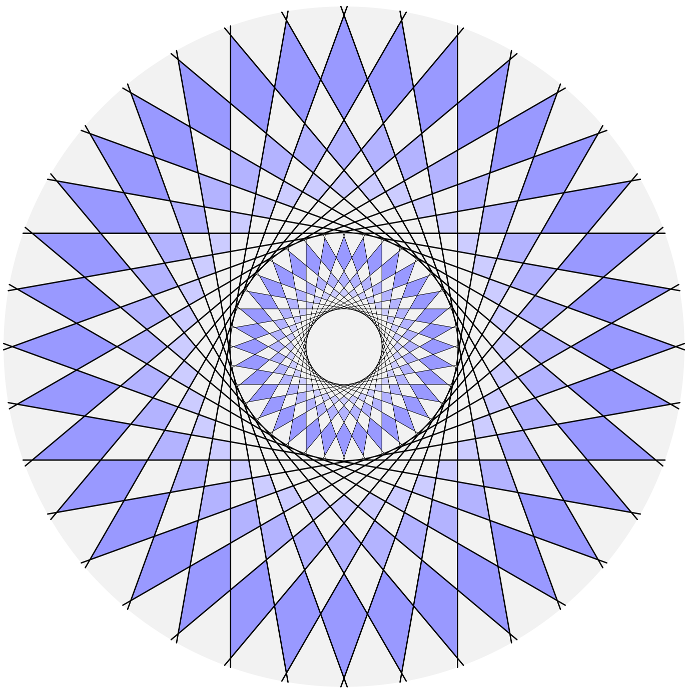
数学分析讲义

梅加强　编著



无厚，不可积也，其大千里。

— 惠施，公元前四世纪。

前言

数学分析的核心内容是微积分。微积分的发展大体上经过了三个阶段。牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）在继承公元 15–16 世纪以来许多杰出数学家的成果的基础上，将微积分发展成了一门独立的学问，微积分被用来解决天文、力学、工程等方面的大量实际问题。19 世纪初，由于科学技术进步的推动，为微积分建立牢固基础的要求十分迫切。经过近二百年的努力，到 19 世纪五六十年代，柯西（Cauchy）, 黎曼（Riemann）和魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等建立了严格的极限理论，并用极限的语言严格地证明了微积分的所有定义和定理，为微积分的普及创立了更加有利的条件。到 20 世纪初，格拉斯曼（Grassmann），庞加莱（Poincaré）和嘉当（Cartan）等人又发展了外微分形式的语言，并利用外微分形式的语言把微分和积分这一对矛盾统一在斯托克斯（Stokes）积分公式中，这就使得牛顿和莱布尼兹的微积分基本公式达到了一个统一的新高度，以后的发展就属于近代数学的范畴了。

本书在内容的编排上试图展现微积分发展各阶段的重要成果，并适当地采用现代数学的思想方法和观点处理经典的分析问题。下面对本书主要内容作一简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程，我们只着重于介绍和传统教材有较大差别的地方。

在第一章中我们介绍了集合与映射的一些基本概念。这一章虽然是复习性质的，但我们还是引入了确界和可数这两个重要概念。我们把确界原理作为一元分析的基础，在第二章关于数列极限的论述中这一点显得特别突出。实数的构造以及实数系的基本性质对于一元分析来说是非常重要的，但为了减轻负担，我们将实数构造的理论放在第一章附录中了。

第三章研究连续函数。和传统教材不同的是，我们在这里就已经介绍了连续函数的积分了。这样，在第四章中，我们就很快得到了微积分的基本定理 —Newton-Leibniz 公式，从而不定积分的内容就显得较为自然。微分中值定理和 Taylor 展开是一元微分学发展的一个高峰，我们在第五章中介绍这部分内容。

第六章和第七章是一元函数积分的内容。Riemann 积分是一元分析的一个难点。由于前面已经有连续函数的积分，Riemann 积分的理解难度有所降低。为了透彻地理解 Riemann 积分，我们还引入了零测集的概念，利用它刻画了可积函数。

第八、九和第十章是关于无穷级数理论的，这是分析学的经典内容。其中，关于数项级数，我们突出了 Kummer 判别法的作用，由此简化了众多收敛发散判别法的叙述。我们在这几章的最后一节中讨论了一些进一步的内容，如级数用于近似计算，Euler-Maclaurin 公式以及 Stirling 公式的渐近展开，Fourier 级数的平均收敛和一致收敛性，以及对于等分布问题和等周问题的应用等。对于 Fourier 级数中重

要的 Parseval 等式，我们所用的证明方法和传统的教材也有所不同。

第十一章是承前继后的一章。我们将实数的基本性质提炼出来，引入了内积空间和度量空间的概念，并通过完备性，紧致性和连通性等刻画了连续映射的基本性质。与度量空间有关的内容十分丰富，我们在这里只挑选了最必需的若干概念和定理，一方面将一元分析中所获得的概念做了一些提升，另一方面为多元分析准备扎实的基础。当然，在课时有限的情况下也可将所有的论述局限于欧氏空间。

第十二章是多元函数的微分学。这一章对于线性代数的要求较高，读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因，是因为微分学的基本手法无非是作线性化，线性代数的语言很自然地要用上。比如，在这一章里，无论是拟微分中值定理，还是逆映射定理，隐映射定理，甚至是 Lagrange 乘数法，它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的，其中 Jacobian 矩阵起了突出的作用。

第十三章是多元函数的 Riemann 积分。和一元函数一样，我们也是用零测集刻画可积函数乃至可求面积（体积）集的。除了强调计算以外，我们还给出了多重积分变量代换公式的完整证明，这个证明通常是被省略的。我们的证明和其它一些教材上的也不相同。

第十四章是曲线曲面上的积分。我们实际上统一处理了欧氏空间中正则子流形上的积分。关于 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式，我们没有采用分割积分区域为较简单区域的传统办法，而宁愿使用区域变换的观点讨论问题。这一章的附录中介绍了重要的 Riemann-Stieltjes 积分，它们是在考虑可求长曲线时自然出现的。作为应用，通过考虑 Riemann-Stieltjes 积分我们还得到了 Riemann 积分的中值公式，分部积分公式和变量替换公式的最一般情形。

第十五章部分地反映了微积分发展的第三阶段的成果，我们引入了微分形式，外微分运算，并给出了整体曲面的定义，讨论了曲面的定向，最后统一了 Green 公式，Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式。

第十六章讨论含参变量的积分。其中，关于 Gamma 函数的 Stirling 公式的证明，我们提供了两个办法，它们和传统教材上的处理方法也不太一样。最后，我们还讨论了 Fourier 变换的乘积公式，反演公式和 Plancherel 公式，并讨论了 Fourier 分析的几个重要应用。

本书作为讲义的形式曾在南京大学数学系多次试用，在试用过程中，程健、胡泽春、尤建功和张高飞等诸位老师都贡献了宝贵的意见和建议；扬州大学徐海峰博士也仔细校订了本书前五章初稿，作者在此一并致谢。

总体而言，本书的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论和应用，在定理的证明方面我们着重自然和简洁。限于作者的水平，如有处理得不恰当的地方还请专家予以批评指正。

目　录

第一章　集合与映射

本章主要是复习一下若干基本概念, 它们在中学课程中已经或多或少出现过. 两个重要的新概念, 即确界和可数集也在这里引入. 同时, 我们再介绍一些在后面章节中要反复用到的术语.

§1.1　集合及其基本运算

数学是人类在生产实践中逐渐总结提炼出来的一门学问, 它是研究数量关系和空间形式的一门科学. 集合是数学家对于各种客观事务进行抽象化以后所形成的一个本原概念, 本原的意思是我们无法用更基本的概念来给集合下一个定义. 我们可以这样来描述集合: **集合**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 这些对象称为该集合的**元素**, 有时元素也称为集合中的点. 通常用小写字母表示集合中的元素, 用大写字母表示集合. 因此, 如果 A 是一个集合, 我们就用 $x \in A$ 来表示 x 是 A 的某个元素, 念作 “x 属于 A”.

例 1.1.1. *整数的全体是一个集合, 通常记为 $\mathbb{Z}$, 它可以表示为*

$$\mathbb{Z} = \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ \cdots,\ -n,\ n,\ \cdots\}.$$

如同这个例子一样, 集合可以通过列举其所有元素来表示, 我们也可以这样表示集合: 设 A 是由具有某种性质 P 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \,|\, x \text{ 具有性质 } P\}.$$

生活当中有许多集合的例子. 例如班上男生的全体是一个集合, 女生全体也是一个集合. 有一个特殊的集合, 它不含任何元素, 我们称为空集, 通常用 $\varnothing$ 表示. 例如, 班上年龄不小于 20 岁的所有同学构成一个集合, 如果同学们的年龄都小于 20 岁, 那这就是一个空集.

设 A, B 均为集合. 如果 A 中的元素也都是 B 中的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A \subset B$. 子集 A 有可能和 B 相同, 如果不相同, 即 B 中存在某元素 x, 但 x 不在 A 中 (记为 $x \notin A$), 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subsetneq B$.

非负整数的全体常记为 $\mathbb{Z}^+$, 正整数的全体常记为 $\mathbb{N}$, 它们都是 $\mathbb{Z}$ 的子集.

例 1.1.2. *设 A 为集合. 显然, 空集 $\varnothing$ 和 A 本身都是 A 的子集. 如果 A 是 B 的子集, B 也是 A 的子集, 则 $A = B$.*

我们现在对于集合的元素, 集合以及子集之间的关系作一些说明. 首先要区分集合和它的元素. 例如, 我们举了 “男生的全体” 这个集合作为例子, 不过, 在日常

语言中, 我们通常将这个集合简称为 “男生”. 我们说某某是男生指的就是某某属于 “男生” 这个集合. 在中国古代曾有所谓 “白马非马” 的悖论, 用集合的观点来看, 之所以会出现这个悖论是因为人们未能厘清集合和它的元素之间的关系的缘故 (“马” 指的是所有的马组成的集合, 而某匹白马是这个集合中的元素). 其次, 满足特定条件的一些子集仍然能构成新的集合, 这就出现了所谓集合的集合的概念.

例 1.1.3. 设 A 为集合, A 的所有子集也构成了一个集合, 记为 2^A:

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}.$$

不难证明, 如果 A 有 n 个元素, 则 2^A 有 2^n 个元素. 即 A 一共有 2^n 个子集.

在上例中, 一个集合的所有子集构成了一个新的集合. 那么下面的问题看来是自然的: “所有” 的集合放在一起是否也构成了一个集合? 如果说这是一个集合, 比如记为 X, 则由于 X 本身也是一个集合, 按定义应该有 $X \in X$, 即 X 是它自己的一个元素. 这一现象在集合的范畴内无法解释, 我们在本课程中也不需要讨论它 (在范畴论中, 集合的集合是一个所谓的类).

下面我们讨论集合之间的基本运算. 设 A, B 为集合, 由 A 中所有元素和 B 中所有元素所组成的集合称为 A 和 B 的**并集**, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 中公共元素组成的集合称为 A 和 B 的**交集**, 记为 $A \cap B$, 即

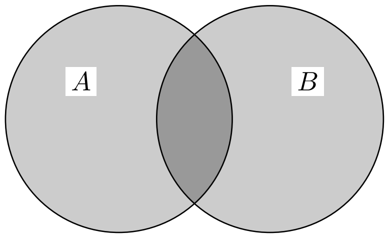


图 1.1 集合的运算

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例 1.1.4. 当 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4,\ 5,\ 6\}$ 时,

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \quad A \cap B = \varnothing;$$

当 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 时,

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \quad A \cap B = \{3\}.$$

集合之间的并和交运算具有下面的性质, 这些性质的证明是直接的, 我们省略.

命题 1.1.1. 设 A, B, C 为集合, 则

(1) (交换律) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) (结合律) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

设集合 A 是集合 X 的子集, 由 X 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 在 X 中的**补集**或**余集**, 记为 A^c, 即

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

例 1.1.5. *设 $X = \mathbb{Z}$, $A = \{-1, -2, \cdots\}$, 则*

$$A^c = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},$$

即 A 的余集就是非负整数集 $\mathbb{Z}^+$.

设 A, B 均为 X 的子集, 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$ 或 $A \backslash B$. 因此, A 的补集也可写为 $A^c = X - A$.

命题 1.1.2. *设 A, B 为 X 的子集, 则*

(1) $(A^c)^c = A$, $A^c \cup A = X$, $A^c \cap A = \varnothing$;

(2) $A - B = A \cap B^c$, $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$;

(3) (De Morgan 公式) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明. 这些性质可以根据定义直接得到, 我们以 De Morgan 公式的第一部分为例. 设 $x \in (A \cup B)^c$, 则 $x \notin A \cup B$, 因此 $x \notin A$, $x \notin B$. 即 $x \in A^c$, $x \in B^c$, 从而 $x \in A^c \cap B^c$. 这说明 $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. 反之, 设 $x \in A^c \cap B^c$, 则 $x \in A^c$, $x \in B^c$, 即 $x \notin A$, $x \notin B$, 因此 $x \notin A \cup B$, $x \in (A \cup B)^c$. 这说明 $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. 将两个包含关系结合起来就得到了等式 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. De Morgan 公式的第二部分可类似证明, 也可对第一个公式两边取补得到. □

如果集合 A 只有有限个元素, 则称 A 是**有限集**. 有限集之外的集合称为**无限集**. 如果无限集 A 中的元素可以按一定规律排成一列, 即

$$A = \{x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n,\ \cdots\},$$

则称 A 是**可数集**或**可列集**. 如果 A 是有限集或可数集, 则称 A 为**至多可数集**; 至多可数集之外的集合称为**不可数集**.

例 1.1.6. *正整数集 $\mathbb{N}$, 非负整数集 $\mathbb{Z}^+$ 均为可数集; 可数集的子集均为至多可数集;*

例 1.1.7. *整数集 $\mathbb{Z}$ 为可数集; 无限集必有一个可数子集.*

证明. 整数集 $\mathbb{Z}$ 可以排成下面的一列:

$$\mathbb{Z}:\ \ 0,\ -1,\ 1, -2,\ 2,\ \cdots,\ -n,\ n, \cdots$$

因此 $\mathbb{Z}$ 为可数集. 假设 X 是一个无限集, 特别地 X 非空. 取 $a_1 \in X$, 由于 X 是无限集, 故 $X - \{a_1\}$ 仍是非空集, 再取 $a_2 \in X - \{a_1\}$. 同理, $X - \{a_1, a_2\}$ 是非空集, 取 $a_3 \in X - \{a_1, a_2\}$. 如此继续下去, 我们可以取到一列互不相同的元素 a_n $(n \geqslant 1)$, 它们组成的子集 A 是 X 的可数子集. □

例 1.1.8. $(*)$ *设 $n > 1$ 为正整数, 如果 n 除了 1 和自身外无其它因子, 则称 n 为素数. 素数的全体是可数集.*

证明. (反证法) 假设只有有限个素数, 记为

$$p_1 = 2,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k.$$

考虑正整数 $n = 1 + p_1 p_2 \cdots p_k$. 因为 $n > p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 故 n 不是素数. 因此其因子分解中必含有某个素因子 p_i, 即 p_i 整除 n. 根据 n 的定义, 这是不可能的. □

最后, 我们介绍乘积集合的概念. 设 A, B 为集合. 我们考虑有序对 (x, y), 其中 x 是 A 中任意一个元素, y 是 B 中任意一个元素. 所有的这些有序对组成了一个集合, 称为 A 和 B 的乘积, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A,\ y \in B\}.$$

我们约定当 A 或 B 为空集时, $A \times B$ 也是空集.

例 1.1.9. *设 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4,\ 5\}$, 则*

$$A \times B = \{(1,4),\ (1,5),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5)\},$$

$A \times B$ 中共有 6 个元素. 一般地, 容易证明, 如果 A, B 中分别有 m, n 个元素, 则 $A \times B$ 中有 mn 个元素.

命题 1.1.3. *设 A, B 为可数集, 则 $A \times B$ 也是可数集.*

证明. 因为 A, B 均为可数集, 故可分别表示为

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_i,\ \cdots\},\quad B = \{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_j,\ \cdots\}.$$

于是 $A \times B$ 可表示为

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \,|\, i, j = 1,\ 2,\ \cdots\}.$$

我们可以按照 "字典法则" 将 $A \times B$ 中的元素排成一列:

$$A \times B:\quad (a_1,b_1),\ (a_1,b_2),\ (a_2,b_1),\ (a_1,b_3),\ (a_2,b_2),\ (a_3,b_1),\ \cdots$$

所谓 "字典法则" 就是当 $i + j < k + l$ 或 $i + j = k + l$ 但 $i < k$ 时, 要求 (a_i, b_j) 排在 (a_k, b_l) 前面. 按照可数集的定义, $A \times B$ 是可数集. □

习题 1.1

1. 设 X 为非空有限集, $a \in X$. 将 X 的子集分为含有 a 和不含 a 两类, 说明这两类子集的个数相同 (提示: 从含有 a 的子集中去掉 a 以后正好就是那些不含 a 的子集).
2. 利用上一题和归纳法证明, 由 n 个元素组成的集合正好有 2^n 个不同的子集.
3. 证明下列等式:

   (1) $(A^c)^c = A$, $A^c \cup A = X$, $A^c \cap A = \varnothing$;

   (2) $A - B = A \cap B^c$, $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$.
4. 判断下列命题是否成立, 成立的话给出证明, 不成立的话给出反例:

   (1) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$;

   (2) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;

   (3) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.
5. 证明, 可数集的子集要么是有限集, 要么是可数集.
6. 证明, 如果 A, B 均为可数集, 则 $A \cup B$ 也是可数集.
7. 证明, 如果 A, B 分别有 m, n 个元素, 则 $A \times B$ 有 mn 个元素.
8. 设 A 为非空有限集, B 为可数集, 则 $A \times B$ 也是可数集.

§1.2　数的集合

一般来说, 数学所研究的对象都在某个集合之中. 本课程所要用到的集合主要是所谓的数集. 我们在前节已经提过正整数集和整数集. 正整数也称为自然数, 它们是人们用来表示对所考虑对象的个数的一种抽象符号, 这些符号当然也可以不用 $1, 2, 3, \cdots$ 表示. 重要的是知道一定的运算规则, 按照这些规则可以从已知的一些自然数得到新的自然数. 这些规则包括: $a + b = b + a$, $ab = ba$ (交换律); $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$ (结合律); $a(b + c) = ab + ac$ (分配律); 如果 $a + c = b + c$, 则 $a = b$ (相消律) 等等.

从正整数到整数是人类对数的认识的一个跨越. 只有在整数集中减法才是完全定义好的. 类似地, 当我们引进分数以后, 整数集就扩大为有理数集, 从而除法也可以定义好.

有理数可以写成 $\dfrac{p}{q}$ 的形式, 其中 p, q 均为整数, $q \neq 0$. 这种表示不是惟一的, 因此我们通常还要求 p, q 无大于 1 的公共因子, 且 $q > 0$. 有理数的全体用 $\mathbb{Q}$ 表示.

有理数也可以用直线上的点表示. 在直线 L 上任意选定一点, 我们把它当作 0, 或称原点. 再在 L 上另取一点作为 1. 我们规定从 0 到 1 的方向为正向, 这时 L 称为有向直线. 在作图时一般将正向朝右画, 即 1 在 0 的右边.

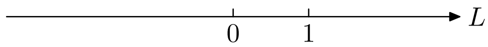


图 1.2 实数轴

从原点 0 到 1 的直线距离称为单位长度. 利用直尺和圆规, 我们可以将单位长度任意等分, 由此可以进一步将有理数全部实现为 L 上的点. 其中, 在原点右边的点表示正有理数, 在原点左边的点表示负有理数. 如果点 P 表示有理数 x, 则从 P 到 0 的距离称为 x 的绝对值, 用 $|x|$ 表示, 即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \text{ 为正有理数或 } 0, \\ -x, & x \text{ 为负有理数.} \end{cases}$$

有了方向就可以比大小. 有理数 $x < y$ 意味着在 L 上 y 位于 x 的右边. 介于 x 和 y 之间的点组成的集合称为一个区间. 有理数具有一个重要的性质: 在 L 上有理点是稠密的, 即 L 上任意一点 P 总可以用有理点去任意逼近. 事实上, 任意取一个很大的正整数 q, 我们把 L 分为一系列长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间, 点 P 必位于这样一个区间之内, 即 P 一定介于两个有理点 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+1}{q}$ 之间. 这就说明 P 和有理点 $\frac{p}{q}$ 之间的距离不超过 $\frac{1}{q}$, 而只要 q 很大, 这个距离就可以很小.

虽然有理点在 L 上具有稠密性, 不过 L 上点并不都能用有理数表示. 例如, 考虑单位长度的正方形, 其对角线长的长度记为 l, l 通常表示为 $\sqrt{2}$, 这不是一个有理数: 如果 $l = \frac{p}{q}$ 为有理数, 其中 p, q 是无公共因子的正整数, 则由勾股定理有

$$1^2 + 1^2 = l^2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{或} \quad p^2 = 2q^2,$$

这表明 $p = 2k$ 为偶数, 代入上面的等式得

$$2k^2 = q^2,$$

因此 q 也是偶数, p, q 就有 2 这个公共因子, 这和我们的假设相矛盾. 更一般地, 有

命题 1.2.1. (∗) *设 n 为正整数, 如果 n 不是完全平方数, 则 $\sqrt{n}$ 不是有理数.*

证明. (反证法) 因为 n 不是完全平方数, 因此它介于两个相邻的完全平方数之间, 比如说 $k^2 < n < (k+1)^2$. 此时 $\sqrt{n} = k + \frac{p}{q}$, 其中 k, p, q 为正整数, p/q 是 $\sqrt{n}$ 的小数部分, $0 < p/q < 1$. 上式两边平方以后得

$$n = k^2 + 2k\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2},$$

整理后得

$$p^2 = q(nq - k^2q - 2kp) = ql, \quad l = nq - k^2 - 2kp.$$

这说明 l 也是正整数, 且

$$\frac{p}{q} = \frac{l}{p}, \quad \sqrt{n} = k + \frac{p}{q} = k + \frac{l}{p}.$$

从 p/q 得到 l/p 的过程可以重复下去, 且每次分母都变成了更小的正整数. 但这就得出了矛盾, 因为比 q 小的正整数只有有限个 (只有 $q-1$ 个). □

我们把象 $l = \sqrt{2}$ 这样不能用有理点表示的数称为**无理数**. 无理数的另一自然的例子是圆周率 π, 几何上看圆周率就是圆周的周长和其直径之比. π 的无理性的证明就没那么初等了 (见本书第七章).

有理数和无理数统称实数. 实数的理论直到 19 世纪才被严格建立起来, 主要的贡献者是 Dedekind 等. Dedekind 使用了现在被称为 Dedekind 分割的一种方法从有理数出发构造实数系, 并且构造出来的数系是完备的, 它们仍然满足有理数的运算法则, 直线 L 上的点和实数系之间有着一一对应. 我们不打算在此讲述 Dedekind 的构造 (见本章附录). 除了 Dedekind 分割理论以外, Cantor 的实数模型也值得一提. 这也就是大家所熟悉的实数的小数表示理论, 在这种理论中, 有限小数或无限循环小数表示有理数, 而无限不循环小数表示无理数. 我们也不去探讨严格的 Cantor 理论, 不过, 第二章第一节和第八章第二节中关于无限小数的例子可供读者参考.

实数的全体组成的集合用 $\mathbb{R}$ 表示. 设 $a < b$ 为实数, 记

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\},$$

称为以 a, b 为端点的**闭区间**; 记

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\},$$

称为以 a, b 为端点的**开区间**; 可以类似地定义 $[a, b)$, $(a, b]$ (半开半闭区间), 和无限区间

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\},$$

以及

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\},$$

等等, 统称为区间. $\mathbb{R}$ 自身也常写为区间 $(-\infty, \infty)$. 区间可以这样刻画: I 为区间当且仅当任取 $a < b \in I$, 必有 $[a, b] \subset I$. 一般用 $|I|$ 表示区间 I 的长度.

