《流形与几何》测验二　　2015.4.27

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于一周内交给我.

1. 设 M 为微分流形, $p \in M$, $X_p \in T_pM$. 证明: 存在从 p 出发的曲线 σ, 使得 $\sigma'(0) = X_p$.

2. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形, X 为 M 上的光滑切向量场, 如果对任意 $p \in N$, 均有 $X(p) \in T_pN$, 则称 X 与 N 相切. 设 X 与 N 相切, 证明 X 生成的单参数变换群将 N 中的点仍变为 N 中的点.

3. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形. 设 X, Y 为 M 上的切向量场, 如果 X, Y 均与 N 相切, 证明 $[X, Y]$ 也与 N 相切.

4. 设 $r + s = n$, $L = \mathrm{diag}(-I_r, I_s)$, 计算 Lorentz 群 $O(r, s)$ 的维数, 其中
$$O(r, s) = \{A \in GL(n, \mathrm{R}) \mid ALA^\top = L\}.$$

5. 设 M 为连通微分流形, $p, q \in M$. 证明: 存在微分同胚 $f : M \to M$, 使得 $f(p) = q$.

6. 设 A, B 为 n 阶方阵. 如果 $AB = BA$, 证明: $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.

7. 对 2 维 Lie 代数做分类（在 Lie 代数同构意义下）, 并举出相应的 Lie 群的例子.

8. 设 G 为 Lie 群, V 为实数域上的有限维向量空间. V 的线性自同构的全体组成的 Lie 群记为 $GL(V)$, $\rho : G \to GL(V)$ 为 Lie 群同态. 在 $G \times V$ 上如下定义群的乘法运算:
$$(g_1, v_1) \cdot (g_2, v_2) = (g_1 \cdot g_2,\ v_1 + \rho(g_1)v_2),\quad \forall\, g_i \in G,\ v_i \in V,\ i = 1, 2.$$
所得到的 Lie 群记为 $G \times_\rho V$, 请计算它的 Lie 代数 (假定 G 的 Lie 代数已知).