本文原题：An Interview with Michael Atiyah，译自：The Math. Intelligencer，1984，6(1)：9-19。

阿蒂亚生于 1929 年，在剑桥三一学院获得其学士及博士学位（1952，1955）。他历任牛津大学的萨维尔（Savilie）几何讲座教授（1963—1969）及普林斯顿高等研究所数学教授（1969—1972），现在他是牛津大学的皇家学会专职研究数学教授。

阿蒂亚教授荣获的称号包括：皇家学会会员以及法国、瑞典、美国的科学院院士，他在 1966 年莫斯科国际数学家大会上获菲尔兹奖。他的研究领域涉及到数学的广大的部分，包括拓扑、几何、微分方程和数学物理。

下面是本刊（The Intelligencer）原编辑米尼奥于牛津采访他的正式文本。

米尼奥（以下简称为 M）：我认为关于你的一些背景性材料可能是有价值的，你是什么时候开始对数学发生兴趣的？有多早？

阿蒂亚（下面简称为 A）：我觉得我年纪很轻时就开始对数学有兴趣。有一个阶段，大约是 15 岁时，我对化学有浓厚的兴趣，认为它很有前途；大约经过了一年的高等化学的学习之后，我发现它不是我想研究的东西，因而又回到了数学。我从来没有认真考虑过去干别的。

M：这一点在很早就显露出来了？

A：是的，我认为如此。我的父母从我小时候起就认为我生来就是搞数学的料，他们一直这么认为。

M：但他们不是数学家？

A：他们不是，不是的。

M：你在中学时得到过指导吗？你的老师对你还好吗？

A：我认为我的老师都挺好，我们的关系也好，我开始是在埃及上的学，那是个相当好的学校。

M：你生在那里？

A：不，我出生在英格兰，但我生长在中东，我父亲在苏丹工作，因此我中学主要是在埃及念的。大战结束后我们回国，我在英国又念了几年，那是个好学校，那儿有很多好学生，然后我去剑桥，那儿的好学生也很多。

我认为我没有受到哪一个人的特别大的影响。但是我受到的教育是好的，我有很多机会去接触好的数学家，在这个意义下我的底子是好的。

M：在剑桥你主要是自己干？

A：我是服了两年兵役之后去的剑桥（这是两个极端）。事实上，我去剑桥的时间比学年开始要早一点儿。我念了一个夏季学期，那儿的迷人的气候及美丽的环境给我极其深刻的印象。我喜欢呆在图书馆里读书，周围全是书。那儿的气氛令人难忘，它诱发了我的想像力。

那儿有许多聪明的学生，我从教师那儿也得到应有的指导，我不觉得哪位老师给我的灵感特别多：有些课是好的，有些并不那么好。

M：你早期的论文之一是与霍奇合作的，是吧？

A：是的，它事实上是我的学位论文的一部分。他是我的研究导师，对我来说，能与他一起工作是很重要的事。我来到剑桥时几何学正着重在老式的经典的投影代数几何上，我非常喜欢它。要不是霍奇使我认识到他所代表的新潮流，即微分几何要与拓扑挂钩，我会一直沿那个方向搞下去的。这是我的非常重要的抉择。我完全可以搞更传统些的东西，但

我认为我的这一抉择是明智的，通过与他一起工作，我更加熟悉了近代的思想。他给我很好的指导而且在一个时期还合作过。那时法国出了一些有关层（sheaf）论的最新工作。我对此有兴趣，他也有兴趣，我们一起工作并合写了论文，即我的学位论文的一部分。这对我是很有益的。

M：一个突出的事实是你同其他人合作得很多，同辛格，同希策布鲁赫，同博特。

A：是的，是如此，我经常与别人合作，我认为这是我的风格。这有许多原因，其中之一是我涉猎于好几个不同的领域。不同学科的东西有相互作用这一事实正是我有兴趣的；有的人在另一些方面知道得多些，可以补充你的不足，与他们合作是很有帮助的。我发现与别人交流思想是非常激励人的。

我同许多人合作过。与其中一些，应该说其中许多人，合作持续多年而且是广泛的。这一方面是由于我的性格，我喜欢与别人交流的思考方式。另一方面也是由于我喜欢搞的数学面比较广，因而很难自己一人完全了解透彻。周围有对另一些领域知道得较多的人是很有益的。例如，我与辛格合作，他的分析强得多，我则较弱，而我对代数几何及拓扑知道得更多。

M：是否是由你来把问题提炼出来？

A：不，不是。这种合作是完完全全的交融。我们首先统一感兴趣的东西，然后互相学习对方的技巧。经过一段时间后，对问题的大多数部分双方的认识趋于一致，只是我们的专长有点不同罢了。

