正整数 n 使得 $T^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的一个满同态. 对偶地可定义

Cogen(T). 用 $\operatorname{rad} T$ 表示 T 的 Jacobson 根. 一个倾斜 Λ- 模 T 可诱导 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的一个挠对 $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$, 其中

$$\mathcal{T}(T) := \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, X) = 0\},$$
$$\mathcal{F}(T) := \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(T, X) = 0\},$$

使得 $\mathcal{T}(T) = \operatorname{Gen}(T)$ (参见文献 [7]).

从现在开始, 设 Λ'、Λ 和 Λ'' 均是 Artin 代数且 $(\operatorname{mod}\Lambda', \operatorname{mod}\Lambda, \operatorname{mod}\Lambda'')$ 是一个黏合

$$\begin{tikzcd} \operatorname{mod}\Lambda' \arrow[r, "i_*"] & \operatorname{mod}\Lambda \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{mod}\Lambda''. \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

下面的结果给出了单模在黏合中的形式, 它在本文中起着关键作用.

引理 3.2　设 S' 和 S'' 分别是 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda''$ 中的单模. 如果 $i^!$ (或 i^*) 是正合函子, 则 $i_*(S')$ 和 $j_*(S'')$ (或 $j_!(S'')$) 都是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的单模. 特别地, $|\Lambda| = |\Lambda'| + |\Lambda''|$.

证明　我们只证明 $i^!$ 是正合函子的情形, 类似可证 i^* 是正合函子的情形.

设 $M \in \operatorname{mod}\Lambda'$. 因为 i_* 是完全忠实的, 所以, $\operatorname{Hom}_\Lambda(i_*(M), i_*(M)) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda'}(M, M)$, 从而, M 是不可分解的当且仅当 $i_*(M)$ 是不可分解的. 类似地, 对任意 $N \in \operatorname{mod}\Lambda''$, N 是不可分解的当且仅当 $j_*(N)$ 是不可分解的. 考虑 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} i_*(S') \longrightarrow i_*(S') \longrightarrow i_*(S')/\operatorname{rad} i_*(S') \longrightarrow 0.$$

由引理 2.4(1) 可知, $i_*(\operatorname{mod}\Lambda')$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的 Serre 子范畴, 所以存在 $A_1, A_2 \in \operatorname{mod}\Lambda'$, 使得 $\operatorname{rad} i_*(S') \cong i_*(A_1)$ 且 $i_*(S')/\operatorname{rad} i_*(S') \cong i_*(A_2)$. 又因为 $i_* : \operatorname{mod}\Lambda' \longrightarrow i_*(\operatorname{mod}\Lambda')$ 是一个等价, 所以存在 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow S' \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0.$$

注意到 $A_1 = S'$ 或 $A_1 = 0$, 从而, $\operatorname{rad} i_*(S') = i_*(S')$ 或 $\operatorname{rad} i_*(S') = 0$. 若 $\operatorname{rad} i_*(S') = i_*(S')$, 则 $i_*(S') = 0$. 因为 i_* 是完全忠实的, 所以 $S' = 0$, 矛盾. 故 $\operatorname{rad} i_*(S') = 0$, 于是, $i_*(S')$ 是半单 Λ- 模. 再由 S' 是不可分解的可得 $i_*(S')$ 是不可分解的, 因此, $i_*(S')$ 是单 Λ- 模. 由假设知, $i^!$ 是正合函子. 于是由引理 2.4(3) 知, $j_*(\operatorname{mod}\Lambda'')$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的 Serre 子范畴, 类似地可证, 对任意单 Λ''- 模 S'', $j_*(S'')$ 是单 Λ- 模. 因为对任意单 Λ'- 模 S' 和单 Λ''- 模 S'', $i_*(S') \ncong j_*(S'')$ (否则这些单模将为零), 所以, $|\Lambda'| + |\Lambda''| \leqslant |\Lambda|$.

