

代数学基础教程

黄兆泳 编著



黄兆泳, 南京大学数学学院二级教授、博士研究生导师, 主要从事同调代数和代数表示论的研究工作. 曾获教育部自然科学奖二等奖(两次)和江苏省数学杰出成就奖; 主持国家自然科学基金面上项目、教育部博士点基金、江苏省自然科学基金青年科技创新人才项目(学术带头人)和江苏省自然科学基金重点项目十余项; 应邀在全国代数学术会议、中日韩国际环论会议和日本代数表示论会议等重要学术会议上作大会报告, 在中国数学会学术年会作邀请报告; 已在权威学术期刊发表论文130余篇; 主讲的代数学入选南京大学研究生“三个一百”优质课程建设项目重点建设课程(品牌基础课程).



科学出版社

内 容 简 介

本书是为学生打下范畴论的必要知识基础,提高他们的数学素养,拓宽其学术视野而编写的一本教材.全书用范畴的观点来解析代数学课程中的概念,先讲述一些重要模类(如投射模、内射模和平坦模)的基本同调性质,介绍模同态的推出和拉回、正向极限和反向极限等;再讲述范畴的一些基本概念,如单态射和满态射、函子和自然变换、加法范畴和 Abel 范畴,以及它们的基本性质,其中泛性质是引入新概念的强有力工具.特别地,在范畴的观点下,书中用单态射和满态射来帮助读者理解高等代数和近世代数中的单同态和满同态.本书第 1 章介绍一般模类的一些基本概念和常用性质,但略去其证明;第 2 章和第 3 章中所有结论的证明都详细给出.书中按章节附上了相当数量的习题便于学生巩固学习.

本书可作为普通高等院校数学类各专业研究生和高年级本科生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

代数学基础教程 / 黄兆泳编著. — 北京: 科学出版社, 2026. 8. — ISBN 978-7-03-086589-2

I. O15

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2026EU5135 号

责任编辑: 张中兴 姚莉丽 肖志华 / 责任校对: 杨聪敏

责任印制: 师艳茹 / 封面设计: 十样花

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2026 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2026 年 8 月第一次印刷 印张: 9 3/4

字数: 195 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

数学的研究对象是多种多样的,但每个具体的数学分支研究的都是特定类型的对象及其两两之间的某种联系.如:集合论研究的是集合与映射,群论研究的是群与群同态,环论研究的是环与环同态,拓扑学研究的是拓扑空间与连续映射,等等.将每种类型的所有对象及其两两之间的联系合成一个总体,对不同总体的一些共同简单规律进行演绎推理,由此建立一种统一的数学系统.这是著名数学家 S. Eilenberg 和 S. Mac Lane 于 20 世纪 40 年代引入范畴的思想.由于过于抽象,在范畴概念提出之初,其重要性并未得到专家学者的广泛认同.随着范畴理论的发展,它不仅为研究诸多数学结构提供了一个整体视角,而且还为不同的数学分支提供了一种共同语言,由此奠定了更规范的数学基础并建立了更精炼、更统一的数学体系,这使得跨分支的方法迁移和结构类比成为可能,从而使得不同的数学分支的交叉更富有成效.现在,不仅代数学,甚至整个数学,都有一种范畴化的趋势.有鉴于此,学习一些范畴论的知识是很有必要的.

代数学是南京大学数学系(学院)本硕贯通的一门课程,是南京大学研究生“三个一百”优质课程建设项目重点建设课程,并入选南京大学数学学院“数学荣誉课程”.它既是数学系(学院)所有专业的硕士研究生和直博生的两门必修课之一,也是高年级本科生的选修课.自 2004 年起,范畴论的基本知识是这门课程的主要讲授内容.我们的目标是,为学生们在范畴论方面打下扎实的知识基础,提高他们的数学素养并拓宽其学术视野,形成用范畴的观点来理解事物的整体视角,为解决问题提供一种全新的思维方法.因此,我们在讲授范畴论的思想和方法的同时,不仅用范畴的观点来解释大学本科课程中的一些概念,而且引导学生在今后的工作和进一步的学习中尝试利用范畴的观点来引入新的概念或方法,从而开辟新的思路.比如:(1)任何事物(无论是具体的还是抽象的)皆可视为范畴.我们将详细解释这一观点,这对学生接受范畴这一抽象概念很有帮助,并能促使他们用范畴的观点来理解事物,提升认知水平.(2)虽然在范畴的同调理论中,正合列和函子是核心内容,但在一般范畴理论中,常用的泛性质是引入新概念的强有力工具.我们将根据自身理解,详细解释泛性质的原理和优越性,可以预期这将为學生解决问题提供一种全新的思路.