M：你是如何选择研究题目的？

A：我认为你这样问就已经暗含了所选的题目有解答。我觉得这根本不是我做研究的方式。有的人会这样做，他说：“我想解决这个问题。”然后坐下来，说：“我怎样才能解决这个问题？”我不这样做。我只是在数学的海洋中漫游，同时思索着，充满好奇心和兴趣。我与别人交谈，把各种思想搅拌在一起：新的东西一出现，就紧追不舍。或者是，我发现某个东西同我已经知道的另外的东西发生了联系，我就试图把它们放在一起，从而新的东西发展了起来。事实上我们从来没有过从一开始就对我将要搞出的东西或者会搞成什么样子有任何概念：我对数学有兴趣，我交谈，我学习，我讨论，有意义的问题自然就呈现出来。除了理解数学这个目标外，我在开始干之前从不订下什么具体的目标。

M：K-理论就是这样产生的吧？

A：是的，这从某些方面看很带有偶然性。我当时对格罗滕迪克在代数几何中做的事情有兴趣，到了波恩后我曾有兴趣学点拓扑，我感兴趣的是詹姆斯（I. James）当时在研究的有关射影空间的拓扑中的某些问题。我发现用格罗滕迪克的公式可以解释这些现象，可以得到更好的结果。那时已有博特关于周期性定理的工作；我认识他，也知道他的工作。用上这些，我发现一些有趣的问题可以得到解决。于是看起来有必要建立一个体系使它们形式化，于是K-理论就这样产生了。

你不可能靠事先预言崭新的思想或理论的办法来发展它们。它们本来只能通过深入考察一系列问题而显现。但是不同人的工作方式是不同的。有的人决心去解决某个基本性的问题，例如奇点的消解或有限单群的分类。他们把一生的大部分时间都花在这个问题上。我从没有这样干过，主要是由于那样做需要一心一意地献身于一个问题，那是极大的冒险。

那样做也要求方法上的专一，从正面强攻，这意味着你必须对专门的技巧运用得炉火纯青。现在有些人很擅长那样，我确实不如。我的专长是围绕那个问题，在它附近转到它的背后去……这样使问题解决。

M：你是否觉得数学中有主流的课题？是否有些学科比别的更重要？

A：是的，我认为是这样。我很反对那种认为数学是一些孤立的学科的并集，以及你可以写下公理 1，2，3 等等，一个人闭门造车就可以发明一门新数学分支的观点。数学更加像是一个发育的机体。它同过去以及同其他学科的联系的历史是悠久的。

在某种意义上，核心的数学一直没有变。它是研究现实的物质世界中产生的问题，以及与数、基本的计算及解方程有关的由数学本身产生的问题。这一直是数学的主体。任何能推动这些问题发展的都是数学的重要部分。

那些与这些问题相隔遥远、背道而驰并且对数学的主要部分没有帮助的分支，不大可能是重要的。也可能一个分支自己产生出来并且后来对其他部分有用，但是如果它走得太远而被修剪掉，从数学上看这确实无关大局。确有些创新的思想，它们在一段时间内开辟了新的方向，但它们还与数学的其他的重要部分联结在一起并且互相作用。数学的某个分支的重要性大体上可以用它与数学其他分支的相互作用的多少来衡量。这好像是重要性的一个无矛盾的定义。

M：但是，某个东西在一段时期内没有用，而很多年之后它又被用上，这是可能的吧？

A：我认为确实会有人提出超前于他的时代的数学思想，也可能有人提出一个聪明的想法，但人们在很长的时期内看不到它的意义。显然这些都可能发生。

我刚才并没有怎么想到这类事情，我刚才想得更多的是现在的一种趋势，即人们闭门造车式地，并且相当抽象地创立一个个整个的数学领域。他们只是像海狸那样一个劲地啃。如果你问他们这是为什么，其意义何在，与其他的关系如何，你将发现他们说不上来。

M：你愿意举个例子吗？

A：近代数学的每个分支都有些例子：抽象代数的一些部分，泛函分析一些部分，点集拓扑一些部分；在这些部分里，人们会看到公理化方法的最恶劣的表现。

公理是为了把一类问题孤立出来，然后去发展解决这些问题的技巧而提炼出来的。一些人认为公理是用来界定一个自我封闭的完整的数学领域的。我认为这是错的。公理的范围越窄，你舍弃得就越多。

当你在数学中进行抽象化时，你把你想要研究的与你认为是无关的东西分离开，这样做在一段时期里是方便的，它使思维集中。但是通过定义，舍弃了宣布你认为不感兴趣的东西，而从长远看来，你丢掉了很多根芽。如果你用公理化方法做了些东西，那么在一定阶段后你应该再回到它的来源处，在那儿进行同花和异花受精，这样是健康的。

你可以发现约三十年前冯·诺依曼（von Neumann）及魏尔就表达了这种意见。他们担心数学会走什么样的路，如果它远离了它的源泉，就会变得不育，我认为这是非常正确的。

