南京大学数学系试卷

2006 / 2007 学年 第 二 学期		课程名称	数学分析
试卷类型 A 卷	考试形式 闭卷	使用班级	2006 级
命题人 梅加强		考试时间	2007 年 5 月 12 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

装……订……线

说明：

1. **请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。**
2. **本试卷共六道大题, 其中前五题为必做题, 第六题为选做题, 考试时间** 120 **分钟。**

一、 叙述题（18分）

1. 写出一元函数 Taylor 展开式的 Lagrange 余项的表达式.（6 分)

2. 叙述数项级数的 Cauchy 判别法 (也叫根值判别法) 的条件和结论.（6 分)

3. 叙述函数项级数一致收敛的定义.（6 分)

二、 判断题 I: 判断如下结论是否正确.（12 分)

1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛, 如果 $g(x)$ 为有界函数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ 也一致收敛.

3. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 是某个 Riemann 可积函数的 Fourier 展开.

三、 判断题 II: 判断下列数项级数或函数项级数是收敛还是发散的. (12 分)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$;

(2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log \log n)^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + (-1)^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2) x^n$, $x \in [-1,1]$, 并判断一致收敛性.

四、 计算题 (28 分)

1. 求函数 $\sin(x^2)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开, 并说明其收敛性. (7 分)

2. 计算曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ $(x \in [0,1])$ 的长度. (7 分)

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ 的收敛半径, 并讨论在收敛区间端点的收敛性. (7 分)

4. 设周期为 2π 的偶函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上定义为 $f(x)=x\sin x$, 求 $f(x)$ 的 Fourier 展开, 并利用它求 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}$ 之和. (7 分)

五、 证明题 (30 分)

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)f(b)<0$. 证明

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |f'(x)|. \qquad (\text{ 10 分})$$

2. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和的绝对值均不超过 M, 用 Abel 变换证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 的部分和的绝对值也不超过 M. (10 分)

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可微, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)[\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx]\,dx=\frac{\pi}{2}f(0).\qquad (\text{ 10 分})$$

六、 附加题 (20 分)

1. 研究下面的两个结论是否正确, 如正确请加以证明, 如不正确请举反例. (10 分)

(1) 设 $a_n\le b_n\le c_n\ (n\ge 1)$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛.

(2) 设 $f_n(x)\ (n\ge 1)$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数, 且 $\{f_n\}$ 一致收敛到 f, 则 f 也可微.

2. 如果 f 为 $[0,a]\ (a\le\pi)$ 上的连续函数, 且

$$\int_0^a f(x)\cos nx\,dx=0,\ \ \forall\, n\ge 1.$$

证明 f 为常值函数. (10 分)