# 南 京 大 学 数 学 系 试 卷



2005 / 2006 学年第 二 学期　课程名称 数学分析

试卷类型 A 卷　考试形式 闭卷　使用班级 2005 级

命题人 张高飞, 梅加强　考试时间 2006 年 4 月 14 日

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 | 阅卷人 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | | |

班级________ 学号________ 姓名________

装 …… 订 …… 线

**说明:**

1. **请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。**
2. **本试卷共** 4 **道大题, 含** 13 **道小题, 满分** 100 **分, 考试时间** 120 **分钟。**

一、 判断题（20分）判断如下结论是否正确:

1. 设 $f$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数, 若对 $\forall\epsilon>0$, 都存在一个分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\cdot\Delta x_i<\epsilon,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\omega_i$ 为 $[x_i,x_{i+1}]$ 上 $f$ 的振幅. 那么 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.（5分）

2. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积. 那么对 $\forall\alpha>1$, $|f|^\alpha$ 在 $[a,b]$ 上也可积.（5分）

3. 设 $f$ 是定义在 $R^2$ 上的二元函数. 若 $f_x$, $f_y$ 在每一点处都存在, 则 $f$ 在 $R^2$ 上连续.（5分）

4. 设 $f$ 在 $R^2$ 上可微, 则 $f_x$, $f_y$ 在每一点处都存在且连续.（5分）

二、 叙述题（15分）

1. 叙述定积分的定义.（5分）

2. 叙述第一积分中值定理的条件及结论.（5分）

3. 设 $f : R^2 \to R^2$ 为二元向量值函数. 用邻域的语言叙述 $f$ 在 $(x_0, y_0)$ 的连续性.（5分）

三、 计算题（15分）

1. 计算曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ $(x \in [0,1])$ 的长度.（5分）

2. 记 $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, 求 $I_n$ 的递推公式, 并计算 $I_4$.（10分）

四、 证明题（50分）

1. 证明 $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 存在, 其中 $\alpha>0$ 为某一常数.（10分）

2. (i) 设 $f$ 为 $[0,1]$ 上 Riemann 可积函数, $g$ 为 $R$ 上的周期函数, 周期为 1, 且 $g$ 在 $[0,1]$ 上也可积. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cdot g(nx)dx = (\int_0^1 f(x)dx)\cdot(\int_0^1 g(x)dx).$$

(ii) 设 $f\in C^1[0,2\pi]$. 证明

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = o(\frac{1}{n}).$$

（15分）

3. 定义 $f: R^2 \to R$ 如下

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明 $f$ 在 $(0,0)$ 处连续.（10分）

4. 设 $f: R^2 \to R$ 为连续函数. 证明, $f$ 不是单射. 即, 存在两个不同的点 $p, q$ 使得 $f(p)=f(q)$.（15分）