M：显然你对数学的整体性有很深的体会。你认为你的工作方式及你本人在数学上的贡献在多大程度上造成了这种整体性？

A：很难把一个人的个性同他对数学怎么看分开。我相信把数学看成是一个整体是非常重要的。我的工作方式反映了这一观点，至于哪个在前这很难说。我发现数学不同分支的相互作用是有趣的。这一学科的丰富性就是来自这个复合性，而不是来自纯粹性及孤立的专门化。

但是，也还有哲学的及社会的道理。我们为什么搞数学？我们搞数学主要是因为我们喜欢它。但从深一层上讲，为什么给我们钱搞数学？如果有人要我们辩明这一点，那么我们必须承认这个观点，即数学是一般的科学文化的一部分。即使我正在搞的那个数学领域对于他人无直接关系和用途，我们也还是在为一个整个的思想的有机体做贡献；如果数学

是思想的联合体，每一部分都有潜在的应用到其他部分的可能性，那么我们都是为一个共同的对象做贡献。

如果数学被看成是一些支离破碎的门类，而且互不相干地、自管自地发展，那就很难回答为什么要给人出钱去搞数学。我们不是表演者，像网球运动那样，我们唯一的依据是数学对人类思想有真正的贡献。即使我不直接搞应用数学，我觉得我也是在对这样一种数学作贡献，即它能够而且必将对于那些有兴趣于把数学应用到其他地方的人们有用。

每个人都要为他的人生哲学辩护，至少要向自己辩护。如果你教书，你可以说：“我的职业是教书，我培养出了年轻人，因而我得到报酬。至于研究嘛，我是在业余搞。他们是出于宽宏大量才让我搞的。”但是如果你是专职搞研究的，那么你要为自己的工作辩护就要更费力气去想了。

在某种意义上，我还在搞数学，因为我喜欢搞。我很高兴有人出钱让我做我喜欢的事。但是我也试图去感觉它还有更严肃的一面。提供辩护的一面。

M：有这种论调：“纯粹数学用处不大，五年之内所有人都只有搞计算了。”对此你是如何看的？

A：这种观点含有某种危险，如果纯粹数学家采取象牙塔的态度，不去考虑他们与其他学科的关系，那么就存在这样一种危险，即人们会出来说，“我们确实不需要你们——你们是奢侈品——我们要雇用做更实际的工作的人”。我认为这种危险性一直是有的，而在财政困难的时期则更为严重，例如我们现在正处于这个时期。我认为已经有这种信号出现了。

当然，在过去的五年或十年中，纯粹数学家越来越了解到他们必须更好地为他们自己干的事辩护。但我还是同意很多人的这种看法，即这是不自然的，是在压力之下才这么做的。倘如广大的纯粹数学家更有自我批评的精神，那么情况就会健康起来。

M：再回到你做过的数学上。是否有一个定理在你证出的定理中最使你感到幸运？

A：我认为有，我与辛格一起证明的指数定理从很多方面看都是我所做过的东西中最清晰的一个。我确实认为指标定理是人们可以谈论的定理中一个好的、清晰的定理。我的大部分工作都是以不同的方式以它为中心做的。

它从拓扑学及代数几何的工作开始，但后来它对泛函分析有相当的推动；过去十年来，这个方向有许多人搞。而且现在还发现它与数学物理有有趣的联系。所以从很多方面看它仍在发展并且仍然活跃。在某种意义上，它象征了我的主要兴趣，即数学所有领域之间的相互作用及联系。这是一个代数拓扑与分析（还有各种形式的微分方程）非常自然地结合在一起的领域。

M：你是否预见到了近来数学家对数学物理重新发生兴趣这件事？

A：实在没有。我对数学物理的兴趣有相当长时间了。它并不很深——我试图弄懂量子力学及有关的课题。但是过去五年发生的事情——数学家对规范场理论的兴趣——我是没料到的。我对物理知道得还不够多，无法预料这件事情会发生的程度。对我个人来讲，量子场论是那些神秘的大的字眼之一。

我认为物理学家自己也感到意外。几何的一面变得重要并且占了统治地位这一事实，他们很多人也没有预言过（而且有些人仍然不同意这一点!），一些主要的问题看上去好像很不一样——分析的问题，代数的问题。像彭罗斯这样一些人没有感到意外。他们从自己的观点在这方面工作了很久。但是我认为这是个好的例证：如果你是在主流中做有意思的、

基本的数学工作，那么当别人用上你的工作时，你不应感到意外。这证实了对于数学，包括物理在内的整体性的信仰。

M：你对这个命题相信的程度有多深？

A：我学的物理越多，我越加坚信物理提供了数学在某种意义上最深刻的应用。物理中产生的数学问题的解答及其方法过去一直是数学的活力的来源。现在仍是这样。物理学家处理的问题从数学的角度看是极其有趣的，并且是困难和富有挑战性的问题。我认为应该有更多的数学家参与进来，并且设法学一些物理；他们应该把新的数学方法引进物理问题中去。