设 A 为 $\mathbb{R}$ 的子集 (称为数集). 如果存在 $M \in A$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \leqslant M$, 则称 M 为 A 的**最大数**, 记为 $M = \max A$; 如果存在 $m \in A$, 使得对任意的

$x \in A$, 均有 $x \geqslant m$, 则称 m 为 A 的**最小数**, 记为 $m = \min A$. 当 A 为非空有限数集时, A 的最大数和最小数都存在且分别为 A 的有限个元素中的最大者和最小者.

如果 A 为无限集, 则其最大数或最小数可能不存在, 如 $A = (0, 1)$ 就是这样的例子. 为此我们引入极为重要新概念: 上确界和下确界, 他们将分别代替最大数和最小数的概念.

设 A 为一个非空数集. 如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \leqslant M$, 则称 A 有上界, M 是 A 的一个**上界**; 如果存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \geqslant m$, 则称 A 有下界, m 是 A 的一个**下界**; 如果 A 既有上界又有下界, 则称为**有界集**. 显然, A 是有界集当且仅当存在 M, 使得对任何 $x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$.

例 1.2.1. *$(-\infty, 0)$ 有上界, 0 为一个上界; $(1, +\infty)$ 有下界, 1 为一个下界; $(0, 1)$ 为有界集.*

需要注意的是, 有上 (下) 界的数集, 它的上 (下) 界不是惟一的. 例如, 如果 M 为 A 的上界, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $M + \varepsilon$ 均为 A 的上界. 不过, 我们有下面重要的结果, 它是微积分极限理论的基石.

定理 1.2.2 (确界原理)**.** *如果非空数集 A 有上界, 则它有一个最小上界, 称为 A 的**上确界**, 记为 $\sup A$; 如果 A 有下界, 则它有一个最大下界, 称为 A 的**下确界**, 记为 $\inf A$.*

例 1.2.2. *求集合 $A = (0, 1)$ 的上确界和下确界.*

解. 显然, 0 是 A 的一个下界. 设 $a > 0$, 因为 $\frac{a}{a+1} \in (0, 1)$, 且 $\frac{a}{a+1} < a$, 所以 a 不是 A 的下界. 这说明 0 是 A 的最大下界, 即 A 的下确界是 0. 同理, 可以说明 1 是 A 的上确界. □

确界原理是实数系的基本性质, 我们在此只承认它 (参见本章最后一节), 在下一章最后一节我们会证明确界原理和另外几条实数基本定理的等价性. 下面讨论一下上确界和下确界的简单性质.

我们约定, 如果数集 A 没有上界, 则记 $\sup A = +\infty$; 如果 A 没有下界, 则记 $\inf A = -\infty$. 显然, 如果 A 有最大数, 则最大数就是它的上确界; 如果 A 有最小数, 则最小数就是它的下确界. 按照定义, 我们还有:

(1) 设 A 有上确界 M, 则对任意的 $x \in A$, 均有 $x \leqslant M$; 任给正数 ε, 由于 $M - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 因此存在 $x' \in A$, 使得 $x' > M - \varepsilon$.

(2) 设 A 有下确界 m, 则对任意的 $x \in A$, 均有 $x \geqslant m$; 任给正数 ε, 由于 $m + \varepsilon$ 不是 A 的下界, 因此存在 $x' \in A$, 使得 $x' < m + \varepsilon$.

(3) 设 A 有上确界, 则 $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ 有下确界, 且 $\inf(-A) = -\sup A$; 设 A 有下确界, 则 $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ 有上确界, 且 $\sup(-A) = -\inf A$.

对于有界数集, 我们还有

命题 1.2.3. 设 A, B 为非空有界数集, 则

$$\inf(A+B)=\inf\ A+\inf\ B;\quad \sup(A+B)=\sup\ A+\sup\ B.$$

其中 $A+B=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in B\}$.

证明. 以上确界为例. 任取 $x\in A$, $y\in B$, 则 $x\leqslant\sup\ A$, $y\leqslant\sup\ B$, 于是

$$x+y\leqslant\sup\ A+\sup\ B.$$

因此 $\sup\ A+\sup\ B$ 是数集 $A+B$ 的一个上界. 另一方面, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $x'\in A$, $y'\in B$, 使得

$$x'>\sup\ A-\varepsilon,\quad y'>\sup\ B-\varepsilon,$$

即

$$x'+y'>\sup\ A+\sup\ B-2\varepsilon.$$

设 M 是 $A+B$ 的一个上界, 则 $M\geqslant x'+y'$, 上式表明

$$M>\sup\ A+\sup\ B-2\varepsilon. \tag{1.1}$$

根据 ε 的任意性即知 $M\geqslant\sup\ A+\sup\ B$, 因此 $\sup\ A+\sup\ B$ 是 $A+B$ 的最小上界. □

注. 上面最后一句话的严格证明是这样的: 如果 $M<\sup\ A+\sup\ B$, 则取

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\ A+\sup\ B-M)>0$$

导入不等式 (1.1) 就得到了矛盾.

我们知道, 如果 A, B 是有限数集, 且 $A\subset B$, 则 $\min\ A\geqslant\min\ B$, $\max\ A\leqslant\max\ B$. 这个结果也可以推广到上确界和下确界.

命题 1.2.4. 设 $A\subset B$, 则当 B 有下界时 $\inf\ A\geqslant\inf\ B$; 当 B 有上界时 $\sup\ A\leqslant\sup\ B$.

证明. 以上确界为例. 任取 $x\in A$, 则 $x\in B$, 于是 $x\leqslant\sup\ B$. 这说明 $\sup\ B$ 也是 A 的一个上界, 因而 A 有上确界, 且 $\sup\ A\leqslant\sup\ B$. □

最后, 我们提一下本书中常用的初等等式和不等式. 下面的 Newton 二项式展开在下文中常常用到 (n 为正整数):

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k},\quad \forall\ a,b\in\mathbb{R}.$$

常用不等式中, 一个是**三角不等式**, 即

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, \quad \text{或} \quad |x-y| \leqslant |x-z|+|z-y|,\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}.$$

另一个是 **Cauchy 不等式**, 即

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2},\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, \quad \text{或} \quad ab \leqslant \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

习题 1.2

1. 证明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数; 更一般地, 对任意正整数 n, 证明 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 都是无理数. (提示: 有理数的平方还是有理数.)
2. 对任意正整数 n, 证明 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ 都是无理数.
3. 说明任意两个不同的有理点之间一定存在其它的有理点, 并由此说明 $[0,1]$ 内的有理数不能按从小到大的顺序排成一列. (提示: 考虑两个有理数的平均.)
4. 证明, 如果一个数集存在最大数, 则最大数是惟一的; 最小数也一样. 这些结论对确界成立吗?
5. 求下列数集的上确界和下确界:

$$(1)\ \Big\{\frac{1}{n}\,\Big|\, n \in \mathbb{N}\Big\}; \quad (2)\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2-3x+1<0\}.$$

6. 设 a,b,c 为实数 (常数). 如果任给正数 $\varepsilon \in (0,1)$, 均成立

$$a + c\cdot\varepsilon \leqslant b,$$

证明 $a \leqslant b$.

7. 设 A 有上确界, 则 $-A=\{-x \,|\, x\in A\}$ 有下确界, 且 $\inf(-A) = -\sup A$; 设 A 有下确界, 则 $-A=\{-x \,|\, x\in A\}$ 有上确界, 且 $\sup(-A) = -\inf A$.
8. 设 A 为有界非空数集, $x \in \mathbb{R}$, 则

$$\inf(x+A) = x + \inf A, \quad \sup(x+A) = x+\sup A.$$

9. 设 A, B 为非空有界数集, 则

$$\inf(A+B) \leqslant \inf A + \sup B \leqslant \sup(A+B).$$

10. 设 a,b,c,d 为正实数, 如果 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 则

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

11. 设 $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, 证明

$$|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\big[(b-a)+(d-c)+|c-a|+|d-b|\big].$$

12. 设 $a,b,c \in \mathbb{R}$, 证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|,$$

并求等号成立的条件.

13. 设 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, 证明

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

你能推广到多个实数的一般情形吗？

§1.3 映射与函数

在前面两节我们介绍了集合和数的集合. 集合是人们对研究对象的一种抽象化. 当我们研究不同性质的对象之间的关系时, 集合到集合之间的对应就必须加以考虑.

定义 1.3.1 (映射)**.** *设 X, Y 为集合. 如果对于每一个元素 $x \in X$, 都有 Y 中惟一元素 y 与之对应, 则称这种对应关系为从 X 到 Y 的一个映射, 记为*

$$f: X \to Y, \quad y = f(x),$$

或

$$f: X \to Y, \quad x \mapsto f(x),$$

我们将 $y = f(x)$ 称为 x 在 f 下的象, 而将 x 称为 y 的一个原象或逆象. 集合 X 称为映射 f 的定义域, f 的象的全体组成的集合 $f(X)$ 是 Y 的子集, 称为 f 的值域, 即

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

注. 映射有时也称为**函数**, 特别是当 $Y \subset \mathbb{R}$ 是数集时更是如此. 通常也把映射写为 $y = f(x)$ 或 $f(x)$, 这时 x 也称为变量或自变量, y 也称为因变量. 如果 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 均为数集, 映射 $f: X \to Y$ 也称为一元函数或一元实值函数或一元实变函数.

函数通常有三种基本的表示方法: 一是列表法, 即将自变量 x 和因变量 y 之间的关系一一罗列出来; 二是图形法, 以一元函数为例, 函数 f 可以表示为平面上的点集 $\{(x, f(x))\}$; 三是解析法, 即用解析表达式来表示函数. 下面是几个例子, 其中例一和例二是函数的分段表示.

例 1.3.1. 特征函数 χ_A.

设 A 为集合 X 的子集, 定义函数 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A. \end{cases}$$

这个函数称为 A 的特征函数. 容易看出, $A \neq B$ 当且仅当 $\chi_A \neq \chi_B$.

例 1.3.2. 符号函数.

定义函数 $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

这个函数称为符号函数.

例 1.3.3. 设 a, b 为固定的实数 (常数), 如下定义映射

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b,$$

这是熟知的线性函数.

定义 1.3.2 (单射和满射)**.** 设 $f : X \to Y$ 为映射, 如果对任意 $x_1 \neq x_2 \in X$, 均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射; 如果 $f(X) = Y$, 即对任意 $y \in Y$, 均存在 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$, 则称 f 为满射.

注. 如果 $f : X \to Y$ 既是单射, 又是满射, 则称 f 为**一一映射**或一一满射. 在有的书上一一映射是指我们这儿的单射.

例 1.3.4. 在集合 $\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{N}$ 之间建立一一映射.

解. 定义映射 $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ 如下:

$$f(n) = n + 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+,$$

则易见 f 是一一映射. □

注. 一般地, 集合 X 可数当且仅当存在从 X 到 $\mathbb{N}$ 之间的一一映射. 这可以作为可数集的正式定义.

例 1.3.5. 设 a,b 为固定的实数 (常数), 如下定义映射

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2+ax+b,$$

因为

$$f(x)=x^2+ax+b=\big(x+\frac{a}{2}\big)^2+b-\frac{a^2}{4}\geqslant b-\frac{a^2}{4},\quad \forall\, x\in\mathbb{R},$$

故 f 不是满射. 不难看出 f 也不是单射.

例 1.3.6. $(*)$ 设 n 为正奇数, 如下定义映射

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^n,$$

则 f 是一一映射.

证明. 我们熟知当 $x<y$ 时 $x^n<y^n$, 因此 f 是单射. 下面说明 f 为满射. 不妨设 $y_0>0$, 我们要找到 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $y_0=x_0^n$. 考虑数集

$$A=\{r\in\mathbb{R}\,|\,r^n\leqslant y_0\},$$

因为 $0^n=0<y_0$, 故 $0\in A$, 这说明 A 不是空集. 另一方面, $(y_0+1)^n\geqslant y_0+1>y_0$, 因此 y_0+1 是 A 的上界. 由确界原理, A 有上确界, 记为 x_0.

按照确界的定义, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $r'\in A$, 使得

$$r'>x_0-\varepsilon,$$

这说明

$$(x_0-\varepsilon)^n<(r')^n\leqslant y_0.$$

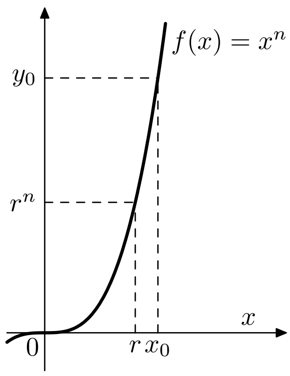


图 1.3 实数开 n 次方

根据二项式展开, 当 $0<\varepsilon<1$ 时, 有

$$\begin{aligned}(x_0-\varepsilon)^n&=x_0^n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k(x_0)^k(-\varepsilon)^{n-k}\\&\geqslant x_0^n-\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k|x_0|^k,\end{aligned}$$

这说明, 对任意 $0<\varepsilon<1$, 有

$$x_0^n-\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k|x_0|^k\leqslant(x_0-\varepsilon)^n<y_0,$$

由 ε 的任意性得

$$x_0^n\leqslant y_0.$$

如果 $x_0^n < y_0$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 也有

$$(x_0+\varepsilon)^n \leqslant x_0^n + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |x_0|^k < y_0,$$

但这与 x_0 是 A 的上确界相矛盾. 因此只能有 $x_0^n = y_0$. □

例 1.3.7. 设 n 是正整数, 则映射

$$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty), \quad f(x) = x^n$$

为一一映射.

证明. 证明和上例完全类似, 留作习题. □

定义 1.3.3 (逆映射)**.** 设 $f: X \to Y$ 为一一映射, 因此对任意 $y \in Y$, 存在惟一的 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$, 定义映射

$$f^{-1}: Y \to X, \quad f^{-1}(y) = x,$$

称为 f 的逆映射.

注. 根据这个定义, 一一映射也称为可逆映射. 逆映射有时也称为**反函数**. 根据上面的例子, 当 n 为正奇数时, $f(x) = x^n$ 可逆, 其反函数记为 $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$; 当 n 为一般正整数时, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ 对 $x \geqslant 0$ 也有定义.

例 1.3.8. 正弦函数

$$f: \Big[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\Big] \to [-1,\ 1], \quad f(x) = \sin x$$

是一一映射, 其反函数为 $x = \arcsin y$.

定义 1.3.4 (复合映射)**.** 设 $f: Y \to Z$, $g: X \to Y$ 均为映射, 我们定义映射

$$f \circ g: X \to Z, \quad f \circ g(x) = f(g(x)),\ x \in X,$$

称为 f 和 g 的复合映射.

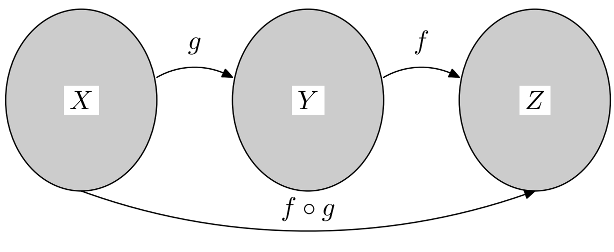


图 1.4 复合映射

注. 用复合映射的语言来描述, 则映射 $f : X \to Y$ 可逆当且仅当存在映射 $g : Y \to X$, 使得 $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$, 其中

$$id_X : X \to X,\ \ id_X(x) = x;\ \ id_Y : Y \to Y,\ \ id_Y(y) = y$$

分别表示 X 到自身和 Y 到自身的恒同映射.

例 1.3.9. *当 n 为正整数时, 函数 $h(x) = x^{-n}$ $(x \neq 0)$ 可以看成是两个函数 $f(x) = x^n$ 和 $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 的复合.*

进一步, 对于有理数 $\dfrac{p}{q}$ (p, q 为无公共因子的整数, q 为正奇数), 我们定义

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}\ (x > 0),\ \ x^{\frac{p}{q}} = (-1)^{\frac{p}{q}}(|x|^p)^{\frac{1}{q}}\ (x < 0),$$

其中, 当 p 为偶数时 $(-1)^{\frac{p}{q}} = 1$, 当 p 为奇数时 $(-1)^{\frac{p}{q}} = -1$. 当 q 为偶数时, 上式对 $x < 0$ 无定义.

映射的复合可以看成是从已知映射出发构造新映射的一种方法. 对于实函数而言, 由于其值域是数集, 而实数有四则运算, 因此对函数也可以定义四则运算, 这样就得到了构造函数的更多手段.

定义 1.3.5 (函数的四则运算)**.** *设 f, $g : X \to \mathbb{R}$ 为函数.*

(1) 如果 α, β 为实数, 函数

$$\alpha f + \beta g : X \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$$

称为 f 和 g 的线性组合;

(2) 函数

$$fg : X \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto f(x)g(x)$$

称为 f 和 g 的乘积;

(3) 如果 $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in X$, 则函数

$$f/g : X \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto f(x)/g(x)$$

称为 f 和 g 的商.

注. 如果两个函数的定义域不同, 则我们也可以在它们的公共定义域上定义四则运算.

定义 1.3.6 (初等函数)**.** *下列五类函数称为基本初等函数:*

(1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

(2) 指数函数 $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

(3) 对数函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$;

(4) 三角函数 $f(x)=\sin x,\ \cos x,\ \tan x$ 等;

(5) 反三角函数 $f(x)=\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x$ 等.

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所生成的函数称为初等函数.

注. 初等函数的定义域是其自变量的最大取值范围. 这些函数的完整定义通常要借助确界原理. 以指数函数为例, 设 $a>0$, 我们要对任意实数 x 定义 a^x 的值. 当 $a=1$ 时, 我们定义 $a^x\equiv 1$. 设 $a>1$, 我们规定 $a^0=1$. 如果 $x>0$, 当 $x=\dfrac{p}{q}$ (p, q 为正整数) 为有理数时, 我们定义 a^x 为这样一个正数, 它的 q 次方为 a^p; 当 x 为正无理数时, 定义

$$a^x=\sup\{a^r \mid r\in(0,x)\cap\mathbb{Q}\};$$

当 $x<0$ 时, 定义

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}};$$

如果 $a<1$, 定义

$$a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

这样就定义了所有的指数函数. 类似的, 还可以定义当 α 为无理数时的幂函数 x^α $(x>0)$, 我们留给读者完成. 在后面的章节中我们将通过指数函数和对数函数的复合来重新考虑幂函数的定义.

一元函数也可用其平面图像来直观表示. 函数 f 的图像是指由 $(x,f(x))$ (x 属于 f 的定义域) 组成的集合, 它是平面 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的子集. 通过观察函数图像可以了解函数的简单特性. 函数的简单特性包括:

(1) 有界性. 如果 f 的值域有上界, 则称函数 f 有上界; 如果 f 的值域有下界, 则称 f 有下界; 既有下界又有上界的函数称为有界函数.

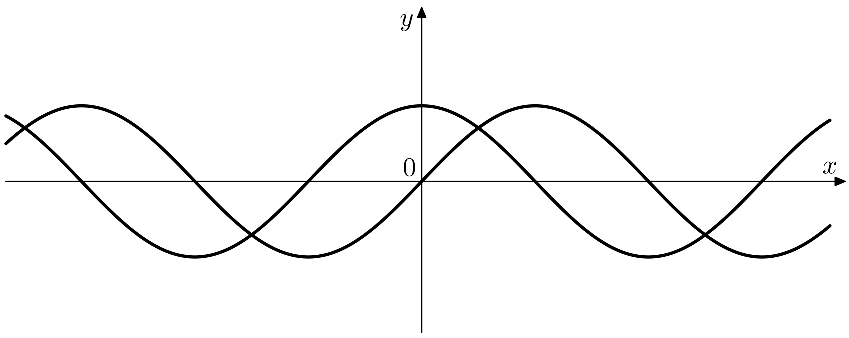


图 1.5 函数的图像

(2) 单调性. 如果对于定义域中任意的 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1)(<) \leqslant f(x_2)$, 则称 f 是 (严格) 单调递增函数; 如果对于定义域中任意的 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1)(>) \geqslant f(x_2)$, 则称 f 是 (严格) 单调递减函数; 它们统称为单调函数.

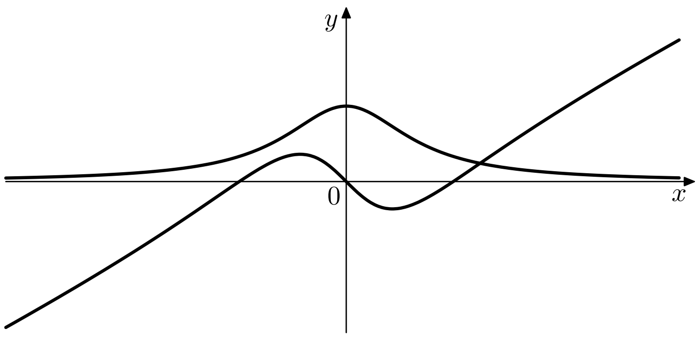


图 1.6 函数的图像

(3) 奇偶性. 如果 $f(x) = -f(-x)$, 则称 f 是奇函数; 如果 $f(x) = f(-x)$, 则称 f 是偶函数.

(4) 周期性. 如果存在常数 $T \neq 0$, 使得 $f(x) = f(x+T)$, 则称 f 是周期函数, T 为其周期. 周期函数的典型例子是三角函数.

例 1.3.10. *$f(x) = x^3$ 是单调递增的无界奇函数; $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 是有界偶函数, 它在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减.*

例 1.3.11. *$\mathbb{R}$ 上的任何函数均可写成一个奇函数和一个偶函数之和.*

证明. 给定函数 $f(x)$, 记

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

则 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数, 且 $f(x) = g(x) + h(x)$. □

习题 1.3

1. 你能在集合 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 之间建立一一映射吗? (提示: 将各自元素排成一列.)

2. 有一个很有用的**抽屉原理**是这样叙述的: 有 m 个物品放入 n 个抽屉中, 如果 $m > n$, 则至少有一个抽屉中含有两件或更多的物品. 用映射的观点如何重新描述抽屉原理?

3. 设 A, B 为 X 的子集, 则

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

4. 当 n 为非零整数时, 证明函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x^n$ 是一一映射.

5. 设 $f:X\to Y$ 为映射, $B\subset Y$. 记

$$f^{-1}(B)=\{x\,|\,x\in X,\ f(x)\in B\},$$

称为 B 的原象. 证明

(1) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$;

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$, $f^{-1}(f(A))\supset A$.

6. $f(x)=|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ 是初等函数吗?

7. 求下列函数跟自身的复合, 多次复合以后有什么规律?

$$(1)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\quad (2)\ f(x)=\frac{1}{x+1}.$$

8. 设 X 为非空有限集合, 对于任意函数 $f:X\to\mathbb{R}$, 我们定义

$$\int_X f=\sum_{i=1}^n f(x_i),\quad \text{其中}\quad X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

(i) 设 f,g 为函数, α,β 为常数, 则 $\displaystyle\int_X(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_X f+\beta\int_X g$.

(ii) 设 A 为 X 的子集, 则 $\displaystyle\int_X\chi_A=\#A$, 其中 $\#A$ 表示 A 的元素个数.

(iii) 设 A,B 为 X 的子集, 则 $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$. 这称为**容斥原理**. 你能推广到多个子集的情形吗?

§1.4 附录: 实数系的构造

在初次学习本书时, 本节内容可以略过. 我们在本节中给出实数集 $\mathbb{R}$ 的一种构造方法, 构造出来的对象除了是一个集合外还具有很多基本性质, 所以通常又将它称为实数系. 我们从有理数 $\mathbb{Q}$ 出发来构造实数. 需要提醒读者注意的是, 自然数, 整数以及有理数的建立也是需要严格的数学基础的, 不过这对于学习微积分不是至关重要的, 因此我们还是从有理数开始, 毕竟有理数比较直观.

下面构造实数的方法是 Dedekind 在 1872 年发明的, 这种方法以 Dedekind 分割而著称.

定义 1.4.1 (Dedekind 分割). *设 α 为 $\mathbb{Q}$ 的子集, 如果满足以下三个条件*

(1) $\alpha\neq\varnothing$, $\alpha\neq\mathbb{Q}$;

(2) *当* $p\in\alpha$, $q\in\alpha^c$ *时*, $p<q$;

(3) 任给 $p \in \alpha$, 存在 $q \in \alpha$, 使得 $p < q$;

则称 α 为 $\mathbb{Q}$ 的一个分割, 分割的全体组成的集合记为 $\mathbb{R}$.

