《紧黎曼曲面》测验三　　2015.11.30

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于 12 月 7 日交给我.

1. 设 Σ 为紧黎曼曲面, ω 为 2− 形式. 利用 Hilbert 空间方法证明: $\int_\Sigma \omega = 0$ 当且仅当存在光滑函数 f, 使得 $\omega = d * df$.
2. 设 Σ 为连通紧黎曼曲面, 利用上题证明 $H^2_{dR}(\Sigma, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
3. 设 Σ 为紧黎曼曲面, p, q 为两个不同点. 利用 Riemann-Roch 定理证明: 存在亚纯微分 ω, 使得它只以 p, q 为极点, 且在 p 附近的奇性部分为 dz/z, 在 q 附近的奇性部分为 $-dw/w$, 其中 z, w 分别是以 p, q 为中心的局部坐标.
4. 设 ω 为黎曼球面上的亚纯微分. 证明: ω 的留数处处为零当且仅当 $\omega = df$, 其中 f 为亚纯函数.
5. 设 $0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$ 为有限维向量空间之间的正合序列, 证明 $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.
6. $\mathbb{C}$ 作为加群, 请对其离散子群进行分类.
7. 设 Σ 为紧黎曼曲面, $p_1, \cdots, p_n \in \Sigma$ 互不相同. 设 $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{S}$. 证明: 存在亚纯函数 $f : \Sigma \to \mathbb{S}$, 使得 $f(p_i) = q_i$, $i = 1, \cdots, n$.
8. 记 $\Sigma = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{C}P^2 \mid Z^2 = XY\}$, 说明 Σ 为紧黎曼曲面, 计算其亏格.