反过来, 设 S 是单 Λ- 模. 由假设和引理 2.2(4) 知, 存在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow i_*i^!(S) \longrightarrow S \longrightarrow j_*j^*(S) \longrightarrow 0.$$

于是, $S \cong i_*i^!(S)$ 或 $S \cong j_*j^*(S)$. 如果 $S \cong i_*i^!(S)$, 则 $i^!(S)$ 是不可分解的. 考虑 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} i^!(S) \longrightarrow i^!(S) \longrightarrow i^!(S)/\operatorname{rad} i^!(S) \longrightarrow 0.$$

由引理 2.2(2) 知, i_* 是正合函子. 用函子 i_* 作用上面的正合列可得 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中一个正合列

$$0 \longrightarrow i_*(\operatorname{rad} i^!(S)) \longrightarrow i_*i^!(S)(\cong S) \longrightarrow i_*(i^!(S)/\operatorname{rad} i^!(S)) \longrightarrow 0.$$

故 $i_*(\operatorname{rad} i^!(S)) = 0$ 或 $i_*(i^!(S)/\operatorname{rad} i^!(S)) = 0$. 因为 i_* 是完全忠实的, 故 $\operatorname{rad} i^!(S) = 0$ 或 $i^!(S)/\operatorname{rad} i^!(S) = 0$. 故 $i^!(S)$ 是半单 Λ'- 模, 从而是单 Λ'- 模. 类似可证, 如果 $S \cong j_*j^*(S)$, 则 $j^*(S)$ 是单 Λ''- 模. 因此 $|\Lambda| \leqslant |\Lambda'| + |\Lambda''|$. □

下面是本文的主要结果.

定理 3.3 设 T' 和 T'' 分别是 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda''$ 中的倾斜模. 如果 $i^!$ 和 $j_!$ 都是正合的且 $i_*i^!(\mathcal{T})\subseteq\mathcal{T}$, 则 $T=i_*(T')\oplus j_!(T'')$ 是倾斜 Λ- 模且 $(\mathcal{T},\mathcal{F})=(\operatorname{Gen}(T),\mathcal{F}(T))$, 其中 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中相对于 $(\operatorname{Gen}(T'),\mathcal{F}(T'))$ 和 $(\operatorname{Gen}(T''),\mathcal{F}(T''))$ 的粘合挠对.

证明 由文献 [3, 定理 1(2)] 知, $(i^*(\mathcal{T}),i^!(\mathcal{F}))=(\operatorname{Gen}(T'),\mathcal{F}(T'))$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的挠对, 从而,

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(i_*i^*(\mathcal{T}),\mathcal{F})\cong\operatorname{Hom}_{\Lambda'}(i^*(\mathcal{T}),i^!(\mathcal{F}))=0,$$

故 $i_*i^*(\mathcal{T})\subseteq{}^\perp\mathcal{F}=\mathcal{T}$. 由引理 2.2(3) 知, $i^!i_*\cong 1_{\operatorname{mod}\Lambda'}$, 所以, $i^*(\mathcal{T})\subseteq i^!(\mathcal{T})$. 再由假设 $i_*i^!(\mathcal{T})\subseteq\mathcal{T}$ 和引理 2.2(3) 可得 $i^!(\mathcal{T})\subseteq i^*(\mathcal{T})$. 因此 $i^*(\mathcal{T})=i^!(\mathcal{T})$.

由引理 2.2(3) 可知, $\operatorname{Im}i_*=\operatorname{Ker}j^*$ 且 $i^*i_*\cong 1_{\operatorname{mod}\Lambda'}$, 所以, $j^*(i_*(T'))=0$ 且 $i^*(i_*(T'))\cong T'\in\operatorname{Gen}(T')$, 从而 $i_*(T')\in\mathcal{T}$. 另一方面, 由引理 2.2(1) 和 2.2(3) 知, $i^*j_!=0$ 且 $j^*j_!\cong 1_{\operatorname{mod}\Lambda''}$, 所以, $j^*j_!(T'')\cong T''\in\operatorname{Gen}(T'')$ 且 $i^*(j_!(T''))=0$, 从而 $j_!(T'')\in\mathcal{T}$. 令 $T:=i_*(T')\oplus j_!(T'')$, 则 $T\in\mathcal{T}$.