本课程的内容和课时分配如下:

第 1 章 (4 课时) 介绍模的相关概念和基础知识, 略去证明 (关于详情, 建议学生自学).

第 2 章 (40 课时) 讲授有关模的重要概念和性质, 如: 正合列和函子、Noether 模和 Artin 模、投射模、内射模、平坦模、直和与直积的相关性质、生成元和余生成元、推出和拉回、正向极限和反向极限.

第 3 章 (20 课时) 讲授一般范畴的基本概念和性质, 如: 范畴的定义和例子、单态射和满态射、函子和自然变换、范畴的等价、积和余积、核和余核、加法范畴和 Abel 范畴.

本书配置了相当数量的习题. 第 1、3 章章末配置的是本章总习题, 第 2 章内容较多, 每节后都配置了习题. 文献 [2, 6, 7, 13, 17, 19, 20] 可作为进一步的阅读书目, 其中 [13, 17] 是本书的主要参考文献.

为使学生能循序渐进地理解和接受一般范畴中非常抽象的概念, 我们将模范畴这一特殊范畴的内容提至一般范畴的前面讲, 因此在第 2 章中, 我们只提模类, 而回避模范畴, 但这不影响其自洽性以及第 3 章内容的相容性. 不过, 如上处理也导致后两章的概念有少许重复, 如: 正合列、函子和自然等价的定义.

感谢王得民和王聿澄输入本书初稿的 LaTeX 源文件, 感谢刘雨喆在排版方面提供的帮助, 感谢赵体伟提供详细的校对目录.

本书的内容是根据我多年的授课讲义整理而成的. 如有疏漏之处, 烦请告知, 我不胜感激.

黄兆泳

2026 年 2 月

目 录

前言

第 1 章 模的概念和基本知识	1
习题 1	9
第 2 章 模	10
2.1 正合列和函子	10
习题 2.1	19
2.2 Noether 模和 Artin 模	23
习题 2.2	26
2.3 投射模	27
习题 2.3	32
2.4 内射模和内射包络	34
习题 2.4	42
2.5 张量积与平坦模	45
习题 2.5	52
2.6 直和与直积的相关性质	54
习题 2.6	64
2.7 生成元和余生成元	66
习题 2.7	80
2.8 推出和拉回	82
习题 2.8	93
2.9 正向极限和反向极限	94
习题 2.9	100
第 3 章 范畴	101
3.1 范畴的定义和例子	101

3.2 单态射和满态射	104
3.3 函子与自然变换	108
3.4 范畴的等价	113
3.5 积和余积	118
3.6 零对象、核和余核	121
3.7 加法范畴和 Abel 范畴	126
习题 3	138
参考文献	142
中英文名词索引	143

第 1 章

模的概念和基本知识

在本课程中, 记

$\mathbb{Z} :=$ 整数环, $\mathbb{Z}^+ :=$ 正整数集, $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($\forall n \geq 2$), $\emptyset :=$ 空集,

$\mathbb{N} :=$ 自然数集 (即非负整数集), $\mathbb{Q} :=$ 有理数域, $\mathbb{R} :=$ 实数域.

所涉及的环都是有单位元的结合环, 记环 R 的单位元为 1_R .

在本章, 我们介绍模的一些相关概念, 也列出模的一些常用性质, 但略去证明, 详见文献 [12, 第三章第 1~8 节] 或文献 [16, 第五、第六章].

1.0.1 模的定义和例子

模的基本模型: 域上的线性空间, 环的左、右理想.

定义 1.0.1 (1) 设 R 是环. 左 R -模 (left R -module) M , 记为 ${}_R M$, 是指一个 Abel 群 M 连同二元运算 $R \times M \rightarrow M$ via^① $(r, x) \mapsto rx$ ($\forall r \in R$ 和 $x \in M$), 且对任意 $r, r_1, r_2 \in R$ 和 $x, x_1, x_2 \in M$, 满足

$$(1.1) \quad (r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x;$$

$$(1.2) \quad r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2;$$

$$(1.3) \quad (r_1r_2)x = r_1(r_2x);$$

$$(1.4) \quad 1_Rx = x.$$

对称地, 可定义右 R -模 (right R -module) M_R .