注. 定义中的条件 (1) 是说 α 为 $\mathbb{Q}$ 的非空真子集, 而 (3) 是说 α 中无最大数, 这一条不是本质的: 如果 α 满足条件 (1) 和 (2), 且有最大数, 将此最大数去掉后 α 就是满足所有三个条件的分割了.

命题 1.4.1. 设 α 为 $\mathbb{Q}$ 的一个分割. 则

(1) 如果 $p < q$, $q \in \alpha$, 则 $p \in \alpha$;

(2) 设 $w > 0$, 则存在整数 n, 使得 $nw \in \alpha$, $(n+1)w \in \alpha^c$.

证明. (1) (反证法) 如果 $p \in \alpha^c$, 则由分割定义的第二条即知 $q < p$, 这和假设相矛盾.

(2) 取 $r \in \alpha$, 则当 $m < r/w$, 即 $mw < r$ 时, 由 (1) 即知 $mw \in \alpha$. 再取 $s \in \alpha^c$, 当 $m > s/w$ 时 $mw \in \alpha^c$. 这说明, 下面的整数子集

$$\{m \in \mathbb{Z} \,|\, mw \in \alpha\}$$

是非空且有上界的集合, 因此有最大数 n, n 就是满足要求的整数. □

例 1.4.1. 有理数对应的分割.

设 $r \in \mathbb{Q}$ 为一个有理数, 记

$$r^* = \{s \in \mathbb{Q} \,|\, s < r\},$$

则容易验证 r^* 是一个分割, 称为由有理数 r 决定的分割.

例 1.4.2. 考虑 $\mathbb{Q}$ 的子集 $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leqslant 0\}$, 则 α 是一个分割.

事实上, 容易看出 α 为非空子集. 分割定义的第二条也是容易验证的, 我们来看分割定义的第三条, 即 α 中没有最大数: 如果 $r \leqslant 0$, 则 $r < 1$, 而 $1 \in \alpha$; 如果 $r > 0$, $r^2 < 2$, 则

$$r < s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2},$$

且

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2} < 0,$$

即 $s \in \alpha$, 且 $r < s$.

如果递归地定义有理数列 x_n 如下:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 2}{x_n + 2}, \quad n \geqslant 0,$$

则根据刚才的讨论, $\{x_n\}$ 为严格单调递增数列 (即 $x_n < x_{n+1}$), 且

$$0 < 2 - x_{n+1}^2 = \frac{2(2 - x_n^2)}{(x_n + 2)^2} < \frac{1}{4}(2 - x_n^2),$$

由此得到下面的估计

$$0 < 2 - x_n^2 < \frac{1}{4^n}, \quad n \geqslant 1. \tag{1.2}$$

下面我们把有理数 $\mathbb{Q}$ 所满足的基本性质都推广到 $\mathbb{R}$ 上, 首先看次序如何定义.

次序关系 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 如果 α 为 β 的真子集, 则称 α 小于 β, 记为 $\alpha < \beta$. 我们也用记号 $\alpha \leqslant \beta$ 表示 α 为 β 的子集, 此时 $\alpha = \beta$ 或 $\alpha < \beta$. 次序关系的性质有

- 如果 $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, 则 $\alpha < \gamma$. 这是因为真子集的真子集还是真子集.

- 任给 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 下面的三种关系有且仅有一个成立:

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

  事实上, 设前两个关系不成立, 则 α 不是 β 的子集, 因此存在 $r \in \alpha$, 但 $r \notin \beta$. 如果 $s \in \beta$, 则 $s < r$, 从而 $s \in \alpha$, 这就说明 β 为 α 的子集, 由于 $\alpha \neq \beta$, 故 β 为 α 的真子集.

如果 $r, s \in \mathbb{Q}$, 则当 $r = s$ 时 $r^* = s^*$, 当 $r < s$ 时 $r^* < s^*$. 因此我们定义的次序关系是自然的. 有了次序就可以定义上界.

上界和上确界 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$. 如果任给 $\alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界. 设 γ 为 A 的一个上界, 如果任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$. 易见, 上确界如果存在则必定是惟一的.

定理 1.4.2 (确界原理)**.** *$\mathbb{R}$ 的非空子集如果有上界则必有上确界.*

证明. 设 A 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, β 为 A 的一个上界, 记

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \subset \mathbb{Q},$$

下面先说明 γ 为一个分割. γ 显然是非空子集, 由于 β 为 A 的一个上界, 故 $\gamma \subset \beta$, 这说明 $\gamma \neq \mathbb{Q}$. 这验证了分割定义的第一条.

设 $r \in \gamma$, $s \notin \gamma$. 于是存在 $\alpha \in A$, 使得 $r \in \alpha$, 此时 $s \notin \alpha$, 因此 $r < s$. 这验证了分割定义的第二条. 第三条: 设 $r \in \gamma$, 于是存在 $\alpha \in A$, 使得 $r \in \alpha$, 此时存在 $s \in \alpha$, 使得 $r < s$, 由 γ 的定义即知 $s \in \gamma$.

其次我们说明 γ 为 A 的最小上界. 根据 γ 的构造, 显然 γ 为 A 的一个上界. 如果 γ' 为另一上界, 则 $\alpha \subset \gamma'$, $\forall\, \alpha \in A$. 这说明 $\gamma \subset \gamma'$. $\square$

例 1.4.3. 实数表示为某个非空子集的上确界.

如果 $r \in \mathbb{Q}$ 为有理数, 令

$$A = \{s^* \in \mathbb{R} \,|\, s < r,\ s \in \mathbb{Q}\} = \{s^* \,|\, s \in r^*\},$$

则 $r^* = \sup A$. 事实上, 由定义有

$$\sup A = \bigcup_{s<r} s^* = \bigcup_{s<r} \{t \in \mathbb{Q} \,|\, t < s\} = \{t \in \mathbb{Q} \,|\, t < r\} = r^*.$$

一般地, 如果 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为一个分割, 则

$$\alpha = \sup\{r^* \,|\, r \in \alpha\}.$$

下面我们把 $\mathbb{Q}$ 中的四则运算推广到 $\mathbb{R}$ 中.

加法运算 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 定义

$$\alpha + \beta = \{r + s \,|\ \forall\, r \in \alpha,\ s \in \beta\},$$

显然, $\alpha + \beta$ 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集. 取 $r' \in \alpha^c$, $s' \in \beta^c$, 则任给 $r \in \alpha$, $s \in \beta$, 均有 $r < r'$, $s < s'$, 从而有 $r + s < r' + s'$, 这说明 $r' + s' \notin \alpha + \beta$, 即 $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

设 $p = r + s \in \alpha + \beta$, 其中 $r \in \alpha$, $s \in \beta$. 如果 $q \in (\alpha + \beta)^c$, 我们要说明 $p < q$. 事实上, 如果 $q \leqslant p$, 则 $q - s \leqslant r$, 从而 $q - s \in \alpha$, $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$, 这就得到矛盾, 因此只能有 $p < q$.

$\alpha+\beta$ 中无最大数: 设 $p = r+s \in \alpha+\beta$, 取 $t \in \alpha$, 使得 $r < t$, 则 $q = t+s \in \alpha+\beta$, 且 $p < q$. 总之, $\alpha + \beta$ 是一个分割, 称为 α 与 β 的和. 求和运算具有以下性质:

- 如果 $r, s \in \mathbb{Q}$, 则 $r^* + s^* = (r + s)^*$. 这由定义不难得到.

- (交换律) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. 这可从 $\mathbb{Q}$ 中加法具有交换律以及 $\alpha + \beta$ 和 $\beta + \alpha$ 的定义推出.

- (结合律) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. 这可从 $\mathbb{Q}$ 中加法具有结合律推出.

- (零元) $\alpha + 0^* = \alpha$. 如果 $r \in \alpha$, $s \in 0^*$, 则 $s < 0$, $r + s < r$, 因此 $r + s \in \alpha$, 这说明 $\alpha + 0^* \subset \alpha$. 反之, 设 $r \in \alpha$, 取 $r' \in \alpha$, 使得 $r < r'$. 此时 $r - r' \in 0^*$, 从而 $r = r' + (r - r') \in \alpha + 0^*$, 这又说明 $\alpha \subset \alpha + 0^*$, 因此 $\alpha + 0^* = \alpha$. 0^* 称为零元.

- (负元) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令

$$\beta = \{r \in \mathbb{Q} \,|\ \text{存在 } s > 0,\ \text{使得 } -r - s \in \alpha^c\}.$$

我们先来说明 β 为一个分割. 取 $q \in \alpha^c$, $r = -q-1$, 则 $-r-1 = q \in \alpha^c$, 因此 $r \in \beta$, 这说明 β 是非空子集. 如果 $p \in \alpha$, $r \in \beta$, 则存在 $s > 0$, 使得 $-r-s \in \alpha^c$, 因此 $p < -r-s$, $r < -p-s < -p$, 特别地, $-p \in \beta^c$, 即 $\beta \neq \mathbb{Q}$. 分割定义的其它两条可类似验证.

我们来说明 $\alpha+\beta = 0^*$. 如果 $p \in \alpha$, $r \in \beta$, 则同上所述, 存在 $s > 0$, 使得 $-r-s \in \alpha^c$, 因此 $p < -r-s$, $p+r < -s < 0$, 于是 $p+r \in 0^*$, $\alpha+\beta \subset 0^*$. 反之, 取 $t \in 0^*$, 则 $-t/2 > 0$, 取整数 n, 使得 $-nt/2 \in \alpha$, $-(n+1)t/2 \in \alpha^c$. 令 $r = (n+2)t/2$, 则 $-r-(-t/2) \in \alpha^c$, 因此 $r \in \beta$, 且

$$t = -nt/2 + r \in \alpha+\beta,$$

这说明 $0^* \subset \alpha+\beta$.

我们称 β 为 α 的负元, 记为 $\beta = -\alpha$.

乘法运算 令 $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \,|\, 0^* < \alpha\}$, 如果 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, 令

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} \,|\, \text{存在 } 0 < r \in \alpha,\ 0 < s \in \beta \text{ 使得 } p < rs\},$$

可以验证这是一个分割, 且 $\alpha\beta \in \mathbb{R}^+$.

例 1.4.4. *考虑分割* $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leqslant 0\}$, *则* $\alpha^2 = \alpha\alpha = 2^*$, *因此记为* $\sqrt{2} = \alpha$.

事实上, 根据定义, 有

$$\alpha\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \,|\, \text{存在 } 0 < r, s \in \mathbb{Q},\ r^2 < 2,\ s^2 < 2,\ \text{使得 } p < rs\}.$$

当 $r, s > 0$, $r^2, s^2 < 2$ 时 $(rs)^2 < 4$, 因此 $rs < 2$, 这说明 $\alpha\alpha \subset 2^*$. 反之, 如果 $t \in 2^*$, 取正整数 $n > (2-t)^{-1}$, 则有

$$4^n > n > (2-t)^{-1},$$

根据例 1.4.2 中的构造和 (1.2) 式, 有

$$0 < 2 - x_n^2 < 4^{-n} < 2-t,$$

即有 $t < x_n \cdot x_n$, $0 < x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n^2 < 2$, 这说明 $t \in \alpha\alpha$, 从而 $2^* \subset \alpha\alpha$. □

对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们规定 $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$. 对于一般的情形, 令

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta), & \alpha < 0^*,\quad \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)(\beta)], & \alpha < 0^*,\quad 0^* < \beta, \\ -[\alpha(-\beta)], & 0^* < \alpha,\quad \beta < 0^*. \end{cases}$$

这样我们对所有的情形都定义了乘法运算. 乘法运算具有以下性质:

- 如果 $r, s \in \mathbb{Q}$, 则 $(rs)^* = r^*s^*$. 以 $r, s > 0$ 为例: 根据定义可以看出,

$$\begin{aligned} r^*s^* &= \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{ 存在 } r', s' \in \mathbb{Q},\ 0 < r' < r,\ 0 < s' < s \text{ 使得 } p < r's'\} \\ &= \{p \in \mathbb{Q} \mid p < rs\} = (rs)^*. \end{aligned}$$

- (交换律) $\alpha\beta = \beta\alpha$. 这可从有理数乘法的交换律得到, 下面的结合律也一样.

- (结合律) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- (单位元) $\alpha 1^* = \alpha$. 以 $0^* < \alpha$ 为例: 根据定义可以看出,

$$\begin{aligned} \alpha 1^* &= \{p \in \mathbb{Q} \mid p < rs,\ \text{存在 } 0 < r \in \alpha,\ 0 < s < 1\} \\ &= \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{ 存在 } 0 < r \in \alpha \text{ 使得 } p < r\} = \alpha. \end{aligned}$$

- (逆元) 如果 $\alpha \neq 0^*$, 则存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\alpha\beta = 1^*$. 事实上, 不妨设 $0^* < \alpha$, 定义 β 为

$$\beta = \{s \in \mathbb{Q} \mid \text{ 存在 } r \in \alpha^c \text{ 使得 } s < r^{-1}\},$$

  不难验证这是一个分割, 且 $\alpha\beta = 1^*$. 我们称 β 为 α 的逆元, 记为 $\beta = \alpha^{-1}$. 如果 r 为非零有理数, 则 $(r^*)^{-1} = (r^{-1})^*$.

- (分配律) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

用高等代数的语言来说, 我们迄今为止所做的工作表明, 配备了加法运算和乘法运算的集合 $\mathbb{R}$ 是一个域, 称为实数域. 当然, 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 也是一个域, 并且通过映射

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto r^*$$

我们还知道 $\mathbb{Q}$ 可以看成 $\mathbb{R}$ 的子域, 或实数域 $\mathbb{R}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的一个扩张, 扩张以后的域除了具有有理数域的基本性质以外, 还具备了重要的确界原理, 它使得实数填满了有理数在数轴上所留下的空隙, 因此实数集合 $\mathbb{R}$ 也称为实数连续统或实数系. 为了强调实数系的连续性质, 我们再看两个结论.

定理 1.4.3 (Archimedes 原理)**.** *设 $0 < x \in \mathbb{R}$, 则任给 $y \in \mathbb{R}$, 存在正整数 n, 使得 $y < nx$.*

证明. 我们不再区分有理数 r 与分割 r^*. 考虑 $\mathbb{R}$ 的子集

$$A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\},$$

我们说明 A 没有上界. (反证法) 如果有上界, 则由确界原理知 A 有上确界, 记为 α. 因为 $0 < x$, 故 $\alpha - x < \alpha$, 从而存在正整数 m, 使得 $\alpha - x < mx$, 此时 $\alpha < (m+1)x \in A$, 这和 α 为 A 的上界相矛盾.

既然 A 没有上界, y 就不是 A 的上界, 从而存在正整数 n, 使得 $y < nx$. □

推论 1.4.4 (有理数的稠密性). 任给 $a < b \in \mathbb{R}$, 存在 $c \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < c < b$.

证明. 由 $a < b$ 知 $0 < b - a$, 由 Archimedes 原理, 存在正整数 n, 使得 $1 < n(b-a)$. 再由 Archimedes 原理, 存在正整数 m_1, m_2, 使得 $na < m_1$, $-na < m_2$. 这说明, 集合

$$A = \{m' \in \mathbb{Z} \,|\, na < m'\} \subset \mathbb{Z}$$

非空且有下界, 因而存在最小整数 $m \in A$, m 满足条件

$$m - 1 \leqslant na < m.$$

此时就有

$$na < m \leqslant 1 + na < n(b-a) + na = nb,$$

即 $c = m/n \in \mathbb{Q}$ 满足条件 $a < c < b$. □

如同我们在本节开头所说的那样, 以上关于实数系的构造方法源于 Dedekind. 实数系还有其它的构造方法, 例如 Cantor 用小数表示以及利用 Cauchy 序列也完成了实数系的构造. 如果用抽象的语言来描述, 则这些构造出来的对象是所谓的具有确界原理的有序域, 这样的域都是互相同构的.

第二章　极限

在微积分的发展过程中, 逐渐出现了对导数, 微分, 积分等概念严格化的要求. 极限理论就是在这个背景下建立起来的, 极限理论所用的语言又以所谓的 $\varepsilon-N$ 语言或 $\varepsilon-\delta$ 语言著称. 我们在今后的课程中会遇到各种各样的极限, 本章将研究最简单的一种情形, 即数列的极限. 这将涉及极限的计算, 极限存在性的判断, 极限的基本性质等等, 它们又和实数系的基本性质密切相关.

§2.1　数列极限

极限运算可以看成是从一列已知的数出发构造新数的一种手段, 它不同于初等的加减乘除等四则运算, 但却有着类似的性质, 正如确界不同于最大 (小) 数, 但有类似性质一样.

§2.1.1　数列极限的定义

按顺序排列的一列数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

称为一个**数列**, 记为 $\{a_n\}$. a_n 称为该数列的第 n 项, 有时也称为一般项或通项. 作为集合, 如果

$$\{a_n\,|\,n=1,\ 2,\ \cdots\}$$

是有界的, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的, 此时存在 M, 使得

$$|a_n|\leqslant M,\quad \forall\ n\geqslant 1.$$

注. 数列 $\{a_n\}$ 可以看成定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, 其中 $f(n)=a_n$.

通过考察当 n 变大时数列通项 a_n 的变化趋势, 我们就得到了数列极限的概念.

定义 2.1.1 (数列极限)**.** *设 $\{a_n\}$ 为数列, $A\in\mathbb{R}$. 如果任给 $\varepsilon>0$, 都存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 时, 有*

$$|a_n-A|<\varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 以 A 为极限, 或称 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A\ \text{ 或 }\ a_n\to A\ (n\to\infty).$$

从直观上看, 如果将数列看成实数轴上的一列点, 则极限就是这样一个点, 当 n 越来越大时, a_n 越来越靠近这个点. 为了用准确的数学语言来代替 “越来越靠近”

和“当 n 越来越大”这样的描述性语言, 我们要用到定义中的 ε 和 N, 这里的 N 一般是依赖于给定的 ε 的. 这种定义极限的方法也称为 $\varepsilon - N$ 语言法.

按照定义, 我们也可以这样来描述极限: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 只有至多有限项位于区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 之外. 因此, 如果存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\{a_n\}$ 中有无限项位于区间 $(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$ 之外, 则数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限 (这时该数列的极限可能不存在, 如果存在则极限也不等于 A).

当然, 我们也可以用 $\varepsilon - N$ 语言给出数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限的定义: 如果存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得任给正数 N, 均存在 $n_0 > N$ 满足不等式 $|a_{n_0} - A| \geqslant \varepsilon_0$, 则 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限.

命题 2.1.1. *如果数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是惟一的.*

证明. 如果数列 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2, 使得当 $n > N_1$ 时

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geqslant |A - B|.$$

如果 $A \neq B$, 则对于 $\varepsilon = |A - B|/2$, 上式不可能成立, 因此只能 $A = B$. □

如果数列没有极限, 则称它是发散的. 讨论数列的收敛与发散的问题简称为数列的敛散性问题. 从定义不难看出, 改变数列的有限项的值不改变其敛散性, 如果收敛的话也不改变极限的值.

例 2.1.1. *对于常数数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_n = a$, a 为常数, 有 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

按数列极限的定义, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

例 2.1.2. *研究数列 $\{(-1)^n\}$ 的敛散性.*

解. 这个数列是发散的. 这是因为, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 数 1 和 -1 不能同时落在区间 $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ 中, 因此总有无穷多项 $(-1)^n$ 在此区间之外. □

例 2.1.3. *设 $|q| < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.*

证明. $q=0$ 时结论显然成立. 设 $0<|q|<1$, 任给 $\varepsilon>0$, 取正整数 $N>\log_{|q|}\varepsilon$, 则当 $n>N$ 时,

$$|q^n-0|=|q|^n<|q|^N<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

上面的这个证明用到了对数函数的性质. 下面我们还可以用更初等的不等式估计的办法另给一个证明如下: 当 $0<|q|<1$ 时, $\dfrac{1}{|q|}>1$. 记 $\alpha=\dfrac{1}{|q|}-1>0$. 任给 $\varepsilon>0$, 取正整数 $N>\dfrac{1}{\alpha\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n}<\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon,$$

其中, 我们用到不等式

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2+\cdots+\alpha^n>n\alpha.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. □

我们在下面会列举更多用不等式估计求极限的例子.

例 2.1.4. 设 $\alpha>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$.

证明. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $N>\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$, 当 $n>N$ 时

$$\Big|\frac{1}{n^\alpha}-0\Big|=\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{N^\alpha}<\varepsilon,$$

由定义, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$. □

例 2.1.5. 设 $q>0$, $q\neq1$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\log_q n}=0$.

证明. 不妨设 $q>1$. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $N>q^{\frac{1}{\varepsilon}}$, 则当 $n>N$ 时

$$\Big|\frac{1}{\log_q n}-0\Big|=\frac{1}{\log_q n}<\frac{1}{\log_q N}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\log_q n}=0$. □

例 2.1.6. 设 C 为常数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}Ca_n=0$.

证明. 任给 $\varepsilon>0$, 记 $\varepsilon_0=\dfrac{\varepsilon}{|C|+1}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 故存在 N, 当 $n>N$ 时

$$|a_n|<\varepsilon_0,$$

从而当 $n > N$ 时, 有

$$|Ca_n| = |C||a_n| \leqslant |C|\varepsilon_0 < \varepsilon,$$

因此 $\lim_{n\to\infty} Ca_n = 0$. □

下面的结果在计算极限时十分有用.

定理 2.1.2 (夹逼原理). 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列, 且

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall\ n \geqslant N_0,$$

其中 N_0 为一正整数. 如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

则 $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A, 故存在 N_1, N_2, 当 $n > N_1$ 时

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, 我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon,$$

这说明 $\lim_{n\to\infty} b_n = A$. □

注. 如果 $|a_n| \leqslant b_n$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 时 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 这只要注意到夹逼不等式 $-b_n \leqslant a_n \leqslant b_n$ 即可.

例 2.1.7. 考虑无限循环小数 $A = 0.99999\cdots$, 问: A 是否小于 1 ?

解. 要比较大小, 必须先说清楚 A 是一个什么样的实数. 作为小数, A 有无限位非零. 一个合理的看法就是, A 应被视为一列有限小数 $\{a_n\}$ 的极限, 其中 $a_n = 0.99\cdots 9$ (n 个 9). 由于

$$|a_n - 1| = 10^{-n},$$

根据夹逼原理, $\{a_n\}$ 收敛到 1. 因为极限具有惟一性, 这说明 $A = 1$. □

注. 直观上看, 似乎 A 总应该比 1 小才对. 然而, 这种直观上得来的经验只对有限小数有效, 对于无限的情形往往要用极限来处理才行.

例 2.1.8. 设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

证明. 当 $n \geqslant 1$ 时, 有

$$0 < (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = n^{\alpha}\big[\big(1+\frac{1}{n}\big)^{\alpha} - 1\big] \leqslant n^{\alpha}\big[\big(1+\frac{1}{n}\big) - 1\big] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

根据前面的例子和夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}] = 0$. □

例 2.1.9. 设 $\alpha > 0$, $a > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^n} = 0$.

证明. 记 $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1+\beta$, $\beta > 0$. 由于 $n > 1$ 时, 有

$$(1+\beta)^n = 1 + n\beta + \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2 + \cdots + \beta^n > \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2,$$

故

$$0 < \frac{n^{\alpha}}{a^n} = \big[\frac{n}{(1+\beta)^n}\big]^{\alpha} < \big[\frac{2}{(n-1)\beta^2}\big]^{\alpha},$$

由夹逼原理和前面的例子即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^n} = 0$. □

例 2.1.10. 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证明. 取正整数 $N_0 > |a|$, 则当 $n > N_0$ 时, 有

$$\big|\frac{a^n}{n!}\big| = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n} \leqslant \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{n},$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. □

例 2.1.11. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证明. 注意到当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时 $(k-1)(n-k) \geqslant 0$, 从而 $k(n-k+1) \geqslant n$, 我们就有

$$(n!)^2 = (1\cdot n)(2(n-1))\cdots(k(n-k+1))\cdots(n\cdot 1) \geqslant n^n, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. □

例 2.1.12. 设 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明. 当 $a \geqslant 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n \geqslant 0$. 则有

$$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1+na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □

例 2.1.13. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明. 记 $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, 当 $n > 1$ 时,

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2,$$

从而有估计

$$0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

因此, 当 $n > 1$ 时, 有

$$1 < \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

例 2.1.14. 设 $a, b > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

证明. 不妨设 $a \geqslant b$, 则

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2},$$

根据前面的例子以及夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a = \max\{a, b\}$. □

例 2.1.15. $(*)$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 故存在 N_0, 使得当 $n > N_0$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$N > \max\{N_0, 2\varepsilon^{-1}|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0A|\},$$

则当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0A}{n} + \frac{(a_{N_0+1} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0A|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \\
&\leqslant \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0A|}{N} + \frac{n - N_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$. □

注. 这个例子说明, 如果一个数列收敛到 A, 则其前 n 项的平均值也收敛到 A. 反之则不然, 例如, 考虑数列 $\{a_n = (-1)^n\}$, 容易看出, 这个数列前 n 项的平均值收敛到 0, 但 $\{a_n\}$ 本身并不收敛.