由引理 2.2(7) 知, $j_!$ 保持投射模. 又因为 $j_!$ 是正合函子, 所以, 由 $\operatorname{pd}_{\Lambda''}T''\leqslant 1$ 可得 $\operatorname{pd}_\Lambda j_!(T'')\leqslant 1$. 又由假设 $i^!$ 是正合函子和命题 2.7(1) 知, i_* 保持投射模. 由引理 2.2(2) 知, i_* 是正合函子, 所以, 由 $\operatorname{pd}_{\Lambda'}T'\leqslant 1$ 可得 $\operatorname{pd}_\Lambda i_*(T')\leqslant 1$. 因此 $\operatorname{pd}_\Lambda T\leqslant 1$.

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T)&=\operatorname{Ext}^1_\Lambda(i_*(T')\oplus j_!(T''),i_*(T')\oplus j_!(T''))\\&\cong\operatorname{Ext}^1_\Lambda(i_*(T'),i_*(T'))\oplus\operatorname{Ext}^1_\Lambda(i_*(T'),j_!(T''))\\&\quad\oplus\operatorname{Ext}^1_\Lambda(j_!(T''),i_*(T'))\oplus\operatorname{Ext}^1_\Lambda(j_!(T''),j_!(T'')).\end{aligned}$$

由文献 [9, 注记 3.7] 知, $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(i_*(T'),i_*(T'))\cong\operatorname{Ext}^1_{\Lambda'}(T',T')=0$. 因为 $j^*j_!\cong 1_{\operatorname{mod}\Lambda''}$ 且 $\operatorname{Im}i_*=\operatorname{Ker}j^*$, 所以,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ext}^1_\Lambda(j_!(T''),j_!(T''))\cong\operatorname{Ext}^1_{\Lambda''}(T'',j^*j_!(T''))\cong\operatorname{Ext}^1_{\Lambda''}(T'',T'')=0,\\&\operatorname{Ext}^1_\Lambda(j_!(T''),i_*(T'))\cong\operatorname{Ext}^1_{\Lambda''}(T'',j^*i_*(T'))=0.\end{aligned}$$

因为 $j_!(T'')\in\mathcal{T}$ 且 $i^*(\mathcal{T})=i^!(\mathcal{T})$, 所以, $i^!j_!(T'')\in i^!(\mathcal{T})=i^*(\mathcal{T})\in\operatorname{Gen}(T')=\mathcal{T}(T')$, 从而,

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(i_*(T'),j_!(T''))\cong\operatorname{Ext}^1_{\Lambda'}(T',i^!j_!(T''))=0.$$

因此 $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T)=0$.

注意到对任意 $M\in\operatorname{mod}\Lambda'$ (或 $N\in\operatorname{mod}\Lambda''$), M (或 N) 是不可分解的当且仅当 $i_*(M)$ (或 $j_!(N)$) 是不可分解的. 进一步, 因为 $j_!(T'')$ 和 $i_*(T')$ 没有任何同构的直和项 (否则的话, 这个直和项将为零), 所以, 由引理 3.2 知,

$$|T|=|i_*(T')|+|j_!(T'')|=|T'|+|T''|=|\Lambda'|+|\Lambda''|=|\Lambda|.$$

故 T 是倾斜 Λ- 模.

由倾斜 Λ- 模 T 诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的挠对是 $(\operatorname{Gen}(T),\mathcal{F}(T))$. 设 $Y\in\mathcal{F}$, 即 $j^*(Y)\in\mathcal{F}(T'')$ 且 $i^!(Y)\in\mathcal{F}(T')$, 则

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(T,Y)=\operatorname{Hom}_\Lambda(i_*(T')\oplus j_!(T''),Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Hom}_{\Lambda}(i_*(T'), Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\Lambda}(j_!(T''), Y) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(T', i^!(Y)) \oplus \mathrm{Hom}_{\Lambda''}(T'', j^*(Y)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

