《紧黎曼曲面》测验二　　2015.11.2

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于 11 月 9 日交给我.

1. 设 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 为调和函数, $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$. 证明 $|\nabla u(z_0)| \leq \dfrac{2}{\rho} \sup\limits_{\partial B_\rho(z_0)} |u|$.

2. 设 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为调和函数. 如果存在正常数 C_1, C_2, 使得
$$|u(z)| \leq c_1 |z| + c_2, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$
证明 u 为线性函数.

3. 设 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为正调和函数, 证明 u 为常值函数.

4. 设 $u : \mathbb{D}^* \to \mathbb{R}$ 为有界非负次调和函数, 且 $u|_{\partial\mathbb{D}} = 0$. 证明: $u \equiv 0$.

5. $\mathbb{C}^*$ 是双曲型的还是抛物型的? 请说明理由.

6. 设 Σ 为紧黎曼曲面, D_1, D_2 为因子, 其中 D_2 为有效因子. 证明 $\dim l(D_1 + D_2) \leq \dim l(D_1) + d(D_2)$.

7. 设 Σ_1, Σ_2 为紧黎曼曲面, $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 为非常值全纯映射. 证明: Σ_2 的亏格不超过 Σ_1 的亏格.

8. 设 Σ 为紧黎曼曲面, ω 为 $(1,0)$ 型 1− 形式. 利用 Hodge 定理证明: 存在全纯 1− 形式 η 和光滑函数 f, 使得 $\omega = \eta + \partial f$.