第十六章　含参变量的积分

本章仍然讨论积分, 其中被积函数含有额外的参数, 我们要研究积分是如何依赖于参数的. 这种积分的基本性质和无穷级数的性质十分类似, 它们也提供了构造新函数的重要工具, 我们还将利用它们进一步研究 Fourier 积分.

§16.1　含参变量的积分

设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数, 且对于每个固定的 $y\in[c,d]$, 关于 x 的函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则定义

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\quad y\in[c,d],$$

称为**含参变量的积分**, 其中 y 是参数, 它对应于数列或函数列中的变数 n.

当 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times[c,d]$ 中的连续函数时, 根据 §13.3 节中的讨论, 有

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx. \tag{16.1}$$

引理 16.1.1. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 中连续, 则 $I(y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 连续.

证明. 有界闭集中的连续函数是一致连续的. 因此, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $y_1,y_2\in[c,d]$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant\varepsilon,\quad\forall\ x\in[a,b].$$

此时

$$\begin{aligned}|I(y_1)-I(y_2)|&=\Big|\int_a^b[f(x,y_1)-f(x,y_2)]dx\Big|\\&\leqslant\int_a^b|f(x,y_1)-f(x,y_2)|dx\leqslant(b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 y 连续. □

定理 16.1.2. 设 $f(x,y)$ 和偏导数 $f_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 中连续, 则 $I(y)$ 关于 y 可导, 且

$$I'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx.$$

证明. 记

$$\psi(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx,\quad y\in[c,d].$$

根据题设和刚才的引理, $\psi(y)$ 关于 y 连续. 当 $y_1, y_2 \in [c,d]$ 时, 利用积分次序的可交换性, 得

$$\begin{aligned}\int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy = \int_{y_1}^{y_2}\int_a^b f_y(x,y)dxdy &= \int_a^b\int_{y_1}^{y_2} f_y(x,y)dydx \\ &= \int_a^b [f_y(x,y_2) - f(x,y_1)]dx \\ &= I(y_2) - I(y_1).\end{aligned}$$

这说明 $I'(y) = \psi(y)$. □

例 16.1.1. (*) 设 f 为具有紧支集的光滑函数, g 连续. 定义函数 h 为

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

则 h 为光滑函数, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy.$$

证明. 设 f 在区间 $(-M,M)$ 以外为零. 任取 $a>0$, 当 $x \in [-a,a]$ 时, $h(x)$ 可以表示为

$$h(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f(x-y)g(y)dy,$$

反复利用上述定理即知 $h(x)$ 在 $(-a,a)$ 中任意次可导, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f^{(n)}(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy,$$

由于 $a>0$ 是任取的, 故 h 在 $(-\infty,\infty)$ 中光滑. □

注. f 可以取为鼓包函数, 此时 h 可以看成函数 g 的光滑逼近.

例 16.1.2. 设 $0 < a \leqslant b$, 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx.$$

解. 我们把 a 看成是常数, 而把 b 看成是参数, 积分记为 $I(b)$, 则根据上述定理, 有

$$I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1},$$

这说明

$$I(b) = \ln(1+b) + C.$$

又因为 $I(a) = 0$, 故 $C = -\ln(1+a)$, 从而

$$I = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

这个积分也可以通过重积分化累次积分来计算. □

例 16.1.3. 设 $|\lambda|<1$, 计算积分

$$I=\int_0^\pi \ln(1+\lambda\cos x)dx.$$

解. 设 $0<a<1$, 当 $\lambda\in[-a,a]$ 时, $f(x,\lambda)=\ln(1+\lambda\cos x)$ 以及

$$f_\lambda(x,\lambda)=\frac{\cos x}{1+\lambda\cos x}$$

在 $[0,\pi]\times[-a,a]$ 上连续, 于是 $I=I(\lambda)$ 关于 λ 可微, 且

$$I'(\lambda)=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\lambda\cos x}dx=\frac{\pi}{\lambda}-\frac{\pi}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

对 λ 积分可得

$$I(\lambda)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\lambda^2})+C,$$

因为 $I(0)=0$, 故得

$$C=-\pi\ln 2,$$

因此

$$I=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}.$$

上式对任意 $|\lambda|<1$ 均成立. □

下面我们讨论积分的上下限中也含有参数的含参变量积分. 考虑积分

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx,$$

其中 $a(y)$, $b(y)$ 是关于 y 的函数.