因此 $Y \in \mathcal{F}(T)$, 从而 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(T)$. 反过来, 设 $Y \in \mathcal{F}(T)$, 即 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(i_*(T'), Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\Lambda}(j_!(T''), Y) = 0$, 则 $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(T', i^!(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(i_*(T'), Y) = 0$ 且 $\mathrm{Hom}_{\Lambda''}(T'', j^*(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(j_!(T''), Y) = 0$. 所以, $i^!(Y) \in \mathcal{F}(T')$ 且 $j^*(Y) \in \mathcal{F}(T'')$, 因此 $Y \in \mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}$. 故 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T)$ 且 $\mathcal{T} = \mathrm{Gen}(T)$. □

推论 3.4 如果 $i^!$ 和 $j_!$ 均是正合函子, 则 $\mathrm{add}\,\Lambda \cong \mathrm{add}(i_*(\Lambda') \oplus j_!(\Lambda''))$.

下面的结果表明定理 3.3 的逆在一定条件下是成立的.

定理 3.5 设 T 是倾斜 Λ- 模且 $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) := (\mathrm{Gen}(T), \mathcal{F}(T))$ 是由 T 诱导的挠对.

(1) 如果 i^* 是正合函子, 则 $i^*(T)$ 是倾斜 Λ'- 模且 $(i^*(\mathcal{T}), i^!(\mathcal{F})) = (\mathrm{Gen}(i^*(T)), \mathcal{F}(T'))$.

(2) 如果 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ 并且 j_* 是正合函子, 则 $j^*(T)$ 是倾斜 Λ''- 模. 在这种情形下, 若 $j_*j^*(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$, 则 $(j^*(\mathcal{T}), j^*(\mathcal{F})) = (\mathrm{Gen}(j^*(T)), \mathcal{F}(j^*(T)))$.

(3) 如果 i^* 和 j_* 均是正合函子, $j_*j^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ 且 $i_*i^!(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$, 则 $\mathrm{add}\,T = \mathrm{add}(j_!j^*(T) \oplus i_*i^*(T))$.

证明 (1) 由引理 2.2(6) 可知, i^* 保持投射模. 因为 i^* 是正合函子, 所以, 由 $\mathrm{pd}_{\Lambda} T \leqslant 1$ 可得 $\mathrm{pd}_{\Lambda'} i^*(T) \leqslant 1$. 显然 $i_*i^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$, 于是 $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda'}(i^*(T), i^*(T)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, i_*i^*(T)) = 0$, 故 $i^*(T)$ 是偏倾斜 Λ'- 模. 由文献 [7, 引理 VI.2.3] 知, $\mathrm{Gen}(i^*(T)) \subseteq \mathcal{T}(i^*(T))$. 设 $X \in \mathcal{T}(i^*(T))$. 因为 $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, i_*(X)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda'}(i^*(T), X) = 0$, 所以, 由文献 [7, 定理 VI.2.5] 知, $i_*(X) \in \mathcal{T}(T) = \mathrm{Gen}(T)$, 从而, $X \cong i^*i_*(X) \in \mathrm{Gen}(i^*(T))$, 故 $\mathcal{T}(i^*(T)) \subseteq \mathrm{Gen}(i^*(T))$. 再由文献 [7, 定理 VI.2.5] 知, $i^*(T)$ 是倾斜 Λ'- 模.

由文献 [3, 定理 2] 知, $(i^*(\mathcal{T}), i^!(\mathcal{F}))$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda'$ 中的挠对. 因为 $i^*(T) \in i^*(\mathcal{T})$ 且 $i^*(\mathcal{T})$ 关于商模封闭, 所以, $\mathrm{Gen}(i^*(T)) \subseteq i^*(\mathcal{T})$. 而 $i^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Gen}(i^*(T))$ 是显然的, 因此 $\mathrm{Gen}(i^*(T)) = i^*(\mathcal{T})$ 且 $\mathcal{F}(i^*(T)) = i^!(\mathcal{F})$.

