《流形与几何》测验一　2015.3.23

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于一周内交给我.

1. 设 M, N 分别为 m, n 维微分流形, 证明 $M\times N$ 为 $m+n$ 维微分流形.

2. 设 M, N 为微分流形, $f: M\to N$ 为光滑映射. 如果 f 的秩恒等于 l, 则任给 $p\in M$, 存在包含 p 的局部坐标邻域 U 以及包含 $q=f(p)$ 的局部坐标邻域 V, 使得 $f(U)\subset V$, 且 f 的局部表示形如
$$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_l,0,\cdots,0).$$

3. 设 $f: M\to N$ 为微分流形之间的淹没, 证明 f 将开集映为开集.

4. 定义映射 $f: GL(3,\mathbb{R})\to GL(3,\mathbb{R})$ 为 $f(A)=AA^\top$. 计算 f 的秩, 并说明 $O(3)$ (3 阶正交矩阵的全体) 为正则子流形.

5. 设 $f: M\to N$ 为微分流形之间的光滑映射. 如果 S 为 M 的正则子流形, 则 $f|_S: S\to N$ 仍为光滑映射; 如果 T 为 N 的正则子流形, 且 $f(M)\subset T$, 则存在光滑映射 $g: M\to T$, 使得 $f=i\circ g$, 其中 $i: T\to N$ 为包含映射.

6. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, $x^0\in\mathbb{R}^n$. 记
$$S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)=f(x^0)\}.$$
设 $\nabla f(x^0)\neq 0$, 证明在 x^0 附近 S 为正则超曲面.

7. 设 $\{A_\alpha\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族局部有限的闭集, 证明它们的并集仍为闭集.

8. 设 M, N 为紧致微分流形, f 为 $M\times N$ 上的光滑函数. 证明: 任给 $\varepsilon>0$, 存在 M 上的有限个光滑函数 g_i 和 N 上的有限个光滑函数 h_i $(i=1,\cdots,k)$, 使得
$$\Big|f(x,y)-\sum_{i=1}^k g_i(x)h_i(y)\Big|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in M,\ y\in N.$$