物理是很不简单的。它是非常数学的，物理的洞察力与数学方法的结合。

数学在（比如说）社会科学、经济学、计算上的较新的应用是重要的。我们培养具有这种应用数学的观点的学生是重要的，因为这是商业世界所要求的。成千上万的学生需要这样的观点。

另一方面，从用到的数学的深度来看，则是不可同日而语的。在诸如经济学与统计学中，也有些有意思的问题，但总的说来，用到的数学十分浅显。真正深刻的问题仍然在物理科学中。为了数学研究的健康，我认为尽可能多保持这种联系是非常重要的。

M：你对教育显然有兴趣。另一方面，就你的职业而言，很清楚你是作研究的数学家。你如何解释这一点？

A：我对教育有兴趣的理由与我对数学的整体性有兴趣的理由一样。大学是教育的机构并且还从事研究。我认为这是很重要的——应该有大学的及整个社会结构的整体性来保持数学教育与数学研究之间的广泛的平衡。当大学里为了教育的目的开课时，他们应该确保他们对学生做的事是对的，而不是仅仅因为他们对培养做研究的学生有兴趣而开（比方说高等拓扑学课）。否则那将是灾难性的错误。

大学必须保持两种活动的平衡。他们应该知道学生学些什么是有用的，要记住学生将来做什么。同时，他们还应该扶助研究。一些人将来全做研究，一些人将来主要是教书，而大部分是介于两者之间。显然我只介入大学的研究任务，但我生活在大学里，我在大学里有同事，我知道他们在干什么，所以我对大学里各种职能是否达到平衡很关切。

M：你是否认为过去二十年里英国的大学增加得太多了？

A：我不认为增加得太多了。与其他国家，特别是美国比，显然受过高等教育的人比例太小，应该更多些；更重要的是，大学应继续增加。我不能相信到下个世纪，受到高等教育的人的比例还是现在这么多。那是肯定要改变的。

在一段时期的增长之后（这在战后是必要的），确实会产生一些问题。它带来了不连续性。你要了大量的人去大学教书，而当这个增长一旦停止时，你已经把所有的位置占满了——你不能再要年轻人了。人们可以批评当年各大学头脑发热和欠谨慎，以致没有预见到这样做必然会产生的一些困难。例如，不像美国大学，英国大学在增长时期，拿到博士后可立即得到永久性的位子，因为当时各大学在互相竞争。我认为这是个错误，现在他们正在为这个错误付出代价。

如果不是从一开始就给终身的职位而是采用灵活些的制度来使他们适应，那就明智些。我们现在已经有了这个尖锐的不连续性，这将导致危机与冲突。也许大学的人应该谨慎为好。

M：再用点时间回到教学与研究上去。你说过两者都是大学生活的重要部分，但你仍然是分别谈到它们的。近来研究所在增加——波恩，沃里克（Warwick），普林斯顿——哪儿都不教书，你认为这是健康的吗？

A：关于这类研究所首先要指出的是它们或者没有终身研究人员，或者只有很少的终身研究人员。大多数去那些地方的人都是进修性质的。他们从各大学到那儿呆一学期或者一年，然后再回去。所以它们类似广义的会议中心，人们在那儿碰头和交流思想，然后回去进行他们的工作。他们只是帮助大学的人对科研保持活跃的兴趣——那是它们的主要功能。

可是，如果你采用类似于东欧的制度，即设立雇用大量终身职位的人员的庞大研究所，并且从各大学抽走相当比例的教授，这就会带来问题。那样你就真正使大学与研究严重脱节。但是就数学而言，这种中心数目是很小的，研究员也很少，而且去那儿再回来的人都只是为了加强大学体系，我认为这是十分健康的。

它们还有另一个目的，即帮助或引导人们进入那些富有成果的数学思想的领域。除了到一个中心去推动自己当前的工作之外，年轻人也可以到这类中心以期被引导选定一个有成效的研究方向。

普林斯顿的研究所，即我获得博士后所去的地方，在实现这一目的方面做得很好。我完成了博士学业，写好了论文，但我仍在寻找我在数学上的归宿。我不知道往哪儿走，也不知将来干什么。我来到这个大的中心，那儿有许多来自世界各地的有各种思想的能干的年轻人、老年人。在差不多一年之后，我满载着新思想与新方向回到英国，这对我以后的数学发展有巨大的影响。

M：普林斯顿的人当中谁对你影响最大？

A：我觉得主要不是那些终身研究员们。我是 1955 年去的，当时去那儿的人比现在去那儿的同类型人年纪稍大些。

我碰上了希策布鲁赫，塞尔，博特，辛格……他们都是我去这个研究所时认识的。小平邦彦（Kodaira）及斯潘塞（Spencer）当时也在。我认识了这一大批人，在数学上受到他们的影响。后来我与同样的这批人的合作不是偶然的。