(2) 由假设和命题 2.6(1) 知, j^* 保持投射模. 由引理 2.2(2) 知, j^* 是正合函子, 所以, 由 $\mathrm{pd}_{\Lambda} T \leqslant 1$ 可得 $\mathrm{pd}_{\Lambda''} j^*(T) \leqslant 1$. 因为 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$, 所以, $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda''}(j^*(T), j^*(T)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(T, j_*j^*(T)) = 0$. 由引理 2.2(7) 知, $j_!$ 保持投射模, 因此 $j_!(\Lambda'')$ 是投射 Λ- 模. 因为 T 是倾斜 Λ- 模, 所以存在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow j_!(\Lambda'') \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0,$$

其中 $T_0, T_1 \in \mathrm{add}\,T$. 而由引理 2.2(2) 知, j^* 是正合函子, 所以用函子 j^* 作用上面的正合列得到 $\mathrm{mod}\,\Lambda''$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda''(\cong j^*j_!(\Lambda'')) \longrightarrow j^*(T_0) \longrightarrow j^*(T_1) \longrightarrow 0,$$

其中 $j^*(T_0), j^*(T_1) \in \mathrm{add}\,j^*(T)$. 因此, $j^*(T)$ 是倾斜 Λ''- 模.

若 $j_*j^*(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$, 则由文献 [3, 定理 2] 知, $(j^*(\mathcal{T}), j^*(\mathcal{F}))$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda''$ 中的挠对. 因为 $j^*(T) \in j^*(\mathcal{T})$ 且 $j^*(\mathcal{T})$ 关于商模封闭, 所以, $\mathrm{Gen}(j^*(T)) \subseteq j^*(\mathcal{T})$. 而 $j^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Gen}(j^*(T))$ 是显然的, 因此, $\mathrm{Gen}(j^*(T)) = j^*(\mathcal{T})$ 且 $\mathcal{F}(j^*(T)) = j^*(\mathcal{F})$.

(3) 由 (1) 和 (2) 知, $i^*(T)$ 和 $j^*(T)$ 分别是 $\mathrm{mod}\,\Lambda'$ 和 $\mathrm{mod}\,\Lambda''$ 中的倾斜模. 因为 i_* 和 $j_!$ 都是完全忠实函子, 所以, 由引理 3.2 知,

$$|i_*i^*(T)| + |j_!j^*(T)| = |i^*(T)| + |j^*(T)| = |\Lambda'| + |\Lambda''| = |\Lambda|.$$

因为 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ 且 $i_*i^!(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$, 所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(i_*i^*(T) \oplus j_!j^*(T), \mathcal{T}) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(i_*i^*(T), \mathcal{T}) \oplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(j_!j^*(T), \mathcal{T})\\ &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, i_*i^!(\mathcal{T})) \oplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, j_*j^*(\mathcal{T}))\\ &= 0.\end{aligned}$$

注意到 $\mathcal{T} = \mathrm{Gen}(T)$ 且 $\mathcal{T}$ 包含所有内射 Λ- 模. 于是, 由文献 [7, 定理 VI.6.5] 知, $j_!j^*(T) \oplus i_*i^*(T)$ 是倾斜 Λ- 模且 $\mathrm{add}\, T = \mathrm{add}(j_!j^*(T) \oplus i_*i^*(T))$. □

4 例子

我们给出一个例子说明上节得到的结果.

设 Λ' 和 Λ'' 是 Artin 代数且 ${}_{\Lambda'}M_{\Lambda''}$ 是 (Λ', Λ'')- 双模. 令

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda' & M \\ 0 & \Lambda'' \end{pmatrix}$$

是一个三角矩阵代数, 则 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的任意模可唯一地写成一个三元组 $\binom{X}{Y}_f$, 其中 $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda'$, $Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda''$ 且 $f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(M \otimes_{\Lambda''} Y, X)$ (参见文献 [13, 第 76 页]).