定理 16.1.3. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数 $a(y)$, $b(y)$ 关于 y 连续, 且

$$a\leqslant a(y)\leqslant b,\quad a\leqslant b(y)\leqslant b,\quad \forall\ y\in[c,d],$$

则 $F(y)$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数.

证明. 任取 $y_0\in[c,d]$, 则当 $y\in[c,d]$ 时, 有

$$\begin{aligned}F(y)-F(y_0)&=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx\\&=\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}[f(x,y)-f(x,y_0)]dx.\end{aligned}$$

因为 f 连续, 故存在 $M>0$, 使得 $|f(x,y)|\leqslant M$. 由上式和已知条件得

$$\begin{aligned}|F(y)-F(y_0)|\leqslant{}& M|a(y)-a(y_0)|+M|b(y)-b(y_0)|\\&+\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)-f(x,y_0)||b-a|,\end{aligned}$$

由 $a(y), b(y)$ 以及 $f(x,y)$ 的 (一致) 连续性即知 $F(y)$ 在 $y=y_0$ 处连续. □

关于 $F(y)$ 的可微性, 我们有

定理 16.1.4. 设 $f(x,y)$ 以及 $f_y(x,y)$ 均在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 如果 $a(y)$, $b(y)$ 关于 y 可微, 则 $F(y)$ 关于 y 可微, 且

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)dx+f(b(y),y)b'(y)-f(a(y),y)a'(y).$$

证明. 证明留作练习. □

例 16.1.4. 设 $a\geqslant 0$, 计算积分

$$I(a)=\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx.$$

解. 利用上面的定理, 得

$$\begin{aligned}I'(a)&=\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}+\int_0^a\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx\\&=\frac{a}{1+a^2}\arctan a+\frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}.\end{aligned}$$

关于 a 积分, 得

$$I(a)=\frac{\ln(1+a^2)}{2}\arctan a+C.$$

因为 $I(0)=0$, 故 $C=0$. 最后就得到

$$I(a)=\frac{\ln(1+a^2)}{2}\arctan a.$$

习题 16.1

1. 计算下列积分

$$(1)\ \int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx;\quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx\quad (a\geqslant 0).$$

2. 计算下列积分

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}\quad (|a|<1);\quad (2)\ \int_0^1\sin\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad (b>a>0).$$

3. 设 $\alpha>1$, 计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\alpha^2-\sin^2 x)dx.$$

4. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则积分

$$I(\alpha,\beta,y)=\int_\alpha^\beta f(x,y)dx,\quad \alpha,\beta\in[a,b],\ y\in[c,d]$$

是关于 α, β, y 的连续函数, 且关于 α, β 可导.

5. 利用上题给出本节最后定理的证明.

6. 证明 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

7. 定义函数

$$K(x,y)=\begin{cases}y(1-x), & y\leqslant x,\\ x(1-y), & y>x.\end{cases}$$

如果 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则函数

$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

满足方程

$$-u''(x)=f(x),\quad u(0)=u(1)=0.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近连续, 则函数

$$u(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

满足方程

$$u^{(n)}(x)=f(x),\quad u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-1)}(0)=0.$$

9. 设 φ,ψ 分别为 2 次可微和 1 次可微的函数, 证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}.$$

§16.2 含参变量的广义积分

如同 Riemann 积分的推广一样, 含参变量的积分也有两方面的推广. 一是积分区间可以是无穷区间, 二是被积函数可能有瑕点. 为了简单起见, 我们以无穷积分为例进行讨论, 带有瑕点的含参变量的积分可类似地讨论.

§16.2.1 一致收敛及其判别法

设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $[a,\infty)\times[c,d]$ 中的函数, 且对于每一个 $y\in[c,d]$, 关于 x 的函数 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty)$ 中广义可积, 则定义

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)dx,\quad y\in[c,d], \tag{16.2}$$

称为**含参变量的广义积分**, 其中 y 是参数.