我觉得还有另一方面，即它不但改变了你的观点和你的工作，而且它使你接触到其他的活跃的人物并且在以后保持这种个人联系，这对以后维持你在数学上的发展是很重要的，与不同国家的人会面是重要的——数学是非常国际性的，而这些中心提供了这种在其他地方很不容易得到的机会。

M：国际会议也提供了大家见面的机会，但也许不太能达到提供人们一起工作并且真正学到些东西的目的？

A：是的，国际会议很有益，但也许对于初出茅庐的年轻人不是那么有用。它们对于那些已经定型的人有益。如果你已经与别的人很熟，而且也很活跃，那么在很短的时间里你可以通过短暂的思想交流得到好处。如果你是个年轻学生或者博士后，你确实无法与很多人交谈，因为你不了解他们，你会受到约束，而且你懂的东西不够多，使得你很难听懂他们谈的东西。因此我认为你需要更长时间的熏陶。你需要花一年左右时间来慢慢吸收知识，来了解人。所以我认为国际会议的功能是不同的。

M：国际数学家大会如何？

A：我觉得国际数学家大会完全不同。自从 1954 年以来，每一届我都参加了，我从中得到的好处则很难讲。

我还是年轻学生时，第一次参加的那次大会是非常好的。我有机会去听魏尔的报告，

那是心理上的极大的推动。我感到我是数千名数学工作者的团体中的一员。大部分报告我都听不懂，我去了之后就坐了“飞机”。从数学上懂了多少具体的东西上看，我认为什么收获也没有，但心理上的推动是巨大的。

现在我年纪大些了，国际大会的价值就小了。我是出于尽义务才去的——我有事要做——去与人们交谈，去做报告。我实在受益不多，因为那儿人太多了。一些报告我很喜欢，我认为国际数学家大会有好处，但是不很大。

除了对年轻人的好处，即给予他们国际成员感之外，另一个主要的职能恐怕是帮助那些数学不那么活跃的国家的人们。如果你是西欧或美国人，那么也许它们并不很重要。但是如果你来自非洲或亚洲或东欧，因而旅行及与人见面的机会少得多，那么我认为这是你去了解别人在干什么的唯一机会，我觉得这是它的主要目的。

M：你是否认为菲尔兹奖的设立起到了积极的作用？

A：我认为略有一些，我感到幸运的是菲尔兹奖没有像诺贝尔奖那样。诺贝尔奖使科学，特别是物理学严重畸形。诺贝尔奖所带来的荣誉及大吹大擂的宣传，以及大学花钱拉拢诺贝尔奖获得者等等，都是极端的行为，某个人能获奖与不能获奖的区别很难说——这是个十分人为的区分。但是，如果你得到了诺贝尔奖，我没有得到，那么你就得到双倍于我的工资，而且你所在的大学会给你盖一个大实验室，我觉得这是很不幸的。

但是在数学方面，菲尔兹奖根本没有影响，所以也没有消极的效果，那是授予年轻人的，以作为对他们以及整个数学界的一种鼓励。

我也被授予过菲尔兹奖和给予鼓励，它提高了我的自信心和士气。我不知道倘若我没有得到这个奖的话，情形会有什么不同；但是在那个时期得到它的确使我受到鼓舞，激发起我的热情。因此我认为在这种意义下菲尔兹奖是有用的。

我发现在一些国家这个奖的名声很大，例如在日本。在日本，获得菲尔兹奖如同获得诺贝尔奖。所以当我去日本，人家介绍我时，我感觉像个诺贝尔奖获得者，但在我国，根本没有人注意。

M：你是否发现在不同国家里，数学家的地位十分不同？

A：当然，在不同的国家里，数学的含义有些差别。在我国，主要是数学与应用数学及物理的分野有相当的不同；在大多数国家里，纯粹数学的独立性更大些。这可能对人们关于数学家的概念有广义的影响，他们不像在美国那样把数学家十分狭义地与纯粹数学联在一起，在美国，数学家是指纯粹数学家。

除此之外，我认为在法国，数学家从传统上有较高的地位，这是因为法国具有较看重哲学、文学及艺术的传统，而数学属于这一类。而在我国，他们对这些从来也不怎么重视。

在德国，教授也有传统的较高的地位，虽然这一情形也在迅速地改变。

我认为在关于人们如何看数学及大学的问题上，显然各国有差别。但那也是在变化的——不同的文化的差异正在缩小。

M：我有几个关于你是如何工作的问题。例如，你使用的是什么样的思维表象（mentalimage）？

A：我不敢说我能答上来这个问题。我觉得有时我脑子里确实有个视觉的图像，某种模式图。但是这是否真的是某种图像或者只是纯粹的符号，我也不知道。我认为这是个很困难的问题，它与心理学的关系比数学更大。