例 4.1 设 Λ' 是由箭图 $1 \longrightarrow 2$ 给出的有限维代数, 则 $\Lambda := \left(\begin{smallmatrix} \Lambda' & \Lambda' \\ 0 & \Lambda' \end{smallmatrix}\right)$ 是由如下箭图和关系给出的有限维代数:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \cdot \arrow[dr, "\beta"] & \\ \cdot \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \cdot, \\ & \cdot \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

其中关系是 $\beta\alpha - \delta\gamma$. Λ 的 Auslander-Rieten 箭图如下:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \binom{P(1)}{0} \arrow[dr] & & \binom{0}{S(2)} \arrow[dr] & & \binom{S(1)}{S(1)} \arrow[dr] & \\ \binom{S(2)}{0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \binom{P(1)}{S(2)} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \binom{P(1)}{P(1)} \arrow[r] & \binom{S(1)}{P(1)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \binom{0}{S(1)}. \\ & \binom{S(2)}{S(2)} \arrow[ur] & & \binom{S(1)}{0} \arrow[ur] & & \binom{0}{P(1)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

由文献 [9, 例子 2.12] 知,

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathrm{mod}\,\Lambda' \arrow[r, "i_*" description] & \mathrm{mod}\,\Lambda \arrow[l, shift right=2, "i^*"'] \arrow[l, shift left=2, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathrm{mod}\,\Lambda' \arrow[l, shift right=2, "j_!"'] \arrow[l, shift left=2, "j_*"] \end{tikzcd}$$

是一个黏合, 其中

$$i^*\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f\right) = \mathrm{Coker}\, f, \quad i_*(X) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i^!\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f\right) = X,$$

$$j_!(Y)=\begin{pmatrix}Y\\Y\end{pmatrix}_1,\quad j^*\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f\right)=Y,\quad j_*(Y)=\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}.$$

(1) 取 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的倾斜模 $T'=P(1)\oplus S(2)$ 和 $T''=P(1)\oplus S(1)$. 由它们诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的挠对分别是

$$(\mathcal{T}',\mathcal{F}')=(\operatorname{mod}\Lambda',0)\quad 和\quad (\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')=(\operatorname{add}(P(1)\oplus S(1)),\operatorname{add}S(2)).$$

由定理 3.3 可得 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的倾斜模 $T:=\binom{P(1)}{0}\oplus\binom{S(2)}{0}\oplus\binom{P(1)}{P(1)}\oplus\binom{S(1)}{S(1)}$, 由它诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的挠对恰好是由文献 [3, 定理 1] 得到的相对于 $(\mathcal{T}',\mathcal{F}')$ 和 $(\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')$ 的粘合挠对

$$\begin{aligned}(\mathcal{T},\mathcal{F})=\Bigg(&\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}P(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(2)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}P(1)\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\P(1)\end{pmatrix}\right.\\&\left.\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\S(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\S(1)\end{pmatrix}\right),\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}0\\S(2)\end{pmatrix}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

(2) 定理 3.3 中条件 "$i_*i^!(\mathcal{T})\subseteq\mathcal{T}$" 是必要的. 例如, 取 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的倾斜模 $T'=P(1)\oplus S(1)$ 和 $T''=P(1)\oplus S(2)$. 由它们诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的挠对分别是

$$(\mathcal{T}',\mathcal{F}')=(\operatorname{add}(P(1)\oplus S(1)),\operatorname{add}S(2))\quad 和\quad (\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')=(\operatorname{mod}\Lambda',0).$$

由文献 [3, 定理 1] 可得 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中相对于 $(\mathcal{T}',\mathcal{F}')$ 和 $(\mathcal{T}'',\mathcal{F}'')$ 的粘合挠对

$$\begin{aligned}(\mathcal{T},\mathcal{F})=\Bigg(&\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}P(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(2)\\S(2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}P(1)\\S(2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\S(2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}P(1)\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\P(1)\end{pmatrix}\right.\\&\left.\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\S(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\S(1)\end{pmatrix}\right),\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}S(2)\\0\end{pmatrix}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

但 $T=i_*(T')\oplus j_!(T'')=\binom{P(1)}{0}\oplus\binom{S(1)}{0}\oplus\binom{P(1)}{P(1)}\oplus\binom{S(2)}{S(2)}$ 不是倾斜 Λ- 模, 而显然有

$$i_*i^!(\mathcal{T})=\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}P(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(2)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\0\end{pmatrix}\right)\nsubseteq\mathcal{T}.$$