定义 16.2.1 (一致收敛). 如果任给 $\varepsilon>0$, 存在与 y 无关的 $A_0=A_0(\varepsilon)>a$, 当 A, $A'>A_0$ 时, 对一切 $y\in[c,d]$, 成立

$$\Big|\int_A^{A'} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon,\quad \text{或}\quad \Big|\int_A^{\infty} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon,$$

则称含参变量的广义积分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

定义中的区间 $[c,d]$ 也可以换成其它类型的区间. 对于带有瑕点的无界函数, 也有类似的一致收敛的概念. 例如, 设对于每一个 $y\in[c,d]$, 以 b 为瑕点的瑕积分 $\displaystyle\int_a^{b} f(x,y)dx$ 存在, 如果任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$, 当 $0<\eta,\eta'<\delta_0$ 时, 对 $[c,d]$ 上的一切 y, 成立

$$\Big|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon\ \text{ 或 }\ \Big|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon,$$

则称 $\displaystyle\int_a^{b} f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

例 16.2.1. 研究含参变量的广义积分

$$I(y)=\int_0^{\infty} ye^{-xy}dx$$

的一致收敛性.

显然, 对每个 $y\geqslant 0$, 积分都是收敛的. 又因为

$$\int_A^{\infty} ye^{-xy}dx=e^{-yA},$$

故 $I(y)$ 对于 $y\in[\delta,\infty)$ 一致收敛, 其中 δ 为任意正实数. 从上式也可以看出 $I(y)$ 对于 $y\in[0,\infty)$ 并不是一致收敛的. □

和广义积分以及无穷级数一样, 我们也有关于含参变量广义积分的一致收敛的判别法.

(1) (Weierstrass) 如果存在函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x,y)|\leqslant F(x),\quad \forall\ (x,y)\in[a,\infty)\times[c,d],$$

且积分 $\displaystyle\int_a^\infty F(x)dx$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛. 这个判别法的证明只要注意到下面的不等式就可以了:

$$\Big|\int_A^{A'} f(x,y)dx\Big|\leqslant\Big|\int_A^{A'} F(x)dx\Big|.$$

(2) (Dirichlet) 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 满足下列条件:

(i) 当 $A\to\infty$ 时, 积分 $\displaystyle\int_a^A f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致有界, 即存在常数 K, 使得

$$\Big|\int_a^A f(x,y)dx\Big|\leqslant K,\quad \forall\ A\in[a,\infty),\ y\in[c,d];$$

(ii) $g(x,y)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x\to\infty$ 时 $g(x,y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致地趋于零, 即任给 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0=A_0(\varepsilon)$, 当 $x\geqslant A_0$ 时

$$|g(x,y)|<\varepsilon,\quad \forall\ y\in[c,d];$$

则含参变量的广义积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

这个判别法的证明是这样的: 根据题设, 当 $A,A'\geqslant a$ 时, 有

$$\Big|\int_A^{A'} f(x,y)dx\Big|\leqslant\Big|\int_a^{A} f(x,y)dx\Big|+\Big|\int_a^{A'} f(x,y)dx\Big|\leqslant 2K.$$

根据积分第二中值公式, 当 $A,A'>A_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Big|\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx\Big|&\leqslant|g(A,y)|\Big|\int_A^{\xi(y)} f(x,y)dx\Big|+|g(A',y)|\Big|\int_{\xi(y)}^{A'} f(x,y)dx\Big|\\&\leqslant 2K\varepsilon+2K\varepsilon=4K\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明了积分的一致收敛性.

(3) (Abel) 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 满足下列条件:

(i) 积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛;

(ii) $g(x,y)$ 是 x 的单调函数, 且关于 $y \in [c,d]$ 一致有界;

则含参变量的广义积分 $\int_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

这个判别法的证明仍然是运用积分第二中值公式, 我们留给读者完成.

对于含参变量的瑕积分, 上述判别法也有类似的表现形式. 我们以下仅举例来研究一致收敛性.

例 16.2.2. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$$

关于 $\alpha \in (0,\infty)$ 的一致收敛性.