例 2.1.16. (*) *任何实数都是某个有理数列的极限.*

证明. 设 A 为实数. 如果 A 为有理数, 则令 $a_n = A$ $(n \geqslant 1)$ 即可. 如果 A 为无理数, 令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 因此 a_n 都是有理数. 因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

由夹逼原理知 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. □

§2.1.2 数列极限的基本性质

为了更好地判断数列极限的存在性和计算数列极限, 我们来研究数列极限的基本性质.

命题 2.1.3 (有界性)**.** *设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.*

证明. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A. 取 $\varepsilon = 1$, 则由极限定义, 存在 N, 当 $n > N$ 时

$$|a_n - A| \leqslant 1,$$

即

$$|a_n| \leqslant |A| + 1, \quad \forall\, n > N.$$

令

$$M = \max\big\{|a_i|\ (1 \leqslant i \leqslant N),\ |A| + 1\big\},$$

则 $|a_n| \leqslant M$, $\forall\, n \geqslant 1$. □

由此命题立知, 无界数列必定发散. 对于无界的数列, 我们有时也可以考察其变化趋势. 为此, 设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果任给 $A > 0$, 均存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $a_n > A$, 则称 $\{a_n\}$ 发散到 $+\infty$, 或称 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{或} \quad a_n \to +\infty\ (n \to \infty).$$

类似地, 如果任给 $A < 0$, 均存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $a_n < A$, 则称 $\{a_n\}$ 发散到 $-\infty$, 或称 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \text{或} \quad a_n \to -\infty\ (n \to \infty).$$

如果 $\{|a_n|\}$ 发散到 $+\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 发散到 ∞, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad a_n \to \infty\ (n \to \infty).$$

例 2.1.17. *设 $|q| > 1$, 研究数列 $\{q^n\}$ 的敛散性.*

解. 当 $q > 1$ 时, 令 $\alpha = q - 1 > 0$. 任给 $A > 0$, 取 $N > \dfrac{A}{\alpha}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$q^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \cdots + \alpha^n > n\alpha > N\alpha > A,$$

因此 $q^n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

当 $q < -1$ 时, 同理可证 $|q|^n \to +\infty$, 因此 $q^n \to \infty\ (n \to \infty)$. □

例 2.1.18. *设 $q > 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_q n = +\infty$.*

证明. 任给 $A > 0$, 取 $N > q^A$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\log_q n > \log_q N > A,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_q n = +\infty$. □

象有限极限的夹逼原理一样, 无限极限也有夹逼原理, 我们留给读者自己完成它的叙述和证明. 我们仍然回到有限极限的情形.

命题 2.1.4 (绝对值性质)**.** 设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A, 则 $\{|a_n|\}$ 收敛到 $|A|$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

从而

$$\big||a_n| - |A|\big| \leqslant |a_n - A| < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. □

推论 2.1.5. 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 0 当且仅当 $|a_n|$ 收敛到 0; 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A 当且仅当 $|a_n - A|$ 收敛到 0.

证明. 利用极限的绝对值性质和极限的定义即可. □

命题 2.1.6 (保序性质)**.** 设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A, $\{b_n\}$ 收敛到 B, 则有
(1) 如果存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时 $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$;
(2) 反之, 如果 $A > B$, 则存在 N, 使得当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$.

证明. (1) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2, 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N_1; \ \ |b_n - B| < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N_2.$$

令 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时, 有

$$A - B = (A - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - B) \geqslant (A - a_n) + (b_n - B) \geqslant -2\varepsilon,$$

因为 ε 是任意取的, 上式表明 $A - B \geqslant 0$, 即 $A \geqslant B$.

(2) 如果 $A > B$, 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$, 则存在 N_1, N_2, 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N_1; \ \ |b_n - B| < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N_2.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时, 有

$$a_n - b_n = (a_n - A) + (A - B) + (B - b_n) > -\varepsilon + (A - B) - \varepsilon = 0,$$

即 $a_n > b_n, \ \forall\ \ n > N$. □

推论 2.1.7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 如果 $A \neq 0$, 则存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|.$$

证明. 由极限的绝对值性质, 有

$$\frac{1}{2}|A| < \lim_{n\to\infty}|a_n| = |A| < \frac{3}{2}|A|,$$

再由极限的保序性质即得欲证结论. □

例 2.1.19. 设 $q>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_q n}{n}=0$.

解. 任给 $\varepsilon>0$, 利用前一小节中的例子, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 < q^{\varepsilon},$$

由极限的保序性质, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\sqrt[n]{n} < q^{\varepsilon},$$

即

$$\frac{\log_q n}{n} < \varepsilon, \quad \forall\ n > N.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_q n}{n}=0$. □

命题 2.1.8 (四则运算)**.** *设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 A, $\{b_n\}$ 收敛到 B, 则有*

(1) $\{\alpha a_n+\beta b_n\}$ 收敛到 $\alpha A+\beta B$, 其中 α, β 为常数;

(2) $\{a_n b_n\}$ 收敛到 AB;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\{a_n/b_n\}$ 收敛到 A/B.

证明. (1) 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, N_2, 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}, \quad \forall\ n > N_1; \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}, \quad \forall\ n > N_2.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}|(\alpha a_n+\beta b_n)-(\alpha A+\beta B)| &\leqslant |\alpha||a_n-A|+|\beta||b_n-B|\\ &\leqslant |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}+|\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}\\ &< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B$.

(2) 利用极限的有界性质, 存在 M, 使得

$$|b_n| \leqslant M,\ \forall\ n \geqslant 1.$$

因此有

$$0 \leqslant |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leqslant M|a_n - A| + |A||b_n - B|,$$

利用 (1) 和夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

(3) 根据 (2), 我们只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$ 即可. 根据极限保序性质的推论, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|b_n| > \dfrac{|B|}{2}$. 因此

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leqslant \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|, \quad \forall\ n > N.$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$. □

例 2.1.20. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{4n^2-3n+1}$.

解. 由前一小节的例子以及极限的四则运算性质, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{4n^2-3n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\\ &= \frac{1-0}{4-0-0} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

下面我们引入数列的子列的概念, 并研究数列的极限和其子列的极限之间的关系. 设

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

是数列, 如果

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

是一列严格递增的正整数, 则称数列

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots$$

为原数列 $\{a_n\}$ 的子列, 记为 $\{a_{n_k}\}$. 两个特殊的子列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 分别称为偶子列与奇子列.

命题 2.1.9. (1) 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A, 则它的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 A.

(2) 如果 $\{a_n\}$ 的偶子列与奇子列均收敛到 A, 则 $\{a_n\}$ 也收敛到 A.

证明. 用极限的定义即可, 略. □

例 2.1.21. 研究数列 $\left\{a_n = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^n]\right\}$ 的敛散性.

解. 因为 $a_{2k} = 1$, $a_{2k-1} = 0$, 故 $\{a_n\}$ 的偶子列和奇子列的极限不同, 这说明 $\{a_n\}$ 是发散的. □

例 2.1.22. $(*)$ 研究数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性.

解. 这个数列是发散的. (反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = A$, 则

$$2\sin 1\cos n = \sin(n+1) - \sin(n-1) \to A - A = 0 \quad (n\to\infty).$$

因为 $\sin 1 \neq 0$, 上式表明 $\cos n \to 0$ $(n\to\infty)$, 从而

$$\sin 2n = 2\sin n\cos n \to 2A\cdot 0 = 0 \quad (n\to\infty),$$

这说明 $A = 0$, 此时

$$\sin^2 n + \cos^2 n \to 0 + 0 = 0 \quad (n\to\infty).$$

这和恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 相矛盾. □

习题 2.1

1. 根据数列极限的定义, 判断下列论断是否正确并说明理由:
(1) 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在实数 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $|a_n - A| \leqslant \varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;
(2) 如果任给 $\varepsilon \in (0,1)$, 均存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;
(3) 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - A| \leqslant 2\varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;
(4) 如果对任意正整数 m, 均存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - A| \leqslant \dfrac{1}{m}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;

2. 按照数列极限的定义证明:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{2n^2-1} = \frac{3}{2};\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0;$$
$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1;\quad (4)\ \lim_{n\to\infty}\arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

3. 判断下列数列的敛散性:

$$(1)\ \{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\};\qquad (2)^*\ \{\sin(n^2)\};\quad (3)\ \{\sqrt[n]{n^2+1}\};$$
$$(4)\ \Big\{\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2}\Big\};\quad (5)^*\ \{\cos n\};\qquad (6)\ \Big\{(-1)^n + \frac{1}{n}\Big\}.$$

4. 求下列数列的极限

$$(1)\ \Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\Big\};\qquad (2)\ \Big\{\frac{2n-1}{3n-2}\Big\};\quad (3)\ \Big\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\Big\};$$
$$(4)\ \{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\};\quad (5)\ \{n^2 2^{-n}\};\quad (6)\ \Big\{\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\Big\}.$$

5. 试用极限的语言给出数列 $\{a_n\}$ 不发散到 $+\infty$ 的定义.

6. 按照数列极限的定义证明:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty;\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n-1}=+\infty;$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{n+1}=-\infty;\quad (4)\ \lim_{n\to\infty}(-1)^n(\sqrt{n}-1)=\infty.$$

7. 设 $a_n\leqslant A\leqslant b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

8. 设 $a,b,c>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}$.

9. $(*)$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=A$.

10. $(*)$ 证明:

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$;

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$;

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $a_n>0$ $(n\geqslant 1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$.

(5) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $a_n>0$ $(n\geqslant 1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

11. $(*)$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=\frac{1}{2}A.$$

12. 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\log_2(n+1)-\log_2 n\big)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\big)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\big)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(1-\dfrac{1}{2^2}\big)\big(1-\dfrac{1}{3^2}\big)\cdots\big(1-\dfrac{1}{n^2}\big)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, 则存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时 $a_n > 0$.

14. 设 $\{a_n\}$ 均为正数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

15. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}[na_n] = A$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

16. $(*)$ 设 $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

17. 证明, 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它的奇子列和偶子列收敛到同一极限.

18. 设 $\{a_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 无上界, 则 $\{a_n\}$ 存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 发散到 $+\infty$.

§2.2 单调数列的极限

在前面一节里, 我们讨论了数列极限的很多例子. 然而, 在一般情况下, 数列极限无法确切地计算出来, 并且有时我们也不需要知道极限的准确值, 只需判断极限是否存在以及了解极限的性质即可. 现在我们就给出一种特殊情况下数列极限存在性的判别法, 它依赖于实数的一个基本性质, 即在第一章中我们已经提到过的**确界原理**: 非空的数集如果有上界则必有上确界, 如果有下界则必有下确界.

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 如果

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 当上式中的 "$\leqslant$" 号换成 "$<$" 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的; 如果

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 当上式中的 "$\geqslant$" 号换成 "$>$" 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递减的; 单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列.

定理 2.2.1 (单调数列的极限). *设 $\{a_n\}$ 为单调数列.*
(1) 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$;
(2) 如果 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$.

证明. (1) 记 $M = \sup\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$, 先考虑 M 有限的情形. 任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N, 使得

$$M - \varepsilon < a_N \leqslant M,$$

因为 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故当 $n > N$ 时

$$M - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant M < M + \varepsilon,$$

由数列极限的定义即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M = \sup\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$.

如果 $M = +\infty$, 则任给 $A > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N, 使得 $a_N > A$. 由于 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故当 $n > N$ 时有 $a_n \geqslant a_N > A$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}.$$

(2) 可同 (1) 一样类似证明, 也可考虑 $\{-a_n\}$ 然后直接利用 (1). □

从定理立即得到下面的推论:

推论 2.2.2. 单调有界数列必有（有限）极限.

例 2.2.1. (∗) 任何收敛数列都有单调的收敛子列.

证明. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A. 如果 $\{a_n\}$ 中有无限项等于 A, 则它们构成了所需单调子列. 否则, 考虑 $\{a_n\}$ 中下面两类项, 一类满足条件 $a_n < A$, 另一类满足条件 $a_n > A$. 这两类中至少有一类含有无限项, 不妨设有无限项 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n < A$, 他们构成了一个收敛子列. 为了简单起见, 下面我们假设 $a_n < A, \forall\ n \geqslant 1$. 我们要从 $\{a_n\}$ 中找一个单调递增的子列出来.

这个子列可以这样构造: 取 $n_1 = 1$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 故存在 $n_2 > n_1 = 1$, 使得 $a_{n_2} \in (a_1, A)$. 同理, 存在 $n_3 > n_2$, 使得 $a_{n_3} \in (a_{n_2}, A)$. 如此继续, 我们就找到了 (严格) 单调递增的子列 $\{a_{n_k}\}$. □

例 2.2.2. 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解. 用数学归纳法容易验证 $\sqrt{2} \leqslant a_n < 2, \forall\ n \geqslant 1$. 因此

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2a_n} > a_n,$$

即 $\{a_n\}$ 是单调递增有界数列, 从而收敛, 记其极限为 A, 则 $A \geqslant \sqrt{2} > 0$. 我们有

$$2 + A = \lim_{n\to\infty}(2 + a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = A^2,$$

上式的惟一正解为 $A = 2$, 这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 2. □

例 2.2.3. 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{1}{a_n}\Big)$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解. 由数学归纳法易见 $a_n > 0, \forall\ n \geqslant 1$. 进一步有

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n} - 2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\Big)^2 \geqslant 0,$$

因此当 $n \geqslant 2$ 时, 有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big) \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n,$$

即 $\{a_n\}$ 从 $n \geqslant 2$ 开始单调递减且有下界, 因此收敛. 其极限记为 A, 则 $A \geqslant 1$. 另一方面,

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{1}{a_n}\big) = \frac{1}{2}\big(A + \frac{1}{A}\big),$$

上式的惟一正解为 $A = 1$, 这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 1. □

例 2.2.4. 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解. 利用数学归纳法易见 $\dfrac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$, 并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{a_{2k}\}$ 单调递增, 因此它们都是收敛的, 极限分别记为 A, B. 则

$$\begin{aligned} B &= \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k-1}} = \frac{1}{1+A}, \\ A &= \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k}} = \frac{1}{1+B}, \end{aligned}$$

从上式解出惟一的正解 $A = B = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

下面我们讨论本课程中的一个重要极限. 考虑

$$a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n, \quad b_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

我们来说明 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的, $\{b_n\}$ 是严格单调递减的. 事实上,

$$\begin{aligned} a_n &= \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\big(1 - \frac{1}{n}\big) + \cdots + \frac{1}{n!}\big(1 - \frac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \frac{n-1}{n}\big) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!}\big(1 - \frac{1}{n+1}\big) + \cdots + \frac{1}{n!}\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1 - \frac{n-1}{n+1}\big) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1 - \frac{n}{n+1}\big) \\ &= a_{n+1}, \end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 另一方面, 当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\big) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 收敛, 其极限记为 e, 称为自然对数的基底. 我们在第五章第七节中将证明这是一个无理数, 计算表明 (关于近似计算, 请参考本书第五章第八节以及第九章第四节)

$$e = 2.7182818284590\cdots.$$

另一方面, 由

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = \big(1+\frac{1}{n-1}\big)^n > \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} = b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减, 且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n\big(1+\frac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} a_n = e,$$

因此有下面的不等式

$$\big(1+\frac{1}{n}\big)^n < \big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+1} < e < \big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+2} < \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{2.1}$$

例 2.2.5. 证明 $\{e_n\}$ 收敛到 e, 其中

$$e_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

证明. 从前一段的讨论我们已经知道 $a_n < e_n, \forall\, n > 1$. 对于任意固定的 $k > 1$, 当 $n > k$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\big(1-\frac{1}{n}\big)+\cdots+\frac{1}{n!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-1}{n}\big) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\big(1-\frac{1}{n}\big)+\cdots+\frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{k-1}{n}\big), \end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$, 得

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

由于 k 可以任意固定, 我们就有

$$a_n < e_n < e, \quad \forall\, n > 1.$$

根据夹逼原理立知 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$. □

例 2.2.6. 证明:

(1) $(\frac{n+1}{e})^n < n! < e(\frac{n+1}{e})^{n+1}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}.$

证明. 由 (2.1), 对 $k=1,2,\cdots,n$, 均有

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1},$$

将这 n 个不等式相乘, 得

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

整理后就是 (1) 中要证的不等式. (2) 可由 (1) 及夹逼原理得到. □

以 e 为基底的对数函数记为 $\ln x$, 由 (2.1) 可得

$$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

即

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k},\ \text{或}\ \ \frac{1}{k+1} < \ln(1+k)-\ln k < \frac{1}{k}.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$, 将上述不等式相加, 得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

如果令

$$c_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

则 $c_n > \ln(n+1)-\ln n > 0$, 且

$$c_{n+1}-c_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0,$$

这说明 $\{c_n\}$ 收敛, 其极限记为 γ, 称为 Euler 常数, 计算表明

$$\gamma = 0.5772156649\cdots.$$

例 2.2.7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解. 利用 c_n 的收敛性, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(c_{2n}+\ln(2n)\right)-(c_n+\ln n)\right]\\
&=\gamma-\gamma+\ln 2=\ln 2.
\end{aligned}$$

下面, 我们利用单调数列来研究一般的有界数列. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 我们要研究它的收敛性. 我们不知道 a_n 是否逐渐趋于某个数, 一个好的想法就是去考虑

n 很大时 $\{a_n\}$ 中 "最大" 的项和 "最小" 的项, 看看它们是否相近. 当然, "最大" 和 "最小" 项不一定存在, 但我们可以用 "上确界" 和 "下确界" 来分别代替它们. 为此, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

由命题 1.2.4 易见 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列, 且

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n.$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**, 记为

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n.$$

例 2.2.8. 计算数列 $\left\{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的上极限和下极限.

解. 按照下确界的定义, 当 n 为奇数时

$$\underline{a}_n = \inf\Big\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}, \cdots\Big\} = -\frac{1}{n};$$

当 n 为偶数时,

$$\underline{a}_n = \inf\Big\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots\Big\} = -\frac{1}{n+1};$$

即

$$\{\underline{a}_n\} = \Big\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \cdots\Big\},$$

从而 $\{a_n\}$ 的下极限为 0. 类似地有

$$\{\overline{a}_n\} = \Big\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots\Big\},$$

从而 $\{a_n\}$ 的上极限也为 0. □

例 2.2.9. 计算数列 $\left\{a_n = [1+(-1)^n]\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n\right\}$ 的上极限和下极限.

解. 按照下确界的定义易见 $\underline{a}_n = 0, \forall\, n \geqslant 1$. 因此 $\{a_n\}$ 的下极限为 0. 按照上确界的定义以及数列 $\big\{\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n\big\}$ 单调性和收敛性不难看出 $\overline{a}_n = 2e, \forall\, n \geqslant 1$. 因此 $\{a_n\}$ 的上极限为 $2e$. □

下面的定理给出了有界数列是否收敛的一个判别方法.

定理 2.2.3. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 则下列命题等价:

(1) $\{a_n\}$ 收敛;

(2) $\{a_n\}$ 的上极限和下极限相等;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{a}_n - \underline{a}_n) = 0$.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A. 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

由确界的定义立得

$$A - \varepsilon \leqslant \underline{a}_n \leqslant \overline{a}_n \leqslant A + \varepsilon, \quad \forall\, n > N.$$

这说明 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 均收敛到 A.

(2) $\Longrightarrow$ (1): 利用 $\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n$ 和夹逼原理即可.

(2) 和 (3) 的等价是显然的. □

一般来说, 上极限和下极限不再满足四则运算的等式, 不过保序性仍然成立.

命题 2.2.4. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为有界数列.

(1) 如果存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时 $a_n \geqslant b_n$, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n;$$

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明. (1) 当 $n > N_0$ 时

$$\underline{b}_n \leqslant b_k \leqslant a_k, \quad \forall\, k \geqslant n,$$

关于 k 取下确界, 得

$$\underline{b}_n \leqslant \underline{a}_n, \quad \forall\, n > N_0,$$

由极限的保序性即得

$$\varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

上极限的情形可类似证明.

(2) 利用不等式 $a_n + b_n \leqslant \overline{a}_n + \bar{b}_n$ 以及极限的保序性即可. □

例 2.2.10. 设 $a_n > 0$, $a_n \to A$ $(n \to \infty)$. 记 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

证明. 由已知条件, 任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$0 < a_n < A + \varepsilon.$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$b_n \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_N}(A+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_N (A+\varepsilon)^{-N}}\,(A+\varepsilon),$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant A+\varepsilon.$$

同理可证

$$\varliminf_{n\to\infty} b_n \geqslant A-\varepsilon,$$

因为 ε 是任取的, 从而必有

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_n = A = \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 A. □

例 2.2.11. 设 $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=A.$$

证明. 令 $a_1=b_1$, $a_{n+1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n\geqslant 1$. 由题设, $\{a_n\}$ 收敛到 A. 因此由上例, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A.$$

例 2.2.12. $(*)$ 设数列 $\{a_n\}$ 满足以下条件:

$$a_n\geqslant 0,\ a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,\quad \forall\ m,\ n\geqslant 1.$$

证明数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 收敛.

证明. 由归纳法易见 $0\leqslant a_n\leqslant na_1$, 因此 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为有界数列. 设 k 是任一固定的正整数, 当 $n\geqslant k$ 时, n 可以表示为

$$n=mk+l,\quad 0\leqslant l\leqslant k-1.$$

因此

$$a_n\leqslant a_{mk}+a_l\leqslant ma_k+la_1\leqslant \frac{n}{k}a_k+(k-1)a_1,$$

即

$$\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}+\frac{k-1}{n}a_1,\quad \forall\ n\geqslant k.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_k}{k}+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{k-1}{n}a_1=\frac{a_k}{k}.$$

因为 k 是任取的, 在上式中令 $k\to\infty$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{a_k}{k},$$

这说明 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 的上下极限一定是相等的, 从而是收敛的. □

习题 2.2

1. 研究下列数列的单调性并求极限:

$$(1)\ a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n};\qquad (2)\ a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n};$$
$$(3)\ a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{6(1+a_n)}{7+a_n};\qquad (4)\ a_1\in(0,1),\ a_{n+1}=a_n(1-a_n).$$

2. 设 $c>0$, $a_1=\sqrt{c}$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

3. 设 $a_1\geqslant 0$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

4. 设 $c,\ a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\big(a_n+\dfrac{c}{a_n}\big)$, 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

5. 设 $a_1\geqslant 0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$, 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

6. 设 $a_1=c>0$, $a_{n+1}=c+\dfrac{1}{a_n}$, 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

7. 研究下列数列的单调性并求极限:
(1) $a_1>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{a_n}$; (2) $a_1>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{5}{8a_n}$;
(3) $a_1\in(0,\sqrt{2}),\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2}a_n\big(1-\dfrac{1}{2}a_n^2\big)$.

8. 用归纳法证明 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (x\geqslant -1)$, 对 $x=-\dfrac{1}{(1+n)^2}$ 应用 Bernoulli 不等式说明 $a_n=\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n$ 的严格单调性.

9. 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{1}{n}\big)^n;\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\big(\frac{n+1}{n+2}\big)^n;\quad (3)\ \lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{1}{n^2}\big)^n.$$

10. (∗) 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{2n}\big)^n;\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{2}{n}\big)^n;\quad (3)\ \lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\big)^n.$$

11. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\big[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\big]=\ln 2$.