(3) 取 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的倾斜模 $T=\binom{P(1)}{P(1)}\oplus\binom{S(1)}{S(1)}\oplus\binom{S(1)}{0}\oplus\binom{S(1)}{P(1)}$. 由它诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的挠对是

$$\begin{aligned}(\mathcal{T},\mathcal{F})=\Bigg(&\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}P(1)\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(1)\\S(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\P(1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\S(1)\end{pmatrix}\right),\\&\operatorname{add}\left(\begin{pmatrix}0\\S(2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(2)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}P(1)\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}S(2)\\S(2)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}P(1)\\S(2)\end{pmatrix}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

由定理 3.5(2) 知, $j^*(T)=P(1)\oplus S(1)\oplus P(1)$ 是倾斜 Λ'- 模. 又因为 $j_*j^*(\mathcal{F})=\operatorname{add}(\binom{0}{S(2)})\subseteq\mathcal{F}$, 所以, 由定理 3.5(2) 知, 由 $j^*(T)$ 诱导的 $\operatorname{mod}\Lambda'$ 中的挠对是 $(j^*(\mathcal{T}),j^*(\mathcal{F}))=(\operatorname{add}(P(1)\oplus S(1)),\operatorname{add}S(2))$.

参考文献

1 Beĭlinson A A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers. In: Analysis and Topology on Singular Spaces, I (Luminy, 1981). Astérisque, vol. 100. Paris: Soc Math France, 1982, 5–171

2 Chen J. Cotorsion pairs in a recollement of triangulated categories. Comm Algebra, 2013, 41: 2903–2915

3 Ma X, Huang Z Y. Torsion pairs in recollements of abelian categories. Front Math China, 2018, 13: 875–892

4 Liu Q, Vitória J, Yang D. Gluing silting objects. Nagoya Math J, 2014, 216: 117–151

5 Brenner S, Butler M C R. Generalizations of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev reflection functors. In: Representation Theory, II. Lecture Notes in Mathematics, vol. 832. Berlin-New York: Springer, 1980, 103–169
6 Happel D, Ringel C M. Tilted algebras. Trans Amer Math Soc, 1982, 274: 399–443
7 Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of the Pepresentation Theory of Associative Algebras, Vol. 1: Techniques of Representation Theory. London Mathematical Society Student Texts, vol. 65. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2006
8 Franjou V, Pirashvili T. Comparison of abelian categories recollements. Doc Math, 2004, 9: 41–56
9 Psaroudakis C. Homological theory of recollements of abelian categories. J Algebra, 2014, 398: 63–110
10 Psaroudakis C, Skartsæterhagen Ø, Solberg Ø. Gorenstein categories, singular equivalences and finite generation of cohomology rings in recollements. Trans Amer Math Soc Ser B, 2014, 1: 45–95
11 Psaroudakis C, Vitória J. Recollements of module categories. Appl Categ Structures, 2014, 22: 579–593
12 Dickson S E. A torsion theory for abelian categories. Trans Amer Math Soc, 1966, 121: 223–235
13 Auslander M, Reiten I, Smalø S O. Representation Theory of Artin Algebras. Corrected reprint of the 1995 original. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 36. Cambridge: Cambridge University Press, 1997

On gluing tilting modules

Xin Ma & Zhaoyong Huang

Abstract Let Λ, Λ' and Λ'' be Artin algebras and $(\mathrm{mod}\,\Lambda', \mathrm{mod}\,\Lambda, \mathrm{mod}\,\Lambda'')$ a recollement. We give a construction of gluing of tilting modules in $\mathrm{mod}\,\Lambda$ with respect to tilting modules in $\mathrm{mod}\,\Lambda'$ and $\mathrm{mod}\,\Lambda''$ as well as the converse construction.

Keywords **recollements, Artin algebras, tilting modules, gluing, torsion pairs**

MSC(2010) **16G10, 18E40**

doi: 10.1360/N012017-00266