当 $\alpha \geqslant \delta > 0$ 时, 因为

$$|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\delta x},$$

而积分 $\int_0^{\infty} e^{-\delta x} dx$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知积分 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [\delta,\infty)$ 一致收敛.

$I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in (0,\infty)$ 不是一致收敛的, 这是因为当 $\alpha \to 0$ 时,

$$\int_A^{A'} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \to \int_A^{A'} \sin x \, dx = \cos A - \cos A',$$

取 $A = 2n\pi$, $A' = 2n\pi + \pi/2$ 即知上式不趋于零. □

例 16.2.3. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$$

关于 $\alpha \in [0,\infty)$ 的一致收敛性.

因为积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 这个积分不含参变量 α, 因而关于 α 一致收敛. 函数 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调, 且当 $\alpha, x \geqslant 0$ 时 $0 \leqslant e^{-\alpha x} \leqslant 1$, 故由 Abel 判别法知 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [0,\infty)$ 一致收敛. □

§16.2.2 一致收敛积分的性质

我们在本小节讨论含参变量的广义积分所确定的函数的连续性质, 积分性质和微分性质等.

引理 16.2.1 (连续性质)**.** 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty) \times [c,d]$ 中连续, (16.2) 式中的含参变量积分 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 则 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 连续.

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得

$$\Big|\int_A^{\infty} f(x,y)dx\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ y \in [c,d].$$

注意到 $f(x,y)$ 在 $[a,A]\times[c,d]$ 中一致连续, 因此存在 $\delta > 0$, 当 $y_1, y_2 \in [c,d]$ 且 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{A-a}, \quad \forall\ x \in [a,b].$$

此时

$$\begin{aligned}
|I(y_1) - I(y_2)| &= \Big|\int_a^{\infty} f(x,y_1)dx - \int_a^{\infty} f(x,y_2)dx\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_A^{\infty} f(x,y_1)dx\Big| + \Big|\int_A^{\infty} f(x,y_2)dx\Big| \\
&\int_a^A |f(x,y_1) - f(x,y_2)|dx \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + (A-a)\frac{\varepsilon}{A-a} = 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 y 连续. □

定理 16.2.2 (积分性质之一). 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty)\times[c,d]$ 中连续, (16.2) 式中的含参变量积分 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 则

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx.$$

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > 0$, 当 $A > A_0$ 时

$$\Big|\int_A^{\infty} f(x,y)dx\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ y \in [c,d].$$

此时, 有

$$\begin{aligned}
\Big|\int_c^d I(y)dy - \int_a^A \int_c^d f(x,y)dydx\Big| &= \Big|\int_c^d I(y)dy - \int_c^d \int_a^A f(x,y)dxdy\Big| \\
&= \Big|\int_c^d \int_A^{\infty} f(x,y)dxdy\Big| \\
&\leqslant (d-c)\varepsilon,
\end{aligned}$$

根据广义积分的定义可知欲证等式成立. □

例 16.2.4. 设 $\alpha, \beta > 0$, 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} dx.$$

解. 由于积分 $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}dx$ 关于 $y \in [\delta, \infty)$ $(\delta > 0)$ 一致收敛, 利用积分次序的可交换性得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}dx &= \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_\alpha^\beta \sin(yx)dy \\ &= \int_\alpha^\beta dy \int_0^\infty \frac{\sin(yx)}{x}dx \\ &= \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

其中, 当 $y > 0$ 时, 我们用到了积分 $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. □

定理 16.2.3 (微分性质)**.** 设 $f(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $[a,\infty) \times [c,d]$ 中连续, 如果积分 $\psi(y) = \int_a^\infty f_y(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 且存在 $y_0 \in [c,d]$, 使得积分 $\int_a^\infty f(x,y_0)dx$ 收敛, 则积分 $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 且

$$I'(y) = \psi(y) = \int_a^\infty f_y(x,y)dx.$$

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > 0$, 当 $A, A' \geqslant A_0$ 时,

$$\Big|\int_A^{A'} f(x,y_0)dx\Big| \leqslant \varepsilon; \quad \Big|\int_A^{A'} f_y(x,y)dx\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ y \in [c,d].$$