12. 计算下列数列的上极限和下极限:
(1) $\big\{a_n=1+(-1)^n\big\}$; (2) $\Big\{a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{n}\Big\}$.

13. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 证明

$$\varliminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\varlimsup_{n\to\infty}a_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\varliminf_{n\to\infty}a_n.$$

14. 用上下极限的思想证明, 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = A.$$

15. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = AB.$$

16. $(*)$ 设 $0 < a < b$, $a_1 = a$, $b_1 = b$.

(1) 如果 $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 如果 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

§2.3 Cauchy 准则

在前一节我们对于单调数列给出了极限存在性的判别方法. 现在我们对一般的数列给出极限存在与否的一个判别方法, 基本的想法与考虑上下极限时是类似的: 如果 a_n 逐渐趋于某个数, 则 n 很大时 a_n 之间的差别应该很小. 为此我们引入下面的定义.

定义 2.3.1. *设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列.

例 2.3.1. *对于 $n \geqslant 1$, 定义*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

则 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

证明. 对于 $n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geqslant \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

由定义即知 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列. □

例 2.3.2. *对于 $n \geqslant 1$, 定义*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

则 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列.

证明. 首先我们注意到不等式

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

因此, 当 $m>n$ 时,

$$\begin{aligned}a_m-a_n&=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{m\sqrt{m}}\\&<2\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)+2\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\Big)+\cdots\\&=\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{m}}<\frac{2}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

由此可以看出 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. □

例 2.3.3. *设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果存在常数 $\alpha\geqslant 0$, $0\leqslant q<1$, 以及 N_0, 使得当 $n>N_0$ 时, 有*

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant \alpha q^n,$$

则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.

证明. 当 $m>n>N_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&\leqslant|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&\leqslant\alpha q^{m-1}+\alpha q^{m-2}+\cdots+\alpha q^n\\&=\alpha q^n(q^{m-n-1}+q^{m-n-2}+\cdots+q+1)\\&\leqslant\alpha\frac{q^n}{1-q}.\end{aligned}$$

上式对 $m=n$ 当然也成立. 由于 $q^n\to 0$ $(n\to\infty)$, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, 使得

$$\alpha\frac{q^{N_1}}{1-q}<\varepsilon.$$

于是, 当 $m,n>N=\max\{N_0,N_1\}$ 时, 不妨设 $m\geqslant n$, 有

$$|a_m-a_n|\leqslant\alpha\frac{q^n}{1-q}\leqslant\alpha\frac{q^{N_1}}{1-q}<\varepsilon,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列. □

命题 2.3.1. *Cauchy 数列必定是有界数列.*

证明. 按定义, 取 $\varepsilon=1$, 则存在 N, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<1$$

令 $M=\max\{|a_k|+1\,\big|\,1\leqslant k\leqslant N+1\}$, 则当 $n\leqslant N$ 时显然 $|a_n|\leqslant M$; 而当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|\leqslant|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|\leqslant M,$$

这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列. □

下面的定理是本节主要结果, 它反映了实数系的完备性质.

定理 2.3.2 (Cauchy 准则)**.** $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

证明. 充分性: 设 $\{a_n\}$ 收敛到 A. 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-A|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-A|+|A-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.

必要性: 设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 由命题 2.3.1, $\{a_n\}$ 是有界数列, 记 A 为其上极限. 我们来说明 $\{a_n\}$ 收敛到 A.

事实上, 由于 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $m,\ n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon<a_m-a_n<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad\forall\ m,\ n>N.$$

在上式中令 $m\to\infty$, 利用上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}a_m-a_n\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon,\quad\forall\ n>N.$$

即

$$|A-a_n|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon,\quad\forall\ n>N,$$

这说明 $\{a_n\}$ 收敛到 A. □

注. (1) Cauchy 列未必是单调数列, 例如数列 $\left\{a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 就是这样的例子.

(2) Cauchy 准则的重要性在于, 在不了解数列的单调性或极限的具体形式时往往也能判断极限的存在性. 以后凡是涉及极限的场合都有相应的 Cauchy 准则.

习题 2.3

1. 判断下面的数列是否为 Cauchy 列:

   (1) $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$;

   (2) $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

   (3) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$.

2. 设 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0,\quad \forall\ p\geqslant 1,$$

则 $\{a_n\}$ 是否必为 Cauchy 数列? (提示: 考虑本节例子.)

3. 定义 $a_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n!}$, 用 Cauchy 准则证明 $\{a_n\}$ 是收敛的.

4. 设 $|q|<1$, 定义 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}q^n$, 用 Cauchy 准则证明 $\{a_n\}$ 是收敛的.

5. 定义 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$, 用 Cauchy 准则证明 $\{a_n\}$ 是收敛的.

6. 设 $\{b_n\}$ 为单调递增有界数列. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant b_{n+1}-b_n,\quad \forall\ n\geqslant 1,$$

则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列, 从而是收敛的.

7. 设 $0\leqslant q<1$ 为常数, 数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant q|a_n-a_{n-1}|,\quad \forall\ n\geqslant 2,$$

证明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列. 请用本题结论重新考察前节相关习题.

8. $(*)$ 设 $\{a_n\}$ 为数列. 如果存在常数 M, 使得

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\leqslant M,\quad \forall\ n\geqslant 1,$$

则称 $\{a_n\}$ 为有界变差数列. 证明, 有界变差数列均为 Cauchy 数列.

9. $(*)$ 设 $a_0=a$, $a_1=b$, 定义

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2}),\quad \forall\ n\geqslant 2,$$

证明 $\{a_n\}$ 为有界变差数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}(a+2b)$.

§2.4 Stolz 公式

在初次阅读本章时, 本节内容可以略过, 也可以结合第五章第六节一起阅读.

在这一节我们给出计算极限的一个比较方便的办法, 它可以用来处理满足特定条件的两个数列的商的极限. 先介绍一个引理.

引理 2.4.1. 设 $b_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 且

$$m \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant M, \quad \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

则有

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

证明. 由已知条件, 得

$$mb_k \leqslant a_k \leqslant Mb_k, \quad \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

将这些不等式从 $k = 1$ 到 n 加起来, 即得

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leqslant M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

由此易得欲证不等式. □

定理 2.4.2 (Stolz 公式之一)**.** 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 为数列, 且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

证明. 分情况讨论.

(1) A 为有限实数. 任给 ε, 由已知条件, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < A + \varepsilon.$$

利用上面的引理, 当 $n > N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = \frac{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < A + \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{x_n}{y_n} - A\Big| &= \Big|\Big(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A\Big)\frac{y_n - y_N}{y_n} + \frac{x_N - Ay_N}{y_n}\Big| \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{|x_N - Ay_N|}{|y_n|}.\end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$, 利用 $y_n \to +\infty$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Big|\frac{x_n}{y_n} - A\Big| \leqslant \varepsilon,$$

因为 ε 是任意取的, 故有

$$\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|=0,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

(2) $A=+\infty$. 此时, 存在 N, 当 $n>N$ 时

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>1,$$

即

$$x_n-x_{n-1}>(y_n-y_{n-1})>0,\quad \forall\ n>N.$$

特别地, $n>N$ 时 $\{x_n\}$ 也是严格单调递增的, 且

$$\begin{aligned}x_n-x_N&=(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_{N+1}-x_N)\\&>(y_n-y_{n-1})+\cdots+(y_{N+1}-y_N)=y_n-y_N,\end{aligned}$$

由 $y_n\to+\infty$ 得 $x_n\to+\infty$. 将 (1) 中 x_n 和 y_n 的位置互换, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\Big)^{-1}=0,$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{y_n}{x_n}\Big)^{-1}=+\infty.$$

(3) $A=-\infty$. 这时只要将 x_n 换成 $-x_n$, 然后利用 (2) 即可. □

定理 2.4.3 (Stolz 公式之二). 设数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减趋于 0, 数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

证明. 和前面定理的证明一样, 分情况讨论.

(1) A 为有限实数. 我们把极限的条件改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}=A.$$

任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$A-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}<A+\varepsilon,$$

和上面定理中 (1) 的证明一样, 当 $m > n > N$ 时, 有

$$(A-\varepsilon)(y_n - y_m) \leqslant (x_n - x_m) \leqslant (A+\varepsilon)(y_n - y_m),$$

令 $m \to \infty$, 得

$$(A-\varepsilon)y_n \leqslant x_n \leqslant (A+\varepsilon)y_n, \quad \forall\ n > N,$$

即

$$(A-\varepsilon) \leqslant \frac{x_n}{y_n} \leqslant (A+\varepsilon), \quad \forall\ n > N,$$

这说明 $x_n/y_n \to A\ (n \to \infty)$.

(2) $A = +\infty$. 任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} > M.$$

类似上面的证明, 当 $m > n > N$ 时, 有

$$x_n - x_m > M(y_n - y_m),$$

令 $m \to \infty$, 得

$$x_n \geqslant My_n, \quad \forall\ n > N,$$

即

$$\frac{x_n}{y_n} \geqslant M, \quad \forall\ n > N,$$

这说明 $x_n/y_n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

(3) $A = -\infty$. 将 (2) 中 x_n 换成 $-x_n$ 即可. □

例 2.4.1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{A}{2}.$$

证明. 因为 n^2 关于 n 单调递增趋于 $+\infty$, 故由 Stolz 公式, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} a_n = \frac{A}{2}.\end{aligned}$$

这个例子当然也可以直接用极限的定义证明. □

例 2.4.2. 设 k 为正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{2}.$$

证明. 用 Stolz 公式, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\Big)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^{k-1}+\cdots}{(k+1)kn^{k-1}+\cdots}\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

这个结果对于 $k>-1$ 的实数都是成立的, 这涉及下一章函数极限的内容. □

例 2.4.3. 设 $x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall\ n\geqslant 1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$.

证明. 由归纳法易见 $0<x_n<1$, $\forall\ n\geqslant 1$. 从而

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n,$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递减有界数列. 设 $x_n\to a\ (n\to\infty)$, 在上式中令 $n\to\infty$, 得

$$a=a\cdot(1-a),$$

解出 $a=0$, 即 $x_n\to 0$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\big(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1,$$

由 Stolz 公式, 有

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=1.$$

请读者思考: 如果不用 Stolz 公式, 此极限怎样证明？ □

习题 2.4

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, k 为非负整数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}(a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n)=\frac{A}{k+1}.$$

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-A)=B$, k 为正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}-\frac{A}{k+1}\Big)=\frac{B}{k}+\frac{A}{2}.$$

3. 设 $a_1 \in (0,1)$, $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, k 为正整数. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}(a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n) = \frac{1}{k}.$$

4. 设 $k \geqslant 2$ 为正整数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2n}\Big) = \frac{k}{12}.$$

5. 证明下列等式:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}) = \frac{2}{3};\quad (2)\ \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\Big) = \frac{1}{2}.$$

6. 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2a_n}$, 证明

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1,\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2 - n}{\ln n} = \frac{1}{4}.$$

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = A$, 证明 ($p$ 为正整数):

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = A,\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}a_k = \frac{A}{p+1}.$$

8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2} - a_n) = A$, 证明

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \frac{A}{2},\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n} = 0.$$

9. 利用二项式定理证明下面的估计:

$$1+\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{2n(n+2)^2} \leqslant \Big(1+\frac{1}{n(n+2)}\Big)^n \leqslant 1+\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{2n(n+2)^2}+\frac{n-1}{2n(n+2)^3}.$$

10. 利用上一题和 Stolz 公式证明

$$\lim_{n\to\infty} n\big[e - \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\big] = \frac{1}{2}e.$$

11. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n = 1$;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\big[\dfrac{1}{n} - \ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big)\big] = \dfrac{1}{2}$;

(3) 利用 Stolz 公式证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} - \ln n - \gamma\big) = \dfrac{1}{2}$.

§2.5 实数系的基本性质

从前面几节的内容我们看到, 数列极限的存在性依赖于实数系的基本性质. 例如, 我们用确界原理导出了有界单调数列的极限存在性, 进而导出了 Cauchy 准则. 为了进一步研究的需要, 我们再介绍实数的几条基本性质, 并说明这些基本性质之间其实是互相等价的.

下面的结果通常称为 "闭区间套原理".

定理 2.5.1 (Cantor)**.** *设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为递降闭区间套序列, 即*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots .$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在惟一的点 c, 使得 $c \in [a_n, b_n]$, $\forall\ n \geqslant 1$.

证明. 由已知条件我们知道, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 b_1, $\{b_n\}$ 单调递减且有下界 a_1. 这说明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 设极限分别为 a, b. 由极限的保序性, 有

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

即

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \to 0\ (n \to \infty),$$

这说明 $a = b$. 于是 $c = a = b \in [a_n, b_n]$, $\forall\ n \geqslant 1$. 如果另有 $c' \in [a_n, b_n]$, $\forall\ n \geqslant 1$, 则由夹逼原理即知 $c' = a = b = c$. $\square$

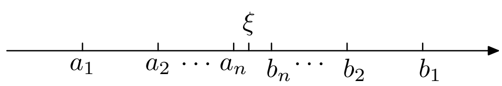


图 2.1 闭区间套

注. 把定理中的闭区间套换成开区间套时结论一般不再成立, 如

$$(0,1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset \cdots \supset (0, \frac{1}{n}) \supset \cdots$$

是开区间套, 但这些开区间之交为空集.

例 2.5.1. *实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数集.*

证明. 我们来证明 $[0,1]$ 是不可数的. (反证法) 显然, $[0,1]$ 是无限集, 如果它不是不可数的, 则一定是无限可数集, 因此可以记为

$$[0,1] = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}.$$

将 $[0,1]$ 三等分, 必有一个等分区间不含 x_1, 记该区间为 $[a_1,b_1]$. 再对 $[a_1,b_1]$ 三等分, 必有一个等分区间不含 x_2, 记该区间为 $[a_2,b_2]$. 如此继续等分 $[a_2,b_2]$ 等, 我们就得到闭区间套

$$[0,1]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

使得 $b_n-a_n=\frac{b-a}{3^n}\to 0\ (n\to\infty)$, 且 $x_n\notin[a_n,b_n]$. 根据闭区间套原理, 存在 $\xi\in[a_n,b_n]$, $\forall\ n\geqslant 1$. 显然 $\xi\in[0,1]$, 但 $\xi\neq x_n$, $\forall\ n\geqslant 1$. 这就导出了矛盾. □

这个例子说明无理数集是不可数的, 因此无理数远比有理数多, 因为下面的例子表明有理数集是可数的.

例 2.5.2. *有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.*

证明. 我们只要证明正有理数可数就可以了. 正有理数均可表示为形如 p/q 的分数, 其中 p, q 为正整数, 且 p,q 无大于 1 的公共因子. 按照 $p+q$ 的大小, 依据通常的 "字典法则" 可将正有理数排成一列:

$$1=1/1,\ 1/2,\ 2/1,\ 1/3,\ 3/1,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4/1,\ \cdots,$$

其中, 当 $p+q<r+s$, 或 $p+q=r+s$ 但 $p<r$ 时将 p/q 排在 r/s 前面. 这样, 正有理数不重不漏地出现在这一列中, 这说明正有理数集是可数的. □

定理 2.5.2 (Bolzano)**.** *$\mathbb{R}$ 中有界数列必有收敛子列.*

证明. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 不妨设 $\{x_1,x_2,\cdots\}\subset[a,b]$. 将 $[a,b]$ 二等分, 必有一个小区间包含了数列 $\{x_n\}$ 中的无限项, 记该小区间为 $[a_1,b_1]$, 并取 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$. 再将 $[a_1,b_1]$ 二等分, 仍有一个小区间含有 $\{x_n\}$ 中的无限项, 记该小区间为 $[a_2,b_2]$, 取 $x_{n_2}\in[a_2,b_2]$, 且 $n_2>n_1$. 如此继续, 我们得到区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots,\quad b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)\to 0,$$

以及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, $k=1,2,\cdots$.

由闭区间套原理, 存在 $c\in[a_k,b_k]$, $k=1,2,\cdots$. 由 $|x_{n_k}-c|\leqslant(b_k-a_k)$ 容易看出子列 $\{x_{n_k}\}$ 以 c 为极限. □

Bolznao 定理涉及到闭区间的一个重要性质, 即紧致性. 为了描述它, 我们先引入几个预备性的概念.

设 $x_0\in\mathbb{R}$. 包含点 x_0 的一个开区间称为 x_0 的一个**开邻域**. 如果 $\delta>0$, 则 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 就是 x_0 的一个开邻域. 设 A 为数集, 如果对任意的点 $x_0\in A$, 均存在 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset A$, 则称 A 为 $\mathbb{R}$ 中的**开集**. $\mathbb{R}$ 本身当然是开集, 我们约定空集也是开集. 如果一个数集的补集是开集, 则称该数集为**闭集**. 按照我们的约定, 空集和 $\mathbb{R}$ 既是开集, 也是闭集.

例 2.5.3. 在区间之中, (a,b), $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 为开集, 而 $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ 为闭集, 有限点集和整数集 $\mathbb{Z}$ 也是闭集. $[0,1)$ 既不是开集也不是闭集.

设 Γ 为一个集合, 如果对于每一个元素 $\alpha\in\Gamma$, 都对应一个集合 A_α, 则称 $\{A_\alpha\}$ 为以 Γ 为指标集的**集合族**, 或称 $\{A_\alpha\}$ 是一族集合.

设 A 为 $\mathbb{R}$ 的子集, A_α $(\alpha\in\Gamma)$ 是数集族. 如果任给 $a\in A$, 均存在某个 α, 使得 $a\in A_\alpha$, 则称 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个**覆盖**; 当覆盖中的每一个 A_α 均为开集时, 称 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个开覆盖. 如果 $\{A_\alpha\}$ 是 A 的一个覆盖, $\Gamma'\subset\Gamma$, 且 $\{A_{\alpha'}\}$ $(\alpha'\in\Gamma')$ 仍为 A 的覆盖, 则称 $\{A_{\alpha'}\}$ 是 $\{A_\alpha\}$ 的一个子覆盖. 如果 A 的任何开覆盖均存在有限子覆盖 (即指标集 Γ' 为有限集的子覆盖), 则称 A 是**紧致集合**.

例 2.5.4. 对于任意正整数 $n\geqslant 1$, 定义 $A_n=(0,\ 2-1/n)$. 则 $\{A_n|n=1,2,\cdots\}$ 为区间 $(0,2)$ 的开覆盖. 这个开覆盖不存在有限子覆盖, 因此开区间 $(0,2)$ 不是紧致集合. 同理可证半开半闭区间也不是紧致集合.

下面的结果表明闭区间是紧致集合.

定理 2.5.3 (Heine-Borel)**.** 闭区间 $[a,b]$ 的任何开覆盖都有有限子覆盖.

证明. (反证法) 设 $\{A_\alpha\}$ 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 如果 $[a,b]$ 不能被有限个 A_α 所覆盖, 则二等分 $[a,b]$ 后必有一个小区间也不能被有限个 A_α 所覆盖, 记该区间为 $[a_1,b_1]$. 再将 $[a_1,b_1]$ 二等分, 又必有一个小区间不能被有限个 A_α 所覆盖, 记该区间为 $[a_2,b_2]$. 如此继续下去, 得闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

使得 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ $(n\to\infty)$, 且每个 $[a_n,b_n]$ 均不能被有限个 A_α 覆盖. 根据闭区间套原理, 存在 $\xi\in[a_n,b_n]$, $\forall\, n\geqslant 1$. 因为 $\{A_\alpha\}$ 为 $[a,b]$ 的开覆盖, 故存在 A_{α_0}, 使得 $\xi\in A_{\alpha_0}$. 因为 A_{α_0} 为开集, 故存在 $\delta>0$, 使得

$$(\xi-\delta,\ \xi+\delta)\subset A_{\alpha_0}.$$

易见 $a_n,b_n\to\xi$ $(n\to\infty)$, 故存在 N, 当 $n>N$ 时

$$a_n,b_n\in(\xi-\delta,\ \xi+\delta).$$

这说明 $[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset A_{\alpha_0}$ $(n>N)$, 这与 $[a_n,b_n]$ 不能被有限个 A_α 覆盖相矛盾. □

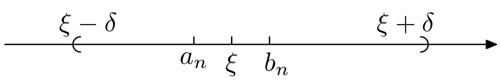


图 2.2 闭区间的紧性

推论 2.5.4. *$\mathbb{R}$ 中的有界闭集都是紧致集合.*

证明. 设 A 是有界闭集, 不妨设 $A \subset [-M, M]$. 如果 $\{A_\alpha\}$ 为 A 的一个开覆盖, 则

$$\{A^c \cap (-M-1, M+1),\ A_\alpha\}$$

是闭区间 $[-M, M]$ 的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 定理, 它存在有限子覆盖, 这个有限子覆盖当然也是 A 的覆盖, 从这个子覆盖中去掉 $A^c \cap (-M-1, M+1)$ 后仍是 A 的覆盖. □

Heine-Borel 定理可以用来重新证明 Bolzano 定理. 证明如下: 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 不妨设 a_n 均包含于 $[a, b]$. 我们先证明存在 $c \in [a, b]$, 使得 c 的任何开邻域中均含有 $\{a_n\}$ 中无限项. (反证法) 假设不然, 则对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) = I_x$ 只含 $\{a_n\}$ 中有限项. 显然, $\{I_x\}_{x\in[a,b]}$ 为闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖, 从而 $[a, b]$ 只含有 $\{a_n\}$ 中有限项, 这和 a_n 均含于 $[a, b]$ 中相矛盾.

其次, 我们可以如下选取 $\{a_n\}$ 的子列, 使之收敛到 c. 事实上, 先取 $a_{n_1} \in (c-1, c+1)$. 再取 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \in (c-1/2, c+1/2)$. 如此继续, 我们得到子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \in (c-1/k, c+1/k)$, $k = 1, 2, \cdots$. 显然, $\{a_{n_k}\}$ 收敛到 c. □

我们现在小结一下. 从实数系的确界原理出发, 我们得到了有界单调数列的收敛性, 以及本节的这几个新定理. 我们要说明的是, 这几个基本结果其实都是相互等价的. 等价的意思就是在承认其中一个结果的前提下可以推出另一结果, 即在构造实数系的时候, 我们只要验证它满足其中一个基本结果, 则其余的结果自然成立. 下面的定理将这个等价性补完整了:

定理 2.5.5. *下列命题之间有如下关系:*

(1) (Bolzano 定理 $\Longrightarrow$ Cauchy 准则) 如果 $\mathbb{R}$ 中有界数列均有收敛子列, 则 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 数列必收敛;

(2) (Cauchy 准则 $\Longrightarrow$ 确界原理) 如果 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 数列均收敛, 则 $\mathbb{R}$ 中有上(下)界的集合必有上(下)确界.

证明. (1) 设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列, 则 $\{a_n\}$ 有界, 从而有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 记其极限为 A. 根据 Cauchy 列和数列极限的定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, K, 使得当 $m, n > N_0$, $k > K$ 时,

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,\ \ |a_{n_k} - A| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

取 $k > \max\{N_0, K\}$, 则 $n_k \geqslant k > \max\{N_0, K\}$. 于是当 $n > n_k$ 时,

$$|a_n - A| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

这说明 $\{a_n\}$ 收敛到 A.

(2) 不妨设集合 A 有上界 M. 如果 $M \in A$, 则 M 就是 A 的上确界. 下设 $M \notin A$. 取 $m \in A$, 则闭区间 $[m, M]$ 含有 A 中的数. 将 $[m, M]$ 二等分, 如果 $[\frac{m+M}{2}, M]$ 中含有 A 中的数, 则记 $a_1 = \frac{m+M}{2}$, $b_1 = M$; 否则就记 $a_1 = m$, $b_1 = \frac{m+M}{2}$. 总之, $[a_1, b_1]$ 中含有 A 中的数, b_1 为 A 的上界, 且 $b_1 \notin A$ (为什么?). 对 $[a_1, b_1]$ 作同样的事情, 并如此继续, 我们就得到了两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 满足条件:

- $[a_n, b_n] \cap A \neq \varnothing, \forall\, n \geqslant 1$;
- b_n 均为 A 的上界, 且 $b_n \notin A$, $\forall\, n \geqslant 1$;
- $b_n - a_n = \frac{M-m}{2^n}$;
- $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{M-m}{2^{n+1}}$, $|b_n - b_{n+1}| \leqslant \frac{M-m}{2^{n+1}}$.