M：我的问题的意思是想区别几何直观与代数操作（manipulation）。

A：是的，是有区别，我猜想这个一分为二的现象在大脑中是真实的。我搞的东西是比较几何的，但我不像瑟斯顿（Thurston）[注一]，他可以同样自如地看见复杂的、高维的几何。我的几何是比较形式化的。但我也不是代数学家——我不喜欢操作。也许从心理学的角度讲，我不是典型的极端人物，我像是普通的中间的人。

如果你去问瑟斯顿，也许他会说他的确能看见他心里的复杂的图形，他要做的事只是把它画在纸上，从而给出证明。也可以去问汤普森（Thompson）[注二]，他怎样看见一个群；我不知他会如何回答。差别是有的，这是个复杂的问题，但它四分之三是心理学，只有四分之一是数学。

M：记忆对你的工作的重要性有多大？

A：我提到过当我 15 岁时我对化学有强烈的兴趣。我用了整整一年去攻化学后来就放弃了。原因很简单，在化学里，要记忆大量的事实。当时我有几本大部头的无机化学书，我要做的只是去背通过不同的手段，用不同的物质得到的这种或那种物质，能够帮助你记住这些东西的结构性联系是微乎其微的。有机化学稍好一些。与此相比，在数学里，你几乎根本不需要记忆，你不必去记忆事实；你所需要做的只是去理解整个东西是如何装配起来的。所以我认为在这种意义下，数学事实上不需要科学家或医科大学生的那种记忆力。

在数学中，另一种形式的记忆是重要的。比如我思考一个问题，突然我领悟到这个问题同我上星期或上个月同别人交谈时听到的某个问题有关系。我的很多工作都是这么出来的。我出去买东西，与别人交谈，得到别人的思想，这些思想我只是半懂，然后就存进我的记忆中。这样我就有了这些数学领域的片断的庞大的索引卡片盒。所以我认为记忆在数学中是重要的，但是它是与其他领域的记忆不同的一种记忆。

M：当你工作时，在你尚未找到某个结果的证明之前，是否能判断它是对的？

A：为了回答这个问题我应该首先指出我不是为解决某个问题而工作的。如果我对某个科目有兴趣，那我就去设法理解它；我只是不断地想着它，并试着一点点儿往深挖。如果我把它弄懂了，那么我就知道什么是对的，什么是不对的。

当然，也可能你没有真弄懂，可你认为你懂了，但后来发现你错了。粗略地讲，一旦你真正感到弄懂了一样东西，而且你通过大量例子以及通过与其他东西的联系取得了处理那个问题的足够多的经验，对此你就会产生一种关于正在发展的过程是怎么回事以及什么结论应该是正确的直觉。然后的问题是：你如何去证明它？而这可能要花很长时间。

例如，我们提出了指标定理并且知道它应该是对的，但我们花了几年功夫才找到证明。其中的一个原因是证明中涉及到一些全然不同的技巧，所以我必须学一些新东西以求得一个证明（对这个例子，我们是找到了几个证明）。我对于证明的重要性并不大注意，我认为更重要的是理解。

M：那么证明的重要性是什么？

A：证明的重要性在于它是对于你的理解的一个检验。我可以认为我懂了，但是证明是你懂与否的检验，仅此而已。它是行动的最后一步——最后的检验——但它根本不是主要的东西。

我记得我证明过一个定理但却不能理解这个定理为什么是对的。为此我想了好几年。它涉及 K-理论与有限群的表示的关系。为了证明这个定理，我必须把群分解成可解的与循环的；还用到很多的归纳步骤及其他的信息，为了保证这个证明通得过，每一个环节都必须一点儿也不差——换言之，你必须有好运气，我很惊讶地发现证明成功了并且老是在想，

如果这个链中的一环突然断开，如果论证中有一点儿瑕疵，那么整个证明就要垮下来。因为我不能理解它，也许它根本不是正确的。我一直在想，直到五六年之后我才弄懂了它为什么是对的。从而我通过有限群到紧致群的转化给出了完全不同的证明。用完全不同的技巧可以使它为什么是正确的这个问题变成显然的。

M：你是否有办法不通过证明而把你的理解传授给别人？

A：我理想地认为：当你传授数学时，你应该设法传授理解。这通过交谈比较容易办到。当我同别人合作时，我们就是在这种理解的水平上交换思想的——我们理解这个问题且依靠直觉。

当我作报告时，我总是设法表达出问题的主要之点，但是在写论文或书时，这就困难得多了。我不怎么写书。在论文中，我尽我的所能去写一个导言或解说来给出思想，但在论文中你必须有证明，所以你必须写证明。

现在，大多数的书倾向于太形式化，它们用于形式化证明上的篇幅过多，而用于启发和思想的篇幅过少，当然，给出启发和思想是困难的。

有一些例外，我觉得俄国人是例外。我认为俄国的数学传统比起西方的传统更少形式化和结构化，后者受到法国数学的影响。法国数学一直是占据统治地位并且产生了一个很形式化的学派，我认为大多数书都在向这种过度抽象的方向发展并且不去传授理解。