此时, 任给 $y_1 \in [c,d]$, 有

$$\begin{aligned}\Big|\int_A^{A'} f(x,y_1)dx\Big| &\leqslant \Big|\int_A^{A'} f(x,y_0)dx\Big| + \Big|\int_A^{A'} [f(x,y_1) - f(x,y_0)]dx\Big| \\ &= \Big|\int_A^{A'} f(x,y_0)dx\Big| + \Big|\int_A^{A'}\int_{y_0}^{y_1} f_y(x,y)dydx\Big| \\ &= \Big|\int_A^{A'} f(x,y_0)dx\Big| + \Big|\int_{y_0}^{y_1}\int_A^{A'} f_y(x,y)dxdy\Big| \\ &\leqslant \varepsilon + |y_1 - y_0|\varepsilon \leqslant \varepsilon + (d-c)\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. 当 $y_1, y_2 \in [c,d]$ 时, 由定理 16.2.2 和题设可得

$$\begin{aligned}\int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy &= \int_a^\infty \int_{y_1}^{y_2} f_y(x,y)dydx \\ &= \int_a^\infty [f(x,y_2) - f(x,y_1)]dx \\ &= I(y_2) - I(y_1).\end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 可导, 且 $I'(y) = \psi(y)$. □

例 16.2.5. 计算积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \quad (\alpha \geqslant 0).$$

解. 在前面的例子中已经说明了 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [0, \infty)$ 一致收敛. 任给 $\delta > 0$, 积分

$$\int_0^\infty \big(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\big)_\alpha dx = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx$$

关于 $\alpha \in [\delta, \infty)$ 一致收敛, 于是 $I(\alpha)$ 在 $[\delta, \infty)$ 中可导, 且

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

由于 δ 的任意性, 上式对任意 $\alpha > 0$ 成立. 从中解出

$$I(\alpha) = C - \arctan\alpha.$$

当 $\alpha > 0$ 时

$$|I(\alpha)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} \to 0 \quad (\alpha \to \infty),$$

于是 $C = \pi/2$, 从而得到 $I(\alpha) = \pi/2 - \arctan\alpha$. 令 $\alpha \to 0$ 还可得 $I(0) = \pi/2$. □

最后, 我们考虑无穷区间上广义积分可交换次序的问题.

定理 16.2.4 (积分性质之二)**.** *设 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty) \times [c, \infty)$ 中连续. 如果 f 满足下列条件:*

(i) 积分 $\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ 关于 y 在 (c, ∞) 内的任何闭区间中一致收敛, 积分 $\psi(x) = \int_c^\infty f(x, y)dy$ 关于 x 在 (a, ∞) 内的任何闭区间上一致收敛;

(ii) 积分 $\int_c^\infty dy\int_a^\infty |f(x, y)|dx$ 和 $\int_a^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy$ 至少有一个收敛.

则 $\varphi(y)$ 在 (c, ∞) 中积分收敛, $\psi(x)$ 在 (a, ∞) 中积分收敛, 且这两个积分相等:

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy.$$

证明. 不妨设积分 $\int_c^\infty dy\int_a^\infty |f(x, y)|dx$ 收敛. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $c' > c$, $C > c'$, 使得

$$\int_c^{c'}\int_a^\infty |f(x, y)|dxdy + \int_C^\infty\int_a^\infty |f(x, y)|dxdy \leqslant \varepsilon.$$

根据题设, 存在 $A_0 > a$, 当 $A \geqslant A_0$ 时

$$\Big|\int_A^\infty f(x, y)dx\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{C - c'}, \quad \forall\ y \in [c', C].$$

再取 $a_0 \in (a, A_0)$, 使得

$$\int_{c'}^{C}\int_{a}^{a_0}|f(x,y)|dxdy \leqslant \varepsilon.$$

根据题设和引理 16.2.1 可知 $\varphi(y)$ 在 (c,∞) 中连续, $\psi(x)$ 在 (a,∞) 中连续. 由 $|\varphi(y)| \leqslant \displaystyle\int_a^{\infty}|f(x,y)|dx$ 和 Weierstrass 判别法可知积分 $\displaystyle\int_c^{\infty}\varphi(y)dy$ 收敛. 当 $b \in (a, a_0)$, $A \geqslant A_0$ 时, 根据题设和定理 16.2.2 可得

