《流形与几何》测验四　2015.6.17

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于 6 月 27 日前将解答投入我在西大楼（数学系）的信箱内.

1. 设 (M,g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 中, 黎曼 g 可以表示为 $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$. 证明 $g(\nabla x^i,\nabla x^j)=g^{ij}$, 其中 g^{ij} 是矩阵 $(g_{ij})_{n\times n}$ 的逆矩阵在 (i,j) 位置的元素.

2. 设 V 为 n 维内积空间. 取 V 中的一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 其对偶基记为 $\{e^i\}_{i=1}^n$. 在 V^* 中定义一内积, 使得 $\{e^i\}_{i=1}^n$ 为标准正交基. 证明此内积和前述基的选取无关.

3. 设 σ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上从原点出发并趋于无穷远的曲线. 在黎曼度量 $g=(1+x^2+y^2)^{-2}(dx\otimes dx+dy\otimes dy)$ 下, 证明 σ 的长度至少为 $\pi/2$, 并讨论等号成立的情形.

4. 设 (M,g) 为黎曼流形, f 为 M 上的光滑函数. 记 $\tilde{g}=e^{2f}g$, $\tilde{g}$ 的 Levi-Civita 联络记为 $\tilde{\nabla}$. 设 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 证明
$$\tilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+(Yf)X+(Xf)Y-g(X,Y)\nabla f.$$

5. 设 (M,g) 为黎曼流形, f 为 M 上的光滑函数. 证明 $L_{\nabla f}g=2\nabla^2 f$, 其中 ∇f 为 f 的梯度场, $\nabla^2 f$ 为 f 的 Hessian.

6. 设 (M,g) 为黎曼流形, 如果其截面曲率恒为常数 c, 证明其曲率张量为
$$R(X,Y,Z,W)=c\big[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)\big].$$

7. 设 (M,g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 中, 黎曼 g 可以表示为 $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为一组局部标准正交标架, 其对偶余切标架记为 $\{e^i\}_{i=1}^n$. 如果 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ 之间的转换行列式处处为正, 则 $e^1\wedge e^2\wedge\cdots\wedge e^n$ 等于 $\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\,dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$.

8. 设 (M,g) 为黎曼流形, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为一组局部标准正交标架, 其对偶余切标架记为 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$. 设 $\{\eta_i^j\}$ 为一组 $1-$ 形式, 满足条件
$$\eta_i^j+\eta_j^i=0,\quad d\omega^i=\omega^j\wedge\eta_j^i,$$
证明 $\{\eta_i^j\}$ 就是联络 $1-$ 形式.

9. 谈谈你经过这一个学期的学习以后对流形和几何的认识和体会.