但是传授理解是不容易的，因为它只有通过与一个问题一起生活一个很长的时期才能做到。你可能要研究它好几年，你才得到它的直觉并使它进入你的骨骼中。你不可能把它传授给另外的人，如果你花了五年时间研究一个问题，那么你可以做到这一点，即把它讲给别人听，使得别人花较少的时间就可以到达你现在的水平，但是如果别人没有钻进这个问题中去并且看到所有的难点，那他们还没有真正理解它。

M：你如何得到你所搞的东西的思想的？是否只要坐下来并且说“好了，我现在要花两小时做数学了”就行了？

A：我认为只要你在积极地进行数学的研究工作，数学总是同你在一起的，当你想问题时，它总是在那儿。当我早上起床刮脸时，我想的是数学；当我吃早饭时，我仍然想着我的问题；当我驾汽车时，我也仍在想我的问题。但注意力集中的程度各不相同。

有时你会问自己，你一边做那些事时一边想这些问题是否值得，是否有所帮助，也许你这不过是徒劳无功地反复思索。

有的上午你坐着并且集中精力想某个问题，那种高度的精神集中很难持续长久，而且也不总是成功的。有时你认真思索就会得到解答。但真正有趣的思想是当你灵感的火花迸发时产生的。它们的本性决定了其偶然性；它们可能在随便的交谈中产生：也许你正在同某人谈话而对方提到了某个东西，你心想“老天爷，这不正是我要的吗！……它能解释上星期我想的问题”，然后你把这两样东西摆在一起，你把它们融合，这样从中产生出某种东西来。把两种东西放在一起，就像拼图游戏一样，这在某种意义上是随机的。但是你若想从随机的相互作用中得到最大的机会，你就必须经常在脑子里反复思考这些东西。我想庞加莱讲过这种话。它是一种或然性的结果：思想在你的脑海中飞舞，而有成果的相互作用产生于某些随机的、幸运的突变。技巧就在于使这种随机度尽可能大，这样你才有增加有成果的相互作用的机会。

从我的观点看，我同不同类型的人谈得愈多，我对于各种不同的数学问题想得越多，那么我从别人那儿得到新鲜的想法并且进而与我已经知道的某个东西联系起来的机会就愈大。

例如，指数定理就有偶然的成分。辛格和我碰巧都在牛津研究希策布鲁赫的工作产生

出的黎曼-罗赫定理。我们俩在一起玩的时候产生了这样一个想法：对迪拉克算子也给一个这样的公式，那时斯梅尔（Smale）路过牛津，我们同他谈了，他告诉我们前几天他刚刚读到盖尔范德（Gel'fand）一篇文章，是关于算子的指数的一般性的问题的，他还说此文可能与我们正在做的事有关系。我发现这篇文章很难懂，它一般性地提出了问题，而我们要找的是一个重要的特例。后来我们认识到我们必须把我们正在做的东西推广从而导致了整个东西的产生，但是是过路的斯梅尔使我们走上正确的轨道的。

另一个例子是我关于瞬时子（instanton）的工作。那也是带有偶然性的事。当时我知道彭罗斯和他领导的一批人在搞物理的几何方面的东西，其中一个叫沃德（R. Ward）的做出了好结果。他正在讨论班上报告，我当时问自己："我是否应该去，它是否会有些枯燥？好，还是去。"于是我去了。讨论班讲得很清晰，我听懂了他在做的东西，我回去时说："嗨，确实棒。"我回去后用了三整天苦苦思索，突然间我发现了它是怎么回事，它怎样与代数几何挂上钩的。从那时起，问题开始有了突飞猛进的发展。我要是不去听那个讨论班，可能那个问题至今仍是老样子。过去数学家与物理学家之间的差距很大。我怀疑在过去思想会这么快地得到沟通。当然，你也可能参加很多次讨论班却得不到启发。

M：你是否有最喜欢的定理或问题？

A：那不是一个很要紧的问题，因为我是不相信定理本身的。我相信的是数学是一个整体的东西；一个定理只是一个补给站，我知道很多好的题材，好的事实，好的东西，但我认为单个的它们并不具有多大的重要性。我想对于问题也是这样。

我不想给人以印象：好像我把数学只看成是一个抽象理论而没有实体，一个理论之所以有意思是因为它解决了许多特殊问题，并且把它们放在恰当的位置上；它使你全部理解它们，一个理论常常是在某人解决了一个很难的问题之后，人为了理解这里面的过程而发展起来的——即你在它周围筑起了上层建筑。没有硬问题的软理论是无用的。

M：你对于有限群的分类有何感想？

A：我的感想是（褒贬）兼而有之。首先，证明的篇幅太大，我觉得如果这是仅有的证明方法，那么我们对于它的理解的程度是相当有限的。人们希望关于所有这一切的一个更透彻的理解会产生出来，也许我的看法是错的，但我相信如果真的会产生出来，它将由这样的人们来完成，即他们从外倾的（extroverted）观点，而不是内倾的（introverted）观点来看群。