$$\begin{aligned}
\Big|\int_b^A \psi(x)dx - \int_c^{\infty}\varphi(y)dy\Big| &= \Big|\int_c^{\infty}\int_b^A f(x,y)dxdy - \int_c^{\infty}\varphi(y)dy\Big| \\
&= \Big|\int_c^{\infty}\Big[\int_a^b f(x,y)dx + \int_A^{\infty} f(x,y)dx\Big]dy\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_{c'}^{C}\Big[\int_a^b f(x,y)dx + \int_A^{\infty} f(x,y)dx\Big]dy\Big| \\
&\quad + \int_c^{c'}\int_a^{\infty}|f(x,y)|dxdy + \int_C^{\infty}\int_a^{\infty}|f(x,y)|dxdy \\
&\leqslant \int_{c'}^{C}\int_a^{a_0}|f(x,y)|dxdy + (C-c')\frac{\varepsilon}{C-c'} + \varepsilon \\
&\leqslant 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

这说明 $\displaystyle\int_a^{\infty}\psi(x)dx = \int_c^{\infty}\varphi(y)dy$. □

例 16.2.6. 计算光学中常出现的 Fresnel 积分:

$$I = \int_0^{\infty}\sin(x^2)dx, \quad J = \int_0^{\infty}\cos(x^2)dx.$$

解. 令 $x^2 = t$ 得

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

先算第一个积分. 当 $\alpha > 0$ 时, 可验证 $f(t,u) = e^{-\alpha t}\sin t\, e^{-tu^2}$ 满足定理 16.2.4 的条件. 于是利用等式

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin t\, e^{-tu^2}du,$$

可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-\alpha t}dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\sin t\,dt\int_0^{\infty}e^{-tu^2}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}.
\end{aligned}$$

因为积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt, \quad \int_0^\infty \frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}$$

关于 α 都在 $[0,\infty)$ 中一致收敛, 故可令 $\alpha \to 0^+$, 得

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

对于积分 J, 设 $\alpha > 0$, 同理有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos t\, dt \int_0^\infty e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(\alpha+u^2)t} \cos t\, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\alpha+u^2}{1+(\alpha+u^2)^2} du.\end{aligned}$$

令 $\alpha \to 0^+$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

对于非负连续函数, 下面的结果较为有用.

引理 16.2.5. 设 $f(x,y)$ 为 $(x,y) \in [a,\infty) \times [c,d]$ 中的非负连续函数, 如果积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y) dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 连续, 则 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

证明. 当 $n > a$ 时, 记

$$I_n(y) = \int_a^n f(x,y) dx, \quad y \in [c,d].$$

由引理 16.1.1 可知 $I_n(y)$ 关于 y 连续. 由题设可知 $\{I_n(y)\}$ 关于 n 单调递增地趋于 $I(y)$. 根据 Dini 定理, 函数列 $\{I_n(y)\}$ 一致收敛于 $I(y)$. 因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > a$, 当 $n \geqslant N$ 时

$$0 \leqslant I(y) - I_n(y) = \int_n^\infty f(x,y) dx \leqslant \varepsilon,$$

由此易见 $I(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. $\square$

定理 16.2.6 (积分性质之三). 设 $f(x,y)$ 为 $(x,y)\in[a,\infty)\times[c,\infty)$ 中的非负连续函数, 如果

(i) 函数

$$\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx,\quad \psi(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy$$

分别在 $y\in(c,\infty)$ 和 $x\in(a,\infty)$ 中连续;

(ii) 积分

$$\int_c^\infty \varphi(y)dy,\quad \int_a^\infty \psi(x)dx$$

有一个收敛. 则另一个也收敛, 且二者相等, 即

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy=\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx.$$

证明. 由条件 (i) 和前一引理可知积分 $\varphi(y)$ 和 $\psi(x)$ 分别在闭区间中一致收敛. 再由定理 16.2.4 即得欲证结论. □

例 16.2.7. 计算积分 $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

解. 令 $x=ut$ $(u>0)$, 得

$$I=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt,$$

上式两端同时乘以 e^{-u^2}, 再对 u 积分得

$$I^2=\int_0^\infty Je^{-u^2}du=\int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