由例 2.3.3 知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为 Cauchy 数列, 它们收敛到同一数 c, 不难看出 c 为 A 的上确界. □

本节以下内容可以作为选读材料,
也可以在今后用到时再读.

下面我们再来看几个相关的应用.

例 2.5.5. *设函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的单调递增函数, 且*

$$f(a) > a,\ f(b) < b.$$

证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$ (不动点).

证明. 将 $[a, b]$ 二等分, 如果 $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{a+b}{2}$, 则不动点已经找到. 否则, 当 $f(\frac{a+b}{2}) < \frac{a+b}{2}$ 时, 令 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$; 当 $f(\frac{a+b}{2}) > \frac{a+b}{2}$ 时, 令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$, 总之仍有 $f(a_1) > a_1$, $f(b_1) < b_1$. 再将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = \frac{a_1+b_1}{2}$, 则不动点已经找到. 否则, 当 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < \frac{a_1+b_1}{2}$ 时, 令 $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$; 当 $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > \frac{a_1+b_1}{2}$ 时, 令 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$, 总之仍有 $f(a_2) > a_2$, $f(b_2) < b_2$. 如此继续做区间等分, 如果在有限次之内都找不到不动点, 则我们就得到区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

根据闭区间套原理, 存在 $\xi \in [a_n, b_n]$, $\forall\, n \geqslant 1$. 根据 a_n, b_n 的选取以及 f 的单调性, 我们有

$$a_n \leqslant f(a_n) \leqslant f(\xi) \leqslant f(b_n) \leqslant b_n, \quad \forall\, n \geqslant 1$$

令 $n \to \infty$, 由极限的夹逼原理即得 $f(\xi) = \xi$. □

设 A 为数集, $x_0 \in A$. 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$, 则称 x_0 为 A 的**内点**.

例 2.5.6. *对于闭区间 $[a, b]$ 来说, (a, b) 中的点均为内点; 有理数集 $\mathbb{Q}$ 和无理数集 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 均无内点.*

下面的结果称为 Baire 纲定理.

定理 2.5.6 (Baire)**.** *如果 $\{A_n\}$ 是一列没有内点的闭集, 则它们的并集*

$$A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n = \big\{x \,\big|\, \text{存在 } n \geqslant 1 \text{ 使得 } x \in A_n\big\}$$

也没有内点.

证明. 用反证法. 设 $x_0 \in A$ 为内点, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset A$. 因为 A_1 没有内点, 故存在 $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - A_1$. 由于 A_1 为闭集, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0), \quad [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \cap A_1 = \varnothing.$$

不妨设 $\delta_1 < 1$. 因为 A_2 没有内点, 故存在 $x_2 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) - A_2$. 由于 A_2 为闭集, 故存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), \quad [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \cap A_2 = \varnothing.$$

不妨设 $\delta_2 < \dfrac{1}{2}$. 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \cdots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \cdots,$$

使得 $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \cap A_n = \varnothing$, $\delta_n < \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. 根据闭区间套原理, 存在 $\xi \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n]$, $\forall\, n \geqslant 1$. 因此

$$\xi \notin \bigcup_{n \geqslant 1} A_n = A,$$

这和 $\xi \in [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$ 相矛盾. □

读者从 Baire 纲定理也可以马上看出实数全体 $\mathbb{R}$ 是不可数的集合.

下面的例题给出了 $\mathbb{R}$ 中紧致集合的刻画.

例 2.5.7. $\mathbb{R}$ 中的数集 A 为紧致集合当且仅当 A 为有界闭集.

证明. 充分性在前面已经证明过了. 必要性: 设 A 为紧致集合. 考虑开区间 $(-n,n)$ $(n\geqslant 1)$, 显然,

$$A\subset\mathbb{R}=\bigcup_{n\geqslant 1}(-n,n),$$

因此 $\{(-n,n)\}$ 是 A 的开覆盖, 从而存在有限子覆盖 $\{(-n_i,n_i)\}_{i=1}^k$. 令

$$N=\max\{n_i\,|\,i=1,2,\ \cdots,k\}$$

则

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}(-n_i,n_i)=(-N,N),$$

这说明 A 为有界集合. 为了说明 A 为闭集, 任取 $x_0\in A^c$, 则

$$A\subset\bigcup_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{R}-\big[x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\big]\big)=\mathbb{R}-\{x_0\},$$

同样由 A 的紧致性知, 存在 n_j $(1\leqslant j\leqslant l)$, 使得

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{l}\big(\mathbb{R}-\big[x_0-\frac{1}{n_j},x_0+\frac{1}{n_j}\big]\big)=\mathbb{R}-\big[x_0-\frac{1}{M},x_0+\frac{1}{M}\big],$$

其中 $M=\max\{n_j\,|\,j=1,2,\ \cdots,l\}$. 这说明

$$\big(x_0-\frac{1}{M},x_0+\frac{1}{M}\big)\subset\big[x_0-\frac{1}{M},x_0+\frac{1}{M}\big]\subset A^c,$$

即 x_0 为 A^c 的内点, 因此 A^c 为开集, A 为闭集. □

下面的例题描述的是 $\mathbb{R}$ 的 "连通" 性, 以后我们将证明连续函数的介值定理, 它所依赖的就是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}$ 中区间的 "连通" 性.

例 2.5.8. $\mathbb{R}$ 中的非空数集 A 既是开集又是闭集当且仅当 $A=\mathbb{R}$.

证明. 只要证明必要性即可. 设 A 既是开集又是闭集, $x_0\in A$. 因为 A 为开集, 存在 $\delta>0$, 使得

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset A.$$

令

$$y_0=\sup\{y\,|\,[x_0,\ y)\subset A\},$$

则 $y_0>x_0$, $[x_0,\ y_0)\subset A$. 如果 $y_0<+\infty$, 则当 $y_0\in A$ 时, 存在 $\eta>0$, 使得

$$(y_0-\eta,\ y_0+\eta)\subset A,$$

从而 $(x_0,\ y_0+\eta)\subset A$, 这与 y_0 的定义相矛盾; 如果 $y_0\in A^c$, 因为 A 为闭集, 故存在 $\eta'>0$, 使得

$$(y_0-\eta',\ y_0+\eta')\subset A^c,$$

这与 $[x_0,\ y_0)\subset A$ 相矛盾. 因此只能 $y_0=+\infty$, 即 $[x_0,\ +\infty)\subset A$. 同理可证 $(-\infty,\ x_0]\subset A$, 因此 $A=\mathbb{R}$. □

例 2.5.9. *设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上定义的函数. 如果对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 均存在 $\delta_0>0$ 以及常数 c_0, 使得*

$$f(x)=c_0,\ \forall\ x\in(x_0-\delta_0,\ x_0+\delta_0),$$

则称 f 为局部常值函数. 证明, $\mathbb{R}$ 上的局部常值函数必为常值函数.

证明. 任取 $c\in f(\mathbb{R})$, 考虑

$$f^{-1}(c)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=c\}$$

根据题设知 $f^{-1}(c)$ 为开集. 显然, 当 $c\neq c'$ 时, $f^{-1}(c)\cap f^{-1}(c')=\varnothing$, 于是有

$$\mathbb{R}-f^{-1}(c)=\bigcup_{c'\neq c}f^{-1}(c'),$$

这说明 $\mathbb{R}-f^{-1}(c)$ 也是开集, 即 $f^{-1}(c)$ 既是开集又是闭集, 由前例, $f^{-1}(c)=\mathbb{R}$, 即 $f(x)\equiv c$. □

习题 2.5

1. 设 (a_n,b_n) 为开区间套

   $$(a_1,b_1)\supset(a_2,b_2)\supset\cdots\supset(a_n,b_n)\supset\cdots,\quad b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty),$$

   如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是严格单调递增和严格单调递减的, 则存在惟一的 $c\in(a_n,b_n)$, $\forall\ n\geqslant 1$.

2. 设 $A\subset\mathbb{R}$, 令

   $$d(A)=\sup\big\{|x'-x''|\,\big|\,x',x''\in A\big\},$$

   称为 A 的**直径**. 证明, A 为有界集合当且仅当 $d(A)<\infty$.

3. 设 A 为闭集, $\{a_n\}$ 为 A 中数列. 如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限仍属于 A.

4. 证明闭集套原理: 设 A_n 为 $\mathbb{R}$ 上非空闭集套

   $$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots,$$

   如果 $d(A_n)\to 0\ (n\to\infty)$, 则存在惟一的点 $c\in A_n$, $n=1,2,\cdots$.

5. 如果给定一族两两不相交的区间, 则这些区间只有至多可数个 (提示: 在每一个区间内取一个有理点).

6. 设 $\{A_\alpha\}$ $(\alpha\in\Gamma)$ 是一族集合, 定义

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \big\{x \,\big|\, \text{存在 } \alpha\in\Gamma,\ \text{使得 } x\in A_\alpha\big\},$$

称为这一族集合的并集. 类似地, 令

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \big\{x \,\big|\, x\in A_\alpha,\ \forall\ \alpha\in\Gamma\big\},$$

称为这一族集合的交集. 证明

$$\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c,\quad \Big(\bigcap_\alpha A_\alpha\Big)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c.$$

7. 用定义证明一族开集的并集仍为开集, 一族闭集的交集仍为闭集.

8. (*) 证明任何开区间 (a,b) 均不能写成一族两两不相交的闭区间的并.

9. 设 A_n $(n\geqslant 1)$ 为一列可数集. 证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可数集.

10. 如果 $\{a_n\}$ 是有界但发散的数列, 则它必有两个收敛于不同值的收敛子列. (提示: 先用 Bolzano 定理.)

11. 设 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geqslant \varepsilon_0,\quad k=1,2,\cdots.$$

12. 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 中的函数, 如果对任意 $x\in I$, 均存在 $\delta_x>0$ 以及 M_x, 使得

$$|f(y)|\leqslant M_x,\quad \forall\ y\in(x-\delta_x, x+\delta_x)\cap I,$$

则称 f 是局部有界的. 证明, 闭区间上局部有界的函数都是有界函数.

13. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的局部单调递增函数, 即任给 $x_0\in\mathbb{R}$, 存在 $\delta>0$, 使得 f 在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 是单调递增的. 证明 f 在整个 $\mathbb{R}$ 上也是单调递增的.

14. (*) 不按照我们给出的证明顺序, 请证明关于实数系的几个基本定理的等价性.

15. (*) 设每一点 $x\in\mathbb{R}$ 均为函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的局部最小值点, 则 f 的值域 $f(\mathbb{R})$ 是一个至多可数集.

第三章　连续函数

自然界的许多现象都是连续变化的, 例如在一定范围内的气温, 气压, 地球引力等等. 当用函数来描述这些现象的时候, 就自然地出现了函数的连续性概念. 我们将使用在前一章中发展起来的极限理论来定义连续性并研究连续函数的基本性质, 特别是闭区间上连续函数的介值定理和最值定理. 我们还将运用极限理论定义连续函数的积分运算.

§3.1　函数的极限

如同数列的极限那样, 我们用 $\varepsilon - \delta$ 语言来讨论当变量趋于某一点 (或无穷远) 时函数取值的变化趋势.

§3.1.1　函数极限的定义

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. 我们将开区间 $(x_0 + \delta, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的一个开邻域, 两个开区间之并 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的一个去心开邻域或空心开邻域.

定义 3.1.1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个空心开邻域 $(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$ 中有定义. 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $0 < \delta < \delta_0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (当 x 趋于 x_0 时) 有极限 A, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\; 或 \;\; f(x) \to A \;\; (x \to x_0).$$

需要注意的是, f 在 x_0 处的极限与 f 在 x_0 处的值没有直接关系, f 甚至可以在 x_0 处没有定义.

例 3.1.1. 研究函数 $\dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ 在 $x_0 = 1$ 处的极限.

解. 当 $x \neq 1$ 时

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1},$$

因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{6}\}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时

$$\Big|\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2\Big| = \Big|\frac{x+1}{2x-1} - 2\Big| = \Big|\frac{3(x-1)}{2x-1}\Big| < 6|x - 1| < \varepsilon.$$

这说明该函数在 $x_0 = 1$ 处的极限为 2. □

完全类似地, 我们也可以定义 x_0 处的单侧极限: 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $0 < \delta < \delta_0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (当 x 趋于 x_0^- 时) 有**左极限** A, 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0^-).$$

$f(x)$ 在 x_0 处的左极限也记为 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0)$. 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $0 < \delta < \delta_0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (当 x 趋于 x_0^+ 时) 有**右极限** A, 记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0^+).$$

$f(x)$ 在 x_0 处的右极限也记为 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0)$. 显然, 如果 f 在 x_0 处极限存在, 则其左右极限也存在且等于此极限.

例 3.1.2. *考虑函数*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. f 在 0 的左边为常数 0, 右边为常数 1, 故 f 在 0 处的左极限为 0, 右极限为 1. 因为左右极限不相等, 故 f 在 0 处的极限不存在. □

一般地, 我们有

命题 3.1.1. *f 在 x_0 处有极限的充分必要条件是 f 在 x_0 的左极限和右极限都存在且相等.*

证明. 只要证明充分性即可. 设 f 在 x_0 处的左极限和右极限均为 A. 由定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon,\ x \in (x_0 - \delta_1, x_0); \quad |f(x) - A| < \varepsilon,\ x \in (x_0, x_0 + \delta_2).$$

记 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则

$$|f(x) - A| < \varepsilon,\ 0 < |x - x_0| < \delta,$$

因此 f 在 x_0 处的极限为 A. □

例 3.1.3. *研究函数 $f(x) = [x]$ 的极限.*

解. 当 $k \leqslant x < k+1$ (k 为整数) 时, $f(x) = k$. 这说明, 当 x_0 不是整数时, f 在 $x = x_0$ 处的极限等于 $f(x_0) = [x_0]$; 当 x_0 为整数时, f 在 $x = x_0$ 处的左极限为 $x_0 - 1$, 右极限为 x_0. □

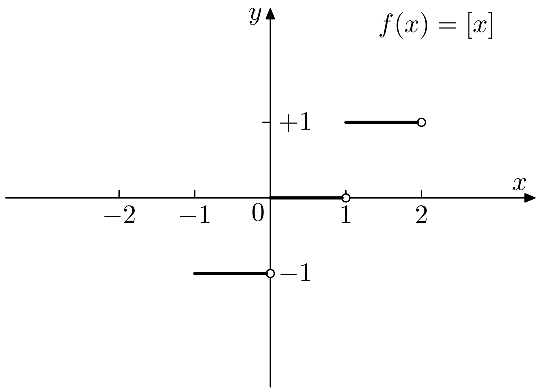


图 3.1 $[x]$ 的图像

数列极限的许多结果都可以推广到函数极限的情形, 如下面的夹逼原理和极限的惟一性.

命题 3.1.2 (夹逼原理)**.** *设在 x_0 的一个空心开邻域内有*

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x).$$

如果 f_1, f_2 在 x_0 的处的极限存在且等于 A, 则 f 在 x_0 处的极限也等于 A.

证明. 与数列极限的夹逼原理完全类似, 用定义证明即可, 略. □

命题 3.1.3 (极限的惟一性)**.** *设 A, B 均为 f 在 x_0 处的极限, 则 $A = B$.*

证明. 利用不等式

$$0 \leqslant |A - B| \leqslant |f(x) - A| + |f(x) - B|$$

和夹逼原理即可. □

命题 3.1.4 (绝对值的极限)**.** *设 f 在 x_0 处的极限 A, 则 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $|A|$.*

证明. 利用不等式

$$0 \leqslant \big||f(x)| - |A|\big| \leqslant |f(x) - A|$$

和夹逼原理即可. □

下面的函数极限是本课程中的一个基本极限.

例 3.1.4. *研究函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.*

解. 先考虑 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 的情形. 作半径为 1 的圆 (单位圆), O 为圆心, A, D 为圆周上的点, 角 $\angle AOD$ 大小为 x, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上. 比较三角形 $\triangle OAD$, 扇形 OAD 以及三角形 $\triangle OAB$ 的面积大小, 得

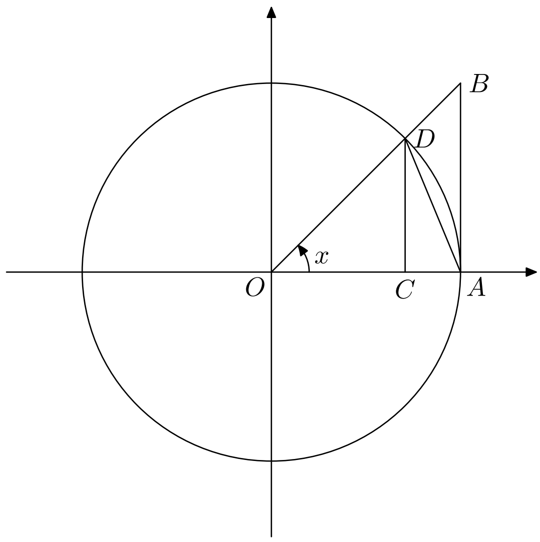


图 3.2 基本极限之一

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall\ x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

由于 $\cos x$ 和 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立. 因此当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\Big|\frac{\sin x}{x} - 1\Big| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\big(\frac{x}{2}\big)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

由夹逼原理得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

注. 当 $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|,$$

因此我们得到下面的不等式:

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

等号仅在 $x = 0$ 处成立.

例 3.1.5. 证明

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0, \quad \forall\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

证明. (1) 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= 2\Big|\cos\frac{x + x_0}{2}\Big|\Big|\sin\frac{x - x_0}{2}\Big| \\ &\leqslant 2\Big|\frac{x - x_0}{2}\Big| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 关于 $\cos x$ 的极限可象 (1) 一样证明, 也可这样做:

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \lim_{x\to x_0}\sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \sin\big(\frac{\pi}{2} - x_0\big) = \cos x_0.$$

我们再来看两个关于函数极限的例子.

例 3.1.6. 设 $x_0 \geqslant 0$. 研究函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解. 当 $x_0=0$ 时, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^2$, 当 $0<x<\delta$ 时

$$|\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$.

当 $x_0>0$ 时, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$. □

例 3.1.7. 研究函数 $\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的右极限.

解. 当 $x>0$ 时

$$\Big|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\Big|\leqslant\sqrt{x},$$

因此由上例及夹逼原理知

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 3.1.8. 设 $a>0$. 研究函数 a^x 在 $x_0=0$ 的极限.

解. 当 $a=1$ 时 $a^x=1$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$; 当 $a>1$ 时, 任给 $1>\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\{-\log_a(1-\varepsilon),\ \log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0<|x|<\delta$ 时

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon),$$

即

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

也就是

$$|a^x-1|<\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$.

当 $0<a<1$ 时, 任给 $1>\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\{|\log_a(1-\varepsilon)|,\ |\log_a(1+\varepsilon)|\},$$

当 $0<|x|<\delta$ 时, 有

$$\log_a(1+\varepsilon)<x<\log_a(1-\varepsilon),$$

即

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

也就是

$$|a^x-1|<\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. □

例 3.1.9. 设 $a>0$, $a\neq 1$. 研究 $f(x)=\log_a x$ 在 $x_0=1$ 处的极限.

解. 不妨设 $a>1$. 任给 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$, 使得

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<x<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x-0|<\varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 1}\log_a x=0$. □

下面我们讨论函数在涉及无穷大或无穷远时的极限.

定义 3.1.2. 设 f 在 x_0 的一个空心开邻域中有定义. 如果任给 $A>0$, 均存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)>A$, 则称 f 在 x_0 处的极限为 $+\infty$, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to+\infty \quad (x\to x_0).$$

如果任给 $A<0$, 均存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)<A$, 则称 f 在 x_0 处的极限为 $-\infty$, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad \text{或} \quad f(x)\to-\infty \quad (x\to x_0).$$

对于这种极限, 夹逼原理和惟一性仍然成立. 我们也可以完全类似地给出 f 在 x_0 处的左极限或右极限为无穷大的定义, 这里不赘述. 有时, 当我们说 f 在 x_0 处的极限为无穷大是指 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $+\infty$.

定义 3.1.3. 设 f 在 $+\infty$ 的一个开邻域 $(a,+\infty)$ 中有定义. 如果存在 $A\in\mathbb{R}$, 使得对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 当 $x>M$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 在 $+\infty$ 处有极限 A, 记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \ \text{ 或 } \ f(x) \to A \ \ (x \to +\infty).$$

类似地, 设 f 在 $-\infty$ 的一个开邻域 $(-\infty, a)$ 中有定义. 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $m < a$, 当 $x < m$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 f 在 $-\infty$ 处有极限 A, 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \ \text{ 或 } \ f(x) \to A \ \ (x \to -\infty).$$

如果 f 在 $-\infty$ 以及 $+\infty$ 处的极限均为 A, 则称 f 在 ∞ (无穷远) 处有极限 A, 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \ \text{ 或 } \ f(x) \to A \ \ (x \to \infty).$$

我们可以类似地给出 f 在无穷远处极限为无穷大的定义, 这里也不再赘述.

下面的函数极限是本课程的另一个重要的基本极限.

例 3.1.10. 研究函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 在无穷远处的极限.

解. 当 $x \geqslant 1$ 时,

$$\Big(1+\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]} \leqslant \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x \leqslant \Big(1+\frac{1}{[x]}\Big)^{[x]+1},$$

其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数. 因此

$$\Big(1+\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]+1}\Big(1+\frac{1}{[x]+1}\Big)^{-1} \leqslant \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x \leqslant \Big(1+\frac{1}{[x]}\Big)^{[x]}\Big(1+\frac{1}{[x]}\Big).$$

利用数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e$$

以及夹逼原理得

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

类似可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. □

§3.1.2 函数极限的性质

我们来讨论函数极限存在与否的判别方法和计算方法, 主要以有限极限为例.

定理 3.1.5 (Heine)**.** 设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义, 则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当对任何收敛点列 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ 且 $x_n \neq x_0$ $(\forall\, n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

证明. 先证必要性. 由定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

现在设 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. 仍由极限定义, 对于上述 δ, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时 $0 < |x_n - x_0| < \delta$. 因此当 $n > N$ 时, 有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

我们用反证法来证明充分性. 如果 f 在 x_0 处极限不为 A (极限可能不存在), 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任何 $\delta > 0$, 都存在 x_δ, 使得

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta, \quad |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

特别地, 对 $\forall\, n \geqslant 1$, 均存在 x_n, 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

这说明 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, 但 $f(x_n)$ 不收敛到 A. □

注. (1) Heine 定理可以改述成下面应用起来较为方便的形式:

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处有极限} \iff \forall\, x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0),\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ 存在}.$$

这时充分性的证明是这样的: 只要说明如果 $f(x_n)$ 均收敛, 则它们的极限必定都相同. (反证法) 如果存在 $x_n' \to x_0$, $x_n' \neq x_0$, $f(x_n') \to A$ 以及 $x_n'' \to x_0$, $x_n'' \neq x_0$, $f(x_n'') \to B$. 当 $B \neq A$ 时, 考虑新的点列 x_n, 使得 $x_{2k} = x_{2k}'$, $x_{2k-1} = x_{2k-1}''$ $(k \geqslant 1)$, 则 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ 但 $f(x_n)$ 不收敛, 这就得到矛盾.

(2) 对于单侧极限, 无穷远处的极限以及极限为无穷大的情形, 有完全类似的 Heine 型定理.

例 3.1.11. 研究函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 我们选取点列 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ 以及 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $x_n, y_n \to 0$, $x_n, y_n \neq 0$, 且 $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = 1$, 根据刚才的注记就知道 f 在 $x_0 = 0$ 的极限不存在. □

定理 3.1.6 (Cauchy 准则)**.** 设 f 在 x_0 的一个空心开邻域中有定义, 则 f 在 x_0 处存在有限极限当且仅当任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

证明. 必要性: 设 f 在 x_0 处的极限为 A, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

充分性: 我们用 Heine 定理来证. 设 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, 则已知条件告诉我们 $\{f(x_n)\}$ 是一个 Cauchy 列, 根据数列极限的 Cauchy 准则, $\{f(x_n)\}$ 收敛. 于是由 Heine 定理知 f 在 x_0 处的极限存在 (且有限). □

注. (1) 对于无穷远处极限为有限的情形, Cauchy 准则仍然成立.