因为群在自然中产生，它们是使事物运动的东西，它们是变换或置换。从抽象的角度看，你把群看成是一个内在的结构，具有它本身的乘法——这是很内倾的观点。如果你只允许自己用这种内倾的观点，你的武器库将是很有限的。但是如果你从群的表现形式来看群，从外面的世界去看，则你可借助外来世界里所有的东西。这样你就得到了或应该得到一个强有力得多的理解。我的想法，我的梦想是：通过群是在一些自然的背景中（作为变换群）产生的这一事实，人们应该能证明关于群的深刻的定理，从而使其结构变得一目了然。

而且，我也不能肯定整个这个结果的重要性。有些人会说数学中最重要的是建立起有公理 1，2，3 的公理化体系，现在有群、空间这些对象。问题就在于给它们分类。我认为这是不正确的观点。理解这些东西的本性并且使用它们才是目的；分类只是告诉你理论的范围大致有多大。

例如，李群的分类是有点特殊的。你面前有个分类表，有典型群，也有例外群，但是对大多数实用的目的，你只用到典型群。例外李群的存在性只告诉你这个理论还要大一点儿。它们很少冒出来。倘若有无穷多个例外李群，使李群的分类变得极其复杂，李群分类

的理论也不会有多大不同。

所以我认为不同类的（有限）单群的存在与否对于数学没有什么影响。那是智慧的一个好的终点，但我认为它没有基本的重要性。

M：但是，如果有另外的办法去做，即某种外倾的观点那么它是否会有较大的影响？

A：那将会有这种意义下的影响，即它告诉人们事情可以用另外的方式来做。但我认为结果没有基本的重要性；它不能与，举例来说，群的表示论相比拟。

分类的这个观点可以被极度地夸大。它在一段时期里是注意的焦点。它指出好的问题和挑战。但是，如果它占去了大量的精力，人们会想是否有更好的方法去做，找到一个更好的方法这件事本身也许会是有趣的，并且会揭示出新的思想与新的技巧。你瞧这个结果，它看上去不错，你给出了这个冗长的复杂的证明，去寻求更好的方法是个挑战，做此探索可能是有益的，其好处主要是来自新思想而不是你找到新证明这件事实。

麦基（G. Mackey）有次对我说的话我认为是很正确的。在数学的某个领域中，重要的东西常常不是技术上最困难的即最难证明的东西，而常常是较为初等的部分。因为这些部分与其他领域、分支的相互作用最广泛，即影响面最大。

在群论中有许多极端重要的，并且在数学的各个角落到处出现的东西。这些是较为初等的东西：群及其同态、表示的基本观点，一般的性质，一般的方法——这些才是真正重要的。

分析也是如此，有些关于傅立叶级数在什么条件下收敛的很细致的论证；这些东西技巧性很高，也很有趣。但对于使用傅立叶级数的那些数学家来说它们并不重要。一个领域的专家们往往醉心于困难的技术性问题，但从数学家集体的观点去看，他们虽也赞叹这些东西，但却并不需要它们。

M：你最佩服的数学家是谁？

A：这个问题很好答，我最钦佩的人是赫尔曼·魏尔。我发现我在数学中干的差不多每一件事，赫尔曼·魏尔都是第一个做过的，我所搞的大多数领域都是他搞过的并且他自己还有开创性的、很深刻的工作，当然，拓扑学是例外，这是在他的时代之后才产生的，但是他的兴趣包括了群论、表示论、微分方程、微分几何、理论物理；我所做的差不多每件事都与他做类似的东西时的精神相符合。并且我完全同意他对数学的看法及他关于数学中什么是有意思的东西的观点。

我在阿姆斯特丹的国际数学家大会上听过他的报告。他在那儿把菲尔兹奖章授予了塞尔和小平邦彦。然后我去了普林斯顿的研究所，但是他那时在苏黎世并在那儿去世。我在普林斯顿没见到他。我只见到他那么一次，所以并不是由于个人的接触才使我钦佩他的。

有很多年，每当我进入一个不同的领域，当我去找幕后的人时，没有错，准是赫尔曼·魏尔。我感到我关心的重点同他一样，希尔伯特比较代数味儿；我认为他没有同样强的几何洞察力。冯·诺依曼则比较侧重分析并且较多搞应用的领域，我认为从数学的哲学及数学的兴趣上讲，显然赫尔曼·魏尔是同我最接近的人。

[注一]瑟斯顿，美国几何拓扑学家，获 1983 年菲尔兹奖。
[注二]汤普森，英国代数学家，获 1970 年菲尔兹奖。

（王启明　译　　沈信耀　校）

摘自 Atiyah《数学的统一性》(3 小时)