《紧黎曼曲面》测验一　 2015.9.28

说明： 从下列题目中选择 5 题完成并于 10 月 12 日交给我.

1. 设 $\{a_i\}_{i=1}^{2n+1}$ 为 $\mathbb{C}$ 中 $2n+1$ 个互不相同的复数, 记
$$\Sigma = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2n+1})\},$$
证明 Σ 为黎曼曲面, 其加一点紧致化也是黎曼曲面.

2. 设 f 为 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数. 如果存在常数 $C>0$, $n \geq 1$, 使得当 z 充分大时, $|f(z)| \leq C|z|^n$, 证明 f 是多项式, 其次数不超过 n.

3. 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为单全纯映射. 证明 f 为全纯同构, 从而是线性映射.

4. 黎曼环面 $\mathbb{C}/\langle 1, 2i\rangle$ 和 $\mathbb{C}/\langle 1, 3i\rangle$ 是否全纯同构? 请说明理由.

5. 设 Σ 为黎曼曲面, $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ 为光滑函数. 当 $z = x+iy$ 为局部坐标时, 记
$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx,$$
证明 ω 的定义与局部坐标的选取无关, 是 Σ 上的 1–形式.

6. 证明黎曼球面 $\mathbb{S}$ 上不存在非平凡的全纯 1–形式.

7. 设 Σ 为单连通黎曼曲面, $p \in \Sigma$. 证明 $H^1_{dR}(\Sigma \setminus \{p\})$ 要么为零, 要么为 $\mathbb{C}$.

8. 计算 $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}^*$ 的 de Rham 上同调群.