(2) 设 R, S 是环. 若 M 既是左 R -模又是右 S -模, 且对任意 $r \in R, x \in M$ 和 $s \in S$, 有 $(rx)s = r(xs)$, 则称 M 为左 R 、右 S -双模, 或 (R, S) -双模 (bimodule).

注记 1.0.2 (1) 记 R^{op} 为环 R 的反环, 此时 R^{op} 的同态就是 R 的反同态. 给定 ${}_R M$, 定义 $x \cdot a := ax$, 可得 $M_{R^{\text{op}}}$; 给定 M_R , 定义 $a \cdot x := xa$, 可得 ${}_{R^{\text{op}}} M$.

(2) 当 R 是交换环时, $R^{\text{op}} = R$, 此时左 R -模与右 R -模是一回事.

① via 表示按对应法则, 由下式定义. $\mapsto$ 表示元素对应, $\rightarrow$ 表示集合间映射.

第 2 章

模

在本章, 我们引入一般模类中的正合列和函子, 介绍一些重要模类、Hom 函子和张量函子以及它们的基本性质, 还将介绍模同态的推出和拉回, 以及正向极限和反向极限及其基本性质.

2.1 正合列和函子

设 R 是环, 记 $R\text{-Mod}$ 为由所有左 R -模构成的类, 记 $\text{Mod-}R$ 为由所有右 R -模构成的类. 注意: $R\text{-Mod}$ 中的任意概念和结论在 $\text{Mod-}R$ 中都有对称的版本, 反之亦然.

对 $R\text{-Mod}$ 中的序列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3,$$

若 $\text{Im } f_1 = \text{Ker } f_2$, 则称之为**正合的** (exact). 一般地, 对 $R\text{-Mod}$ 中的序列

$$\cdots \rightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \rightarrow \cdots,$$

若对任意 i , 都有 $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$, 则称之为**正合的**. 特别地, 称正合列

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \rightarrow 0$$

为**短正合列** (short exact sequence).

注记 2.1.1 (1) $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ 是正合的当且仅当 $\text{Ker } f = 0$, 即 f 是单的.

(2) $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ 是正合的当且仅当 $\text{Im } f = N$ (等价地, $\text{Coker } f = 0$), 即 f 是满的.

(3) 由 (1) 和 (2) 知, 上面的短正合列可写成正合列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3.$$

第 3 章

范畴

在本章, 我们讲述范畴中的一些基本概念, 如单态射和满态射、函子和自然变换、加法范畴和 Abel 范畴, 以及它们的基本性质, 其中常用的泛性质是引入新概念的强有力工具.

3.1 范畴的定义和例子

数学的研究对象是多种多样的, 但是, 在某一特定问题或具体的分支中, 研究的是某一特定类型的对象以及它们两两之间的关系与联系. 如: 集合论研究集合与映射, 群论研究群与群同态, 拓扑学研究拓扑空间与连续映射, 等等. 在 20 世纪 40 年代中期, 数学家们将每种类型的所有对象以及对象与对象之间的关系与联系看成一个总体, 发现不同的总体有一些共同的简单规律, 由此建立了一种统一的数学系统, 这就是范畴的思想. 范畴理论不仅为研究诸多数学结构提供了一个整体视角, 而且还为不同的数学分支提供了一种共同的语言, 从而奠定了更规范的数学基础并建立了更精炼、更统一的数学体系, 这使得不同的数学分支的交叉变得可能且富有成效.

归纳所有集合连同所有映射的总体 Set , 所有群连同所有群同态的总体 $\mathbb{G}$ 以及所有拓扑空间连同所有连续映射的总体 Top 等的共同规律, 我们给出如下定义.

定义 3.1.1 (文献 [9]) 范畴 (category) $\mathcal{C}$ 由下列三种成员组成:

(C_1) 一类对象 (object) $A, B, C, \dots$, 记它们的类 (class) 为 $\text{ob } \mathcal{C}$.

(C_2) 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (常简记为 $\text{Hom}(A, B)$, $\mathcal{C}(A, B)$ 或 $\text{Mor}(A, B)$) ($\forall A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$) (称集合 $\text{Hom}(A, B)$ 中的元素为由 A 到 B 的态射 (morphism)).

(C_3) 态射的合成法则 对任意 $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 和 $\tau \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, 存在唯一的 $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ 与 σ, τ 对应, 记为 $\phi = \tau\sigma$, 称 ϕ 为 σ 与 τ 的合成或乘积.

它们都应服从以下三条公理:

(A_1) 不相交性 当 $A \neq A'$ 或 $B \neq B'$ 时, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$.