交换积分次序, 得

$$I^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},$$

因此 $I=\sqrt{\pi}/2$. □

例 16.2.8. 计算积分

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx.$$

解. 将 α 视为参数, 因为 $f(x,\alpha)=e^{-x^2}\cos 2\alpha x$ 关于 x,α 连续可微, 且

$$|f_\alpha(x,\alpha)|=|e^{-x^2}2x\sin 2\alpha x|\leqslant 2xe^{-x^2},$$

根据 Weierstrass 判别法知积分 $\int_0^\infty f_\alpha(x,\alpha)\,dx$ 关于 α 一致收敛. 显然, $I(\alpha)$ 关于 α 也一致收敛. 由定理 16.2.3 得

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty -e^{-x^2}2x\sin 2\alpha x\,dx,$$

对上式右端使用分部积分可得

$$I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha),$$

解得

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2},$$

因为 $I(0) = \sqrt{\pi}/2$, 故有 $I(\alpha) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2}$. □

习题 16.2

1. 给出含参变量的广义积分的 Abel 判别法的详细证明.
2. 如果广义积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛, $g(x,y)$ 关于 x 单调, 且关于 $y \in [c,d]$ 一致有界, 则积分
$$\int_a^\infty f(x)g(x,y)dx$$
关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.
3. 研究下列积分的一致收敛性:
(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx,\ \ y \in (-\infty,\infty)$;
(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx,\ \ y \in (0,\infty)$;
(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{x(\alpha+x)}dx,\ \ \alpha \in (0,\infty)$;
(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha^2+x^2}dx,\ \ \alpha \in (0,\infty)$;
4. 研究含参变量的积分
$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)d\varphi$$
关于 $\alpha \in [1,\infty)$ 的一致收敛性.
5. 从已知积分 $(a>0)$
$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{a}},\quad \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},$$
通过对参数求导计算下列积分:
$$(1)\ \int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx,\quad (2)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}},\quad (3)\ \int_0^1 x^{a-1}\ln^n x dx.$$
6. 计算下列积分 $(a,b>0)$:
$$(1)\int_0^\infty xe^{-ax^2}\sin bx\,dx,\ (2)\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\ (3)\int_0^\infty \frac{(e^{-ax}-e^{-bx})^2}{x^2}dx.$$

7. 计算下列积分 $(a,b>0)$:

$$(1)\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx,\quad (2)\int_0^{\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}dx,\quad (3)\int_0^{\infty}e^{-ay^2-by^{-2}}dy.$$

8. 利用等式 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=(\alpha^2+x^2)^{-1}$ 计算 Laplace 积分:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx,\quad J=\int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx.$$

9. 计算下列积分 $(a,b>0)$:

$$(1)\ \int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx,\quad (2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\cos 2ax dx.$$

§16.3 特殊函数

本节考虑互相之间有密切联系的两个含参变量积分, 它们的定义为

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ \ (p,q>0),\quad \Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\ \ (s>0).\quad (16.3)$$

函数 $B(p,q)$ 称为 Beta 函数, $\Gamma(s)$ 称为 Gamma 函数, 统称 Euler 积分.

§16.3.1 Beta 函数的基本性质

$B(p,q)$ 的定义中, 0 和 1 是可能的瑕点, 易见, 当 $p>0$, $q>0$ 时积分收敛, 因此 $B(p,q)$ 的定义是确切的. 进一步有

(1) (连续性) 当 $\delta,\eta>0$, $p\geqslant\delta$, $q\geqslant\eta$ 时,

$$0\leqslant x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{\delta-1}(1-x)^{\eta-1},$$

上式最右边的函数积分收敛, 因此 $B(p,q)$ 关于 $(p,q)\in[\delta,\infty)\times[\eta,\infty)$ 一致收敛, 这说明 $B(p,q)$ 在其定义域内连续. 同理, 可以说明 $B(p,q)$ 在定义域内无限次可微.

(2) (对称性) 作变量替换 $x=1-t$, 容易看到

$$B(p,q)=B(q,p),\quad \forall\ p>0,\ q>0.$$