南京大学数学系试卷

2005 / 2006 学年 第 2 学期　课程名称 数学分析　考试形式 闭卷

院系 数学系　年级 2005级　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　得分＿＿＿＿

说明：

1. **请将姓名、学号写清楚。**
2. **本试卷前四道大题共** 100 **分；最后一题为附加题。考试时间共** 120 **分钟。**

装……订……线

一、 叙述题（20分）

1. 设 $f: R^n \to R^m$ 为多元向量值函数，$x_0 \in R^n$. 叙述 f 在 x_0 可微的定义.（10分）

2. 叙述正项级数 Cauchy 判别法(也叫根值判别法)的条件及结论, 并举一个不能用 Cauchy 判别法判别收敛性的例子.（10分）

二、 判断题（20分）判断如下级数的敛散性并说明理由:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$.（5分）

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.（5分）

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.（5 分）

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{(-1)^n}{2n}]$.（5 分）

三、 计算题（20 分）

1. 方程 $x^2+2y^2+3z^3+2xy-z=7$ 在 $(1,-2,1)$ 附近决定了隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-2)$ 的值.（10 分）

2. 求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ 在约束条件 $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=12$ 下的极值.（10 分）

四、 证明题（40分）

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n$ 收敛. 证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. (提示: Abel 判别法.)（10分）

2. 设 $\lambda \in (0,1)$为固定的实数, $f : R^n \to R$ 为可微的多元函数, 且 $\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j})^2 \leq \lambda$. 证明

(i) $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\lambda}\|x - y\|, \ \forall\, x, y \in R^n$; (ii) 当 $n = 1$时, 存在惟一的 $x \in R$, 使得 $f(x) = x$.（10分）

3. 设 $\alpha > 1,\ a_n > 0$, 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ n = 1, 2, \cdots$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 总是收敛的. (提示: 可用积分判别法的思想.)（10分）

4. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实正定对称方阵，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 考虑 R^n 上的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^n b_ix_i$. 证明

(i) f 在 R^n 上有惟一的最小值点;　(ii) f 的最小值为 $-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}b_ib_j$, 这里 a^{ij} 是 A 的逆矩阵在 ij 位置的元素.（10 分）

五、 附加题（10 分）设 $f:R^n\to R^n$ 为可微的一一映射，f 的 Jacobi 矩阵非退化，并且 f 的逆映射 f^{-1} 连续. 证明，f^{-1} 也是可微的.