(2) 从证明过程可以看出, f 在 x_0 处不存在有限极限当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, 总有 x', x'', 使得

$$0 < |x' - x_0| < \delta,\ 0 < |x'' - x_0| < \delta,\ \ |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

例 3.1.12. *研究 Dirichlet 函数*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

的极限.

解. 在任何一点 x_0 附近都有点取值为 0 或 1, 取 $\varepsilon = 1$, 由刚才的注记 (2) 即知 D 在 x_0 处极限不存在. □

定理 3.1.7 (单调有界原理)**.** *设函数在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中有定义, 如果 f 单调递增且有上界, 或单调递减且有下界, 则 f 在 x_0 的左极限存在 (且有限).*

证明. 利用数列的单调性原理以及 Heine 定理即可. □

注. 如果 f 单调递增又无上界, 则 f 在 x_0 处的左极限为 $+\infty$; 如果 f 单调递减又无下界, 则 f 在 x_0 处的左极限为 $-\infty$; 对于函数的右极限有完全类似的结论.

下面我们叙述函数极限的一些基本性质, 它们和数列极限相应的性质十分类似, 因此我们省略其证明.

定理 3.1.8. *(1) (局部有界性) 如果 f 在 x_0 处有有限极限, 则 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有界.*

(2) (保序性) 设 f, g 在 x_0 处的极限分别为 A, B. 如果 $f(x) \geqslant g(x)$ 在 x_0 的一个空心开邻域内成立, 则 $A \geqslant B$; 反之, 如果 $A > B$, 则在 x_0 内一个空心开邻域内 $f(x) > g(x)$; 特别地, 如果 $A > 0$, 则在 x_0 的一个空心开邻域内 $f(x) > 0$.

(3) (四则运算) 设 f, g 在 x_0 处有有限极限, 则

- $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$*, 其中 α, β 为常数;*

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

注. 对于无穷远处的极限有完全类似的结论成立.

下面关于复合函数的极限也很有用.

定理 3.1.9 (复合函数的极限). 设 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 A, $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 且存在 x_0 的一个空心开邻域, 在此开邻域内 $g(x) \neq y_0$, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 A.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$ 知, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(y) - A| < \varepsilon.$$

又因为 $g(x) \to y_0$ $(x \to x_0)$, 对于这个 δ, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有

$$0 < |g(x) - y_0| < \delta,$$

此时有

$$|f(g(x)) - A| < \varepsilon,$$

这说明 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 A. □

注. (1) 定理中的条件 $g(x) \neq y_0$ 一般不能去掉, 下面的函数就是例子: 令

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

以及 $g(x) \equiv 0$, 则 $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$, 但 $f(g(x)) = 0$. 不过, 当 $f(y_0) = A$ 时这个条件是可以去掉的 (为什么?).

(2) 对于无穷远处的极限以及极限为无穷大的情形也有完全类似的结果.

我们再来计算一些函数极限的例子, 有些例子在后面的课程中可能会用到.

例 3.1.13. 研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 作变量替换 $y = \dfrac{1}{x}$, 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \big(1 + \frac{1}{y}\big)^y$$

当 $x \to 0$ 时 $y \to \infty$, 由复合函数的极限以及例 3.1.10, 有

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \big(1 + \frac{1}{y}\big)^y = e.$$

例 3.1.14. 设 $a>0$, $a\neq 1$. 研究 $f(x)=\log_a x$ 在 $x_0>0$ 处的极限.

解. 上一小节已证 $\lim\limits_{x\to 1}\log_a x=0$, 因此

$$\lim_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0+\lim_{x\to x_0}\log_a\big(\frac{x}{x_0}\big)=\log_a x_0.$$

例 3.1.15. 设 $a>0$, 研究函数 $\dfrac{a^x-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. 不妨设 $a\neq 1$. 作变量替换 $y=a^x-1$, 则 $x\to 0$ 时 $y\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]}\\&=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.\end{aligned}$$

例 3.1.16. 设 $a>1$, $k\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

证明. 当 $k\geqslant 0$, $x>1$ 时,

$$0<\frac{x^k}{a^x}\leqslant\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}=\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]+1}}a,$$

由前一章例 2.1.9 和夹逼原理知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

当 $k<0$, $x>1$ 时,

$$0<\frac{x^k}{a^x}<a^{-x}\leqslant a^{-[x]},$$

仍由夹逼原理知极限为零. □

例 3.1.17. 设 $P(x),Q(x)$ 是次数相同的多项式, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)/Q(x)$.

证明. 设 $P(x),Q(x)$ 次数为 n. 记

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\ Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

其中 $a_0,b_0\neq 0$. 由

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_nx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_nx^{-n}}$$

以及极限的四则运算性质可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0}{b_0}.$$

习题 3.1

1. 给出下列几种函数极限的定义:

$$(1)\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty,\quad (2)\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,$$
$$(3)\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty,\quad (4)\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty.$$

2. 按照极限的定义证明

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2-3}=\frac{1}{3};\qquad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{x^2-1}=2;\qquad (3)\ \lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0;$$
$$(4)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3}{x^2-5}=1;\qquad (5)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=\infty;\qquad (6)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0;$$
$$(7)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0;\qquad (8)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x}{x+2}=\infty;\qquad (9)\ \lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2-a})=0.$$

3. 求下列函数极限 (m,n 为正整数)

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1};\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+h)^2-h^2}{x};\qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{3x+1};$$
$$(4)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x-1};\qquad (5)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{3x^2+4x};\qquad (6)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x^m}{1-x^n};$$
$$(7)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x};\qquad (8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-|a|}{x};\qquad (9)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

4. 求下列函数极限 (m,n 为正整数)

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2};\qquad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1};$$
$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-(1+nx)^{\frac{1}{m}}}{x};\qquad (4)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right).$$

5. 求下列函数极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x};\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2};\qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3};$$
$$(4)\ \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2};\qquad (5)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a};\qquad (6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{\sin^2 x}.$$

6. 求下列函数极限 ($k>0$)

$$(1)\ \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right];\qquad (2)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{[x]}{x};\qquad (3)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^k};$$
$$(4)\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}};\qquad (5)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{3+x}\right)^x;\qquad (6)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}.$$

7. 求下列极限

$$(1)\ \lim_{n\to +\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1});\qquad (2)\ \lim_{n\to +\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n});$$
$$(3)\ \lim_{n\to +\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}};\qquad (4)\ \lim_{n\to +\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right);$$
$$(5)\ \lim_{n\to \infty}n\sin\frac{1}{n};\qquad (6)\ \lim_{n\to \infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n.$$

8. 设 $0<a<1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(1+x)^a-x^a]$.

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\sin(\cdots(\sin x)))$ (n 次复合函数).

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)$, 其中 $R(x)$ 为 Riemann 函数:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q},\ x=\frac{p}{q},\ p,q\ \text{为互素正整数},\ p<q;\\ 1,\ x=0,1;\\ 0,\ x\ \text{为}\ (0,1)\ \text{中的无理数}.\end{cases}$$

11. 设 f 为周期函数, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$, 则 $f\equiv C$.

12. $(*)$ 设 f,g 为两个周期函数, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $f=g$.

13. $(*)$ 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\big[f(2x)-f(x)\big]=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

§3.2 无穷小 (大) 量的阶

在对两个变化量进行比较时, 我们有时不需要知道它们的确切大小, 而只需了解它们之间的量级关系, 我们现在可以用极限来刻画这些量级关系.

定义 3.2.1 (无穷小量与无穷大量)**.** *如果函数 f 在 x_0 处的极限为 0, 则称 f 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量, 记为 $f(x)=o(1)$ $(x\to x_0)$; 如果 $x\to x_0$ 时 $|f|\to+\infty$, 则称 f 在 $x\to x_0$ 时为无穷大量.*

注. (1) 无穷小 (大) 量不是一个数, 而是在某点邻域内有特定性质的函数. 在无穷远处也可以类似定义无穷小量与无穷大量;

(2) 对于数列也可以定义无穷小量与无穷大量: 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个数列, 如果 $a_n/b_n\to0$ $(n\to\infty)$, 则称 $\{a_n\}$ 关于 $\{b_n\}$ 是无穷小量, 记为 $a_n=o(b_n)$; 无穷大量可类似定义.

例 3.2.1. 说明 $\sqrt{x+1}-1=o(1)$ $(x\to0)$.

解. 因为

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\to0\quad(x\to0),$$

故由定义知 $\sqrt{x+1}-1$ 在 $x\to0$ 时为无穷小量. □

我们可以利用无穷小量和无穷大量来比较函数. 例如, 设 f, g 在 $x\to x_0$ 时均为无穷小 (大) 量, 则

(1) 如果 f/g 在 $x \to x_0$ 时是无穷小量, 则称当 $x \to x_0$ 时 f 是 g 的高 (低) 阶无穷小 (大) 量, 记为

$$f(x) = o(g(x)) \ \ (x \to x_0);$$

(2) 如果 f/g 在 x_0 的一个空心邻域中有界, 则记

$$f(x) = O(g(x)) \ \ (x \to x_0);$$

(3) 如果 f/g 在 x_0 处的极限为 $A \neq 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时 f 和 g 是同阶无穷小 (大) 量, 记为

$$f(x) = O^*(g(x)) \ \ (x \to x_0);$$

特别地, 如果 $A = 1$, 则称当 $x \to x_0$ 时 f 和 g 是**等价无穷小 (大) 量**, 记为

$$f \sim g \ \ (x \to x_0).$$

(4) 设 $k > 0$. 如果

$$|f(x)| = O^*(|x - x_0|^k) \ \ (x \to x_0),$$

则称当 $x \to x_0$ 时 f 是 k 阶无穷小量; 如果

$$|f(x)| = O^*(|x - x_0|^{-k}) \ \ (x \to x_0),$$

则称当 $x \to x_0$ 时 f 是 k 阶无穷大量. k 为正整数时也可将定义中的绝对值去掉.

注. 这些量级的比较也可在无穷远处进行, 此时 $f(x)$ 可与 x^k 进行比较.

例 3.2.2. 证明 $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ $(x \to 0)$.

证明. 根据前节的结果, 有

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}.$$

例 3.2.3. 设 $P(x)$ 是 n 次多项式, 则 $P(x) = O^*(x^n)$ $(x \to \infty)$.

证明. 在前一节最后一例中取 $Q(x) = x^n$ 即可. □

下面的结果在计算极限的时候十分有用.

定理 3.2.1 (等价代换)**.** 设 $x \to x_0$ 时, $f \sim f_1$, $g \sim g_1$. 如果 f_1/g_1 在 x_0 处有极限, 则 f/g 在 x_0 处有极限, 且极限相等; 反之亦然.

证明. 只要注意到

$$f/g = (f/f_1)(f_1/g_1)(g_1/g),$$

以及当 $x \to x_0$ 时 $f/f_1 \to 1$, $g/g_1 \to 1$ 即可. □

注. 等价代换在无穷远处也可进行.

例 3.2.4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

解. 因为当 $x\to0$ 时 $\sin\alpha x\sim\alpha x$, $\sin\beta x\sim\beta x$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

例 3.2.5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解. 当 $x\to0$ 时,

$$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim x\Big(\frac{1}{2}x^2\Big)=\frac{1}{2}x^3,$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

需要注意的是, 等价代换不能用于加法和减法运算, 例如在上面的例子中, 当 $x\to0$ 时, 有

$$\tan x\sim\sin x\sim x,$$

但 $\tan x-\sin x$ 不能代换为零. □

例 3.2.6. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$.

解. 先来说明

$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0).$$

事实上, 根据前一节例 3.1.13, 有

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\big[(1+x)^{\frac{1}{x}}\big]\to\ln e=1\quad(x\to0).$$

于是, 当 $x\to0$ 时, 有

$$\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]\sim-(1-\cos x)\sim-\frac{1}{2}x^2.$$

另一方面

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sim x^2\quad(x\to0),$$

利用等价代换得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

习题 3.2

1. 证明下列各式:

(1) $x\sin\sqrt{x}\sim x^{\frac{3}{2}}\quad(x\to0^+)$; (2) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=o(1)\quad(x\to0)$;

(3) $\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{2}\quad(x\to0)$; (4) $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+O(x^4)\quad(x\to0)$.

2. 当 $x \to 0^+$ 时, 求下列无穷小量的阶并写出等价无穷小量:

$$(1)\ \sqrt{x\sin x};\qquad (2)\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x};\quad (3)\ \ln(1+x)-\ln(1-x);$$
$$(4)\ \sqrt[3]{1+3x}-1;\quad (5)\ 4x^2-5x+10x^6;\qquad (6)\ \sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}.$$

3. 当 $x \to +\infty$ 时, 讨论下列无穷大量的阶:

$$(1)\ x-5x^3+x^6;\quad (2)\ \frac{x^5+1}{x^4+1};\qquad (3)\ \frac{x^4}{x^2-x+1};$$
$$(4)\ \sqrt{x^2+\sqrt{x}};\qquad (5)\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}};\quad (6)\ x\ln^2 x.$$

4. 设 $f(x)=o(1)\ (x\to x_0)$, 证明当 $x \to x_0$ 时

(1) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$;

(2) $o(cf(x))=o(f(x))$, 其中 c 为常数;

(3) $g(x)\cdot o(f(x))=o(f(x)g(x))$, 其中 $g(x)$ 为有界函数;

(4) $[o(f(x))]^k=o(f^k(x))$;

(5) $\dfrac{1}{1+f(x)}=1-f(x)+o(f(x))$.

5. 用等价替换求极限:

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x};\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2 x};$$
$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{x};\quad (4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}.$$

6. 设 $P(x)$ 为多项式, 如果 $P(x)=o(x^n)\ (x\to\infty)$, 则 $P(x)$ 的次数小于 n.

7. 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足条件 $f(2x)=f(x)$, $f(x)=o(1)\ (x\to+\infty)$. 证明 $f\equiv 0$.

8. $(*)$ 设 $f(x)=o(1)$, $f(2x)-f(x)=O(x)\ \ (x\to 0)$. 证明 $f(x)=O(x)\ \ (x\to 0)$.

§3.3 连续函数

连续变化的量用数学的语言来刻画就是连续函数, 这是本课程的主要研究对象之一.

§3.3.1 连续函数的定义

定义 3.3.1 (连续性). *如果 f 在 x_0 的一个邻域中有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处连续, x_0 称为 f 的一个连续点; 如果 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处左连续; 如果 f 在 x_0 处的右极限等于 $f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处右连续; 在定义域内每一点都连续的函数称为连续函数.*

注. (1) 如果 x_0 不是 f 的连续点, 则称 x_0 是 f 的一个间断点. 显然, f 在 x_0 处连续当且仅当 f 在 x_0 处左连续和右连续. 我们还可以用 Heine 定理来描述连续性: f 在 x_0 处连续当且仅当对任意收敛到 x_0 的点列 x_n, 均有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

(2) 用 $\varepsilon - \delta$ 的语言来描述 f 在 x_0 处连续就是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(3)* 上半连续和下半连续: 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处下半连续; 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处上半连续.

(4) 连续点和连续性的概念可以推广到在 $\mathbb{R}$ 的子集 X 上定义的函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 上: $x_0 \in X$ 为 f 的连续点是指当 $x \in X$, $x \to x_0$ 时 $f(x) \to f(x_0)$. 因此, 当 $X = [a, b]$ 时, f 为 $[a, b]$ 上的连续函数是指 f 在 (a, b) 中每一点都连续, 且在 a 处右连续, 在 b 处左连续.

例 3.3.1. *根据前面两节的计算, 我们已经知道下面的初等函数都是连续的:*

$$C\ (\text{常值函数}),\ x,\ \sin x,\ \cos x,\ \sqrt{x},\ \log_a x\ (a > 0, a \neq 1).$$

例 3.3.2. *如果 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.*

解. 设 f 在 x_0 处连续, 则由

$$0 \leqslant \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)|$$

以及夹逼原理知 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续. □

我们再看两个初等的连续函数的例子.

例 3.3.3. 研究函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0 > 0$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\right\}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$\Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\Big| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} \leqslant \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} < \varepsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 完全类似地可证明, 当 $x_0 < 0$ 时, f 在 x_0 处也连续. 因此 $\dfrac{1}{x}$ 为连续函数. □

例 3.3.4. 研究函数 $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ 的连续性.

解. $a = 1$ 时 $f(x) = 1$ 为常值函数, 因此是连续函数. 设 $a \neq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{y \to 0} a^y = a^{x_0}.$$

因此 $f(x)$ 为连续函数. □

利用下面的两个定理可以得到连续函数的更多例子.

定理 3.3.1 (连续函数的四则运算)**.** *设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 x_0 处连续, 则*

(1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在 x_0 处连续, 其中 α, β 为常数;

(2) $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续;

(3) 当 $g(x_0) \neq 0$ 时, $f(x)/g(x)$ 在 x_0 处连续.

证明. 由函数极限的四则运算性质即可得到. □

例 3.3.5. 如果 f, g 为连续函数, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数.

解. 当 f, g 连续时, $f + g$, $f - g$ 均连续. 并且可以直接验证

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big\{(f + g) + |f - g|\big\}, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big\{(f + g) - |f - g|\big\}.$$

于是 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数. □

例 3.3.6. 有理函数的连续性.

因为 $f(x) = x$ 为连续函数, 因此 $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $\cdots$, x^n $(n \geqslant 1)$ 都是连续函数; 同理, 因为 $f(x) = x^{-1}$ 连续, 因此 x^n $(n \leqslant -1)$ 也是连续函数. 进一步, 有理函数 (即两个多项式之商) 在定义域内均为连续函数. □

例 3.3.7. 三角函数的连续性.

因为 $\sin x$, $\cos x$ 为连续函数, 故三角函数

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

在定义域内均为连续函数. □

定理 3.3.2 (复合函数的连续性). 设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big) = f(y_0),$$

特别地, 当 g 在 x_0 处连续时, 复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续.

证明. 因为函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta$ 时,

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

对于这个 δ, 因为 $g(x) \to y_0$ $(x \to x_0)$, 故存在 $\eta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时,

$$|g(x) - y_0| < \delta,$$

从而

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(g(x)) \to f(y_0) = f\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big)$. □

例 3.3.8. 设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$. 先来说明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的. 事实上, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $|x| < \delta$ 时

$$|x^\alpha - 0| = (|x|)^\alpha \leqslant (\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

如果 $x > 0$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, 根据复合函数的连续性, 我们知道 $f(x)$ 连续; 如果 $x < 0$, 则 $x^\alpha = (-1)^\alpha e^{\alpha \ln |x|}$, 仍由复合函数的连续性知 $f(x)$ 连续.

如果 $\alpha < 0$, 则

$$x^\alpha = \Big(\frac{1}{x}\Big)^{-\alpha},$$

因此当 $x \neq 0$ 时函数是连续的. 总之, 在定义域内, 幂函数是连续的. □

§3.3.2 间断点与单调函数

单调函数和可逆函数之间有很密切的联系, 我们先来研究单调函数的连续性.

例 3.3.9. 研究单调函数 $f(x) = [x]$ 的连续性, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解. 当 $k \leqslant x < k + 1$ (k 为整数) 时, $[x] = k$. 因此, 当 x 不是整数时, $f(x)$ 在 x 处连续. 当 $x = k$ 为整数时, $f(x)$ 在 k 处的左极限为 $k - 1$, 右极限为 k. 这说明 $f(x)$ 的间断点恰为所有的整数点. □

定义 3.3.2. 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在且有限, 则称 x_0 为第一类间断点; 其它的间断点都称为第二类间断点.

左极限和右极限不相等的第一类间断点称为跳跃间断点; 左极限和右极限相等的第一类间断点称为可去间断点.

根据定义, 函数 $f(x)=[x]$ 的间断点都是跳跃间断点.

例 3.3.10. 研究 *Riemann* 函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q},\ x=\frac{p}{q},\ p,q\ \text{为互素正整数},\ p<q;\\ 1,\ x=0,1;\\ 0,\ x\ \text{为}\ (0,1)\ \text{中的无理数}.\end{cases}$$

的连续性.

解. 设 $x_0\in[0,1]$, 我们说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0, 因而 $f(x)$ 的间断点为有理点, 它们都是可去间断点.

任给 $\varepsilon>0$, 因为满足条件 $\dfrac{1}{p}\geqslant\varepsilon$ (即 $p\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$) 的正整数只有有限多个, 相应的分数 $\dfrac{q}{p}$ $(q\leqslant p)$ 也只有有限多个, 记为 $\{x_i\}_{i=1}^k$. 令

$$\delta=\min\{|x_i-x_0|\,\big|\,x_i\neq x_0,\ i=1,2,\cdots,k\},$$

当 $x\in[0,1]$, $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 如果 x 为无理数, 则 $R(x)=0$; 如果 $x=\dfrac{q}{p}$ 为有理数, 则

$$R(x)=\frac{1}{p}<\varepsilon,$$

总之, 均有

$$|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon,$$

这说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0. □

例 3.3.11. 研究 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的连续性.

解. 我们已经知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限, 因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 其它的点均为 $f(x)$ 的连续点. □

下面的结果说明单调函数在定义域内部的间断点都是跳跃间断点.

命题 3.3.3. 设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 中的单调函数, $x_0\in(a,b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

证明. 由单调性知 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且有限, 当 f 单调递增时, 有

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0),$$

当 f 单调递减时, 有

$$f(x_0-0)\geqslant f(x_0)\geqslant f(x_0+0).$$

因此, 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 必为跳跃间断点. □

命题 3.3.4. $(*)$ *设 $f(x)$ 是定义在区间 I 中的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数多个.*

证明. 不妨设 $f(x)$ 单调递增, 且 I 为开区间. 假设 $x_1<x_2$ 为间断点, 则

$$f(x_1-0)\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)\leqslant f(x_2)\leqslant f(x_2+0).$$

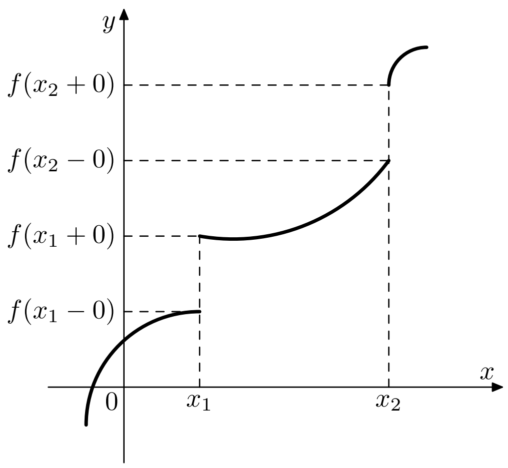


图 3.3 单调函数的间断点

因此, 区间 $(f(x_1-0),f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0),f(x_2+0))$ 不相交. 如果我们把每一个间断点 x 均对应到开区间 $(f(x-0),f(x+0))$, 则这些开区间互不相交. 这样的开区间只有至多可数多个, 因此 $f(x)$ 的间断点也至多可数. □

从以上命题的证明可以得到

命题 3.3.5. *设 $f(x)$ 是定义在区间 I 中的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.*

证明. 不妨设 $f(x)$ 严格单调递增. 如果 $f(I)$ 为区间, 则 $f(x)$ 没有间断点, 这是因为间断点 x_0 对应的区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$ 不在值域内, 从而会分割值域. 即值域为区间时 f 是连续的.

如果 f 连续, 则由下一节的介值定理知 $f(I)$ 为区间. □

推论 3.3.6. *定义在区间 I 中的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.*

证明. 不妨设 $f(x)$ 严格单调递增. 由上一命题知 $f(I) = J$ 是区间. 因为映射 $f : I \to J$ 是一一映射, 故它是可逆的. 设 $y_1 < y_2 \in J$, 记 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_1 \geqslant x_2$, 则因为 f 单调递增, 故 $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, 这就得到矛盾. 这说明

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

因此 f^{-1} 是 J 上的严格单调递增函数. 因为 $f^{-1}(J) = I$ 为区间, 由上一命题即知 f^{-1} 连续. □

注. 利用下一节的介值定理可以证明, 区间上的连续函数可逆当且仅当它是严格单调的.

定理 3.3.7. *初等函数在其定义域内均为连续函数.*

证明. 我们已经证明了常值函数, 三角函数, 幂函数, 指数函数与对数函数在其定义域内是连续的. 根据上面的推论, 反三角函数在其定义域内也是连续的. 这些基本初等函数在四则运算以及复合之下也都是连续函数. □

利用初等函数的连续性, 求函数极限的时候通常就可以直接代入定义域内的变量值来计算.

例 3.3.12. *求函数 $f(x) = \left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{1+\sqrt{1+\sqrt{2x-1}}}$ 在 $x_0 = 1$ 处的极限.*

解. $f(x)$ 是连续函数, 因此

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\sqrt{1+\sqrt{2-1}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\sqrt{2}}.$$

习题 3.3

1. 研究下列函数在 $x = 0$ 处的连续性:

$$(1)\ f(x) = \sqrt{|x|}, \quad (2)\ f(x) = \sin([x]), \quad (3)\ f(x) = \frac{[x]\ln(1+x)}{1+\sin x}.$$

2. 研究下列函数的连续性:

$$(1)\ f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}, & x \neq k\pi, \\ 1, & x = k\pi. \end{cases}$$

3. 求下列函数的间断点并判断间断点的类型:

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}x, & x\ \text{为有理数},\\ -x, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

4. 求下列函数的间断点并判断间断点的类型:

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

5. 求 a,b,c 的值, 使得下面的函数是连续函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant -1,\\ ax^2+bx+c, & |x|<1,\ x\neq 0,\\ 2, & x=0,\\ 3, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

6. 证明, 如果 f^2 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0)>0$, 证明, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时 $f(x)>\dfrac{1}{2}f(x_0)$.

8. 证明, 如果一个连续函数在有理数上取值为零, 则它恒为零; 两个连续函数如果在有理点上取值相同, 则它们是相等的函数. (提示: 无理数可以用有理数逼近.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 且任给 $x\in[a,b]$, 均存在 $y\in[a,b]$, 使得

$$f(y)\leqslant\frac{1}{2}f(x),$$

证明, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)\leqslant 0$.

10. 设 $f(x)$ 为连续函数, $c>0$ 为任意给定的常数, 证明函数

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & \text{当}\ f(x)<-c\ \text{时},\\ f(x), & \text{当}\ |f(x)|\leqslant c\ \text{时},\\ c, & \text{当}\ f(x)>c\ \text{时}\end{cases}$$

也是连续函数.

11. 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 定义

$$M(x) = \sup_{a\leqslant t\leqslant x} f(t), \quad m(x) = \inf_{a\leqslant t\leqslant x} f(t), \quad x \in [a,b],$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的连续函数.

12. $(*)$ 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 且存在 $\alpha > 0$, 使得

$$|f(2x) - f(x)| \leqslant x^{\alpha}, \quad \forall\, x \in [0,1],$$

证明, 存在常数 C, 使得

$$|f(x) - f(0)| \leqslant Cx^{\alpha}, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

13. $(*)$ 设 $f(x)$ 是 (a,b) 中定义的无第二类间断点的函数, 如果对任意的两点 x, $y \in (a,b)$, 均有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\big[f(x) + f(y)\big],$$

则 f 为 (a,b) 中的连续函数.

14. $(*)$ 设 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 f 满足条件

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}.$$

则当 f 连续或单调时, 必存在常数 c, 使得 $f(x) = cx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

15. $(*)$ 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 如果对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 均有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 则要么 f 恒为零, 要么存在常数 $a > 0$, 使得 $f(x) = a^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

§3.4 闭区间上连续函数的性质

前面一节已经涉及到在区间上定义的连续函数的性质, 我们现在做进一步的研究. 我们将会发现, 函数的性质密切依赖于实数系的基本性质.

§3.4.1 最值定理和介值定理

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反映. 对于本节中的几个重要定理, 我们一般给出两个不同的证明, 读者可以从中体会关于实数性质的基本结果是如何运用来研究连续函数的.

定理 3.4.1 (有界性定理)**.** *设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.*

证明. 我们用两种方法来证明.

证法一: 用反证法. 假设 $f(x)$ 无界, 则存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, 使得

$$|f(x_n)| \geqslant n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为 $\{x_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x_0 \in [a,b].$$

又因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x_0).$$

特别地, $\{f(x_{n_i})\}$ 是有界点列, 这和 $|f(x_{n_i})| \geqslant n_i$ ($\forall\, i \geqslant 1$) 相矛盾.

证法二: 任取 $x \in [a,b]$, 因为 f 在 x 处连续, 故存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$|f(x') - f(x)| \leqslant 1, \quad \forall\, x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b].$$

区间族 $\big\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\big\}_{x\in[a,b]}$ 组成了闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖, 记为

$$\big\{(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}),\ i = 1, 2, \ldots, k\big\}.$$

令 $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|f(x_i)| + 1\}$. 任取 $x \in [a,b]$, 设 $x \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$, 则

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leqslant 1 + |f(x_i)| \leqslant M,$$

这说明 $f(x)$ 是有界的. □

注. 闭区间的条件不能减弱, 例如函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上连续, 但无界.

定理 3.4.2 (最值定理). *设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 x_*, $x^* \in [a,b]$, 使得*

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

证明. 我们用两种方法证明.

证法一: 根据有界性定理, $f(x)$ 有界, 因此 $f([a,b])$ 必有上确界和下确界. 记上确界为 M, 则存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, 使得

$$M - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

根据夹逼原理, $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$. 因为 $\{x_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x^* \in [a,b].$$

因为 $f(x)$ 在 x^* 处连续, 故 $f(x_{n_i}) \to f(x^*)$ $(i \to \infty)$. 这说明 $M = f(x^*)$, M 即为 $f(x)$ 的最大值. 同理可证最小值可以取到, 或考虑 $-f$ 的最大值即可.

证法二: 用反证法. 设 M 为 f 的上确界, 但 $f(x) \neq M, \forall\, x \in [a,b]$. 考虑函数

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)},\ x \in [a,b].$$

$F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正的连续函数. 由有界性定理, 存在正数 $K > 0$, 使得 $F(x) \leqslant K$. 从而

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{K},\quad \forall\, x \in [a,b].$$

这与 M 为 f 的上确界相矛盾, 因此 M 必被 $f(x)$ 取到. 下确界的情形同理可证. □

注. 闭区间的条件不能减弱, 如 $f(x) = x$, $x \in (0,1]$ 是连续的, 但在 $(0,1]$ 上达不到最小值.

定理 3.4.3 (零值定理, Bolzano)**.** *设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.*

证明. 我们用两种方法证明.

证法一: 用闭区间套原理. 不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. (反证法) 假设 $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$. 将 $[a,b]$ 二等分, 如果 $f\big(\frac{a+b}{2}\big) > 0$, 则取 $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$; 如果 $f\big(\frac{a+b}{2}\big) < 0$, 则取 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$, 总之 $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. 再将 $[a_1,b_1]$ 二等分, 用 $[a_2,b_2]$ 表示满足 $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ 的那一半小区间. 如此继续, 我们得到闭区间套

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots,$$

满足 $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, 且

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0,\ n \to \infty.$$

由闭区间套原理, 存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

根据 f 的连续性, 有

$$0 \geqslant \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0,$$

从而 $f(x_0) = 0$. 显然 $x_0 \neq a, b$, 这就导出了矛盾.

证法二: 不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. 令

$$A = \big\{x \in [a,b] \,\big|\, f(x) < 0\big\},$$

则 $a \in A$. 记 ξ 为 A 的上确界, 由 f 的连续性易见 $\xi > a$. 由确界的定义, 存在 $x_n \in [a,b]$, 使得 $f(x_n) < 0$, $x_n \to \xi$. 因此

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

特别地, $\xi < b$. 由 A 的定义知 f 在 $(\xi, b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi) \geqslant 0$, 这说明 $f(\xi) = 0$. 显然 $\xi \in (a,b)$. □

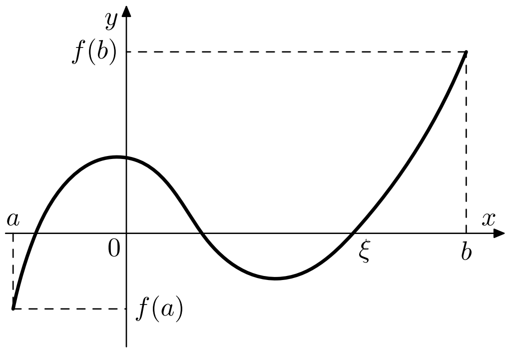


图 3.4 零值定理

注. 如果条件改为 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = 0$. 事实上, 如果 $f(a)f(b) = 0$, 则 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$, 从而取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$ 即可; 当 $f(a)f(b) < 0$ 时用零值定理的结论即可.

定理 3.4.4 (介值定理). *设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.*

证明. 设 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则 $(f(a) - \mu)(f(b) - \mu) < 0$. 因此, 由零值定理, 连续函数 $f(x) - \mu$ 在 (a,b) 内存在零点 ξ, 即 $f(\xi) = \mu$. □

推论 3.4.5. *设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f([a,b]) = [m, M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.*

证明. 当 $m = M$ 时 $f(x)$ 为常值函数, 结论自然成立. 设 $m < M$. 显然, $f([a,b]) \subset [m, M]$. 另一方面, 由最值定理, 存在 x_*, x^*, 使得 $f(x_*) = m$, $f(x^*) = M$. 由介值定理, 介于 m 和 M 之间的值也能被 $f(x)$ 取到, 因此 $[m, M] \subset f([a,b])$. 这说明 $f([a,b]) = [m, M]$. □

推论 3.4.6. *设 $f(x)$ 是区间 I 中的连续函数, 则 $f(I)$ 也是区间 (可退化为一点).*

证明. 如果 $f(x)$ 为常值函数, 则 $f(I)$ 退化为一点. 否则, 任取 $y_1 < y_2 \in f(I)$, 设 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, 在以 x_1, x_2 为端点的闭区间上用介值定理, 我们就知道 $[y_1, y_2] \subset f(I)$. 由 y_1, y_2 的任意性知 $f(I)$ 为一个区间. □

推论 3.4.7. 设 $f(x)$ 是区间 I 中的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

证明. 只要证明必要性就可以了. 设 $x_1 < x_2 \in I$. 因为 $f(x)$ 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 如果 $f(x_1) < f(x_2)$, 我们将证明 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是严格单调递增的. (反证法) 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \geqslant f(x'')$. 分情况讨论:

(1) $f(x'') < f(x_1)$. 这时 $f(x'') < f(x_1) < f(x_2)$, 由介值定理, 存在 $\xi \in [x'', x_2]$, 使得 $f(\xi) = f(x_1)$, 这与 $f(x)$ 可逆相矛盾;

(2) $f(x'') > f(x_1)$. 这时 $f(x') \geqslant f(x'') > f(x_1)$, 由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x']$, 使得 $f(\xi) = f(x'')$, 这与 $f(x)$ 可逆相矛盾.

如果 $f(x_1) > f(x_2)$, 完全类似地可以证明 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是严格单调递减的. 总之, $f(x)$ 在任何闭区间上都是严格单调的, 从而不难得出 $f(x)$ 在 I 中是严格单调的. □

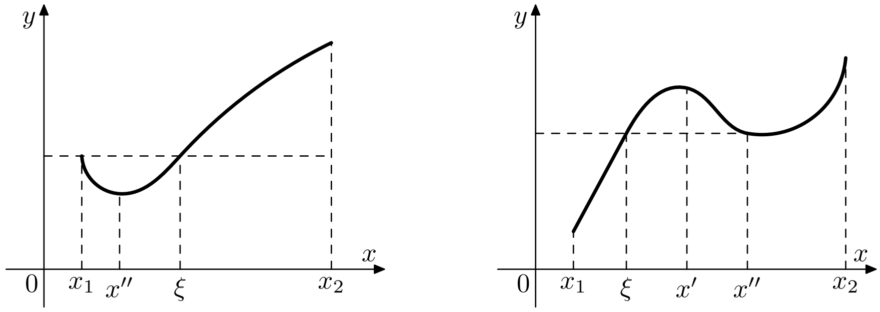


图 3.5 单调函数与可逆性质

例 3.4.1. 设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 为连续函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

证明. 考虑函数 $F(x) = f(x) - x$, $x \in [a, b]$. $F(x)$ 仍为连续函数, 且

$$F(a)F(b) = (f(a) - a)(f(b) - b) \leqslant 0,$$

由零值定理及其注记知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $F(\xi) = 0$, 此时 $f(\xi) = \xi$. □

例 3.4.2. 证明奇数次的实系数多项式必有实根.

证明. 设 $P(x) = a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2} x + a_{2n-1}$ 是次数为 $2n - 1$ $(n \geqslant 1)$ 的多项式, $a_i \in \mathbb{R}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$, $a_0 \neq 0$. 不妨设 $a_0 > 0$, 则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = \lim_{x\to\infty} \Big(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}}\Big) = a_0 > 0,$$

从而存在 $x_1 < 0 < x_2 \in \mathbb{R}$, 使得

$$\frac{P(x_1)}{x_1^{2n-1}} > 0, \quad \frac{P(x_2)}{x_2^{2n-1}} > 0,$$

此时 $P(x_1) < 0$, $P(x_2) > 0$. 因为多项式是连续函数, 由零值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $P(\xi) = 0$. □

§3.4.2 一致连续性

闭区间上的连续函数的另一条重要性质就是所谓的一致连续性.

定义 3.4.1 (一致连续). *设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 中, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 中一致连续.

注. (1) 显然, 一致连续函数一定是连续函数. 一致连续性和连续性的区别就是, 用 $\varepsilon - \delta$ 语言定义 x_0 处的连续性时, 定义中出现的 δ 一般会依赖于连续点 x_0 以及 ε, 而一致连续性定义中出现的 δ 是不依赖于具体连续点的, 即对所有的连续点都能取到一个公共的 δ, 一致性就体现在这儿.

(2) 用逆反命题的形式改写定义, 就得到: $f(x)$ 在 I 中不一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及 I 中点列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 使得 $a_n - b_n \to 0\ (n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

例 3.4.3. *研究函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 的一致连续性.*

解. 取 $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $b_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\forall\ n \geqslant 1$. 则

$$a_n - b_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n(4n+1)\pi} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

且有

$$|f(a_n) - f(b_n)| = 1, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中不是一致连续的. 利用下面的命题 3.4.8 可以说明, 对任意 $\delta > 0$, $f(x)$ 在 $[\delta, +\infty)$ 中都是一致连续的. □

例 3.4.4. *研究函数 $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ 的一致连续性.*

解. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$. 当 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\sin x_1 - \sin x_2| &= \Big|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\Big| \\ &\leqslant 2\Big|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\Big| \\ &\leqslant |x_1 - x_2| < \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中是一致连续的. □

$\sin x$ 是所谓 Lipschitz 函数的特殊情形.

例 3.4.5. 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 中的函数. 如果存在 $0 < \alpha \leqslant 1$, 以及常数 M, 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\alpha},\ \forall\ x_1, x_2 \in I,$$

则称 $f(x)$ 是 I 中的 α 阶 *Hölder* 函数. 当 $\alpha = 1$ 时也称为 *Lipschitz* 函数.

Hölder 函数都是一致连续的: 任给 $\varepsilon > 0$, 取

$$\delta = \Big(\frac{\varepsilon}{M}\Big)^{\frac{1}{\alpha}},$$

则当 $x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^{\alpha} < M\Big(\frac{\varepsilon}{M}\Big) = \varepsilon.$$

下面的命题是关于一致连续函数性质的, 其证明留作习题.

命题 3.4.8. 设 $f(x)$, $g(x)$ 为区间 I 中的一致连续函数. 则

(1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在 I 中也是一致连续的;

(2) 如果 $f(x)$, $g(x)$ 为有界函数, 则 $f(x)g(x)$ 也是一致连续的;

(3) 如果 $f(x)$ 有界, 且存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $g(x) \geqslant \varepsilon_0$, $\forall\, x \in I$, 则 $f(x)/g(x)$ 也是一致连续的;

(4) 一致连续函数的复合函数仍为一致连续函数.

定理 3.4.9 (Cantor)**.** 闭区间上的连续函数是一致连续的.

证明. 我们用两种方法证明. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.

证法一: (反证法) 如果 $f(x)$ 不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及点列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset [a, b]$, 使得 $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

因为 $\{b_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{b_{n_i}\}$, 设 $b_{n_i} \to x_0 \in [a, b]$. 此时

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \to 0 + x_0 = x_0\ \ (i \to \infty).$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故

$$\varepsilon_0 \leqslant |f(a_{n_i}) - f(b_{n_i})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0 \ \ (i \to \infty),$$

这就导出了矛盾.

证法二: 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 $f(x)$ 连续, 故对于任意 $x \in [a,b]$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b].$$

显然, $\{(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})\}_{x\in[a,b]}$ 为闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 因而存在有限子覆盖, 即存在 x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \big(x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x + \frac{\delta_{x_i}}{2}\big).$$

记

$$\delta = \min\big\{\frac{\delta_{x_i}}{2} \,\big|\, i = 1, 2, \cdots, k\big\},$$

则对于任意的 $x', x'' \in [a,b]$, 如果 $|x' - x''| < \delta$, 设

$$x' \in \big(x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}\big), \ \ (\text{对某个 } i)$$

则

$$|x'' - x_i| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqslant \delta_{x_i},$$

从而有 $x'' \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. 因此, 我们有

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致连续的. □

最后, 我们引进函数振幅的概念, 并利用它来刻画连续性和一致连续性. 某个变化量的振幅, 是指其 "最大" 和 "最小" 值的差. 如果这个变化量的值趋于一个定数, 则其振幅应趋于零. 我们在第二章研究数列极限的时候就曾经用过这种方法, 现在只不过将这种方法用于考察函数的连续性而已.

定义 3.4.2 (振幅)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0, r) = \sup\big\{|f(x') - f(x'')| \,\big|\, x', x'' \in (x_0 - r, x_0 + r)\big\} \ \ (r > 0)$$

为 f 在区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上的振幅. 显然, $\omega_f(x_0, r)$ 关于 $r \to 0^+$ 单调递减, 因此

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \omega_f(x_0, r)$$

存在 (不一定有限), 称为 f 在 x_0 处的振幅.

注. (1) $\omega_f(x_0, r)$ 也可以定义为

$$\omega_f(x_0, r) = \sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x) - \inf_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x),$$

请读者自行验证两种定义的等价性.

(2) 也可类似地对闭区间以及 x_0 的一侧定义函数的振幅.

例 3.4.6. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的振幅.

解. 因为

$$\omega_f\Big(0, \frac{1}{n}\Big) = n \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

故 f 在 $x = 0$ 处的振幅为 $+\infty$. □

例 3.4.7. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的振幅.

解. 因为 $|f(x)| \leqslant 1$, 故 $\omega_f(0) \leqslant 2$. 另一方面, 对 $n \geqslant 1$, 取

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \ b_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}},$$

则 $a_n, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |1 - (-1)| = 2,$$

故 f 在 $x = 0$ 处的振幅为 2. □

一般地, 不难看出, $f(x)$ 在 x_0 附近有界当且仅当 $\omega_f(x_0)$ 是有限数. 下面的结果可以跟定理 2.2.3 对照起来看.

命题 3.4.10. $f(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当 $\omega_f(x_0) = 0$.

证明. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 对于 $\forall\, x', x'' \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $(0 < r \leqslant \delta)$, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即当 $0 < r \leqslant \delta$ 时

$$\omega_f(x_0, r) \leqslant \varepsilon.$$

这说明 $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{r\to 0^+} \omega_f(x_0, r) = 0$.

反之, 设 $\lim\limits_{r\to 0^+} \omega_f(x_0, r) = \omega_f(x_0) = 0$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\omega_f(x_0, r) < \varepsilon, \quad \forall\ 0 < r \leqslant \delta.$$

特别地, 对于满足 $|x - x_0| < \delta$ 的点 x, 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \omega_f(x_0, \delta) < \varepsilon,$$

这说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. □

我们可以类似地用振幅来刻画一致连续性. 设 f 定义在区间 I 中, $r > 0$. 令

$$\omega_f(r) = \sup\big\{|f(x') - f(x'')|\,\big|\,\forall\ x', x'' \in I,\ |x' - x''| < r\big\},$$

则 $\omega_f(r)$ 关于 $r \to 0^+$ 单调递减. 利用一致连续的定义可得

命题 3.4.11. *f 在 I 中一致连续当且仅当 $\lim\limits_{r\to 0^+} \omega_f(r) = 0$.*

习题 3.4

1. 设 f 在 $[a, +\infty)$ 中连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 则 f 在 $[a, +\infty)$ 中有界, 且最大值和最小值中的一个必定能被 f 达到.

2. 证明, 如果 f 为 $[a, b]$ 上连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. 则 f 在 $[a, b]$ 上恒正或恒负, 且存在常数 $c > 0$, 使得 $|f(x)| \geqslant c$, $\forall\ x \in [a, b]$.

3. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $[a, b]$ 中的点. 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得
$$f(\xi) = \frac{1}{n}\big[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big].$$

4. 设 f 在 (a, b) 中连续, 且 $f(a+0)f(b-0) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

5. 证明方程 $x \sin x = 1$ 有无穷多个解.

6. 证明三次多项式 $x^3 + 2x - 1$ 只有惟一的实根, 且此根位于区间 $(0, 1)$ 内.

7. 设 $f(x) = P(x)$ 是奇数次实系数多项式. 证明, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满射.

8. 研究下列函数的一致连续性:
$$(1)\ \sqrt{x},\ x \geqslant 0, \quad (2)\ x\cos\frac{1}{x},\ x > 0, \quad (3)\ \cos(x^2),\ x \in \mathbb{R}.$$

9. 设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 中的连续函数, 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在且有限. 证明 f 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续. (提示: 闭区间上一致连续, 无穷远有极限.)

10. 设 $f(x)$ 为 (a,b) 中的连续函数. 证明, $f(x)$ 在 (a,b) 中一致连续当且仅当 f 在 a 处的右极限以及在 b 处的左极限均存在且有限. (提示: Cauchy 准则.)

11. 设 $f(x)$ 为 (a,b) 中的有界函数, $\delta>0$. 则有
$$\{x\in(a,b)\,|\,\omega_f(x)\geqslant\delta\}=\{x\in(a,b)\,|\,\forall\ r>0,\ \text{均有}\ \omega_f(x,r)\geqslant\delta\},$$
以及
$$\{x\in(a,b)\,|\,\omega_f(x)<\delta\}=\{x\in(a,b)\,|\ \text{存在}\ r>0,\ \text{使得}\ \omega_f(x,r)<\delta\},$$
由此说明 $\{x\in(a,b)\,|\,\omega_f(x)<\delta\}$ 是开集.

12. $(*)$ 设 f 为给定的有界函数. 证明振幅函数 $\omega_f(x)$ 关于 x 是上半连续的.

13. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且 $f(f(x))=x$. 证明, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

14. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$, 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

15. 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得 $f(f(x))=e^{-x}$? (提示: 先证 f 单调.)

16. $(*)$ 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)=f(1)$. 证明, 对任意正整数 n, 均存在 $\xi_n\in[0,1]$, 使得
$$f(\xi_n)=f\big(\xi_n+\frac{1}{n}\big).$$

17. $(*)$ 证明, $\mathbb{R}$ 上连续的周期函数是一致连续的; 利用这个结论说明 $\sin(x^2)$ 不是周期函数.

18. $(*)$ 设 $a>0$, $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 中的 Lipschitz 函数. 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为 $[a,+\infty)$ 中的一致连续函数.

§3.5 连续函数的积分

现在我们介绍关于连续函数的不属于初等四则运算的一个新的运算, 叫做积分. 许多实际的应用问题都涉及到积分, 例如已知运动质点的速度求位移, 求曲线的长度, 求平面图形的面积, 求立体图形的体积等等都可以转化为相应的积分问题. 积分的内容占据了本课程的半壁江山, 在本节之中我们将介绍闭区间上连续函数的积分, 一般函数的积分请见第六章和第七章, 以及后面多元函数积分的章节.

§3.5.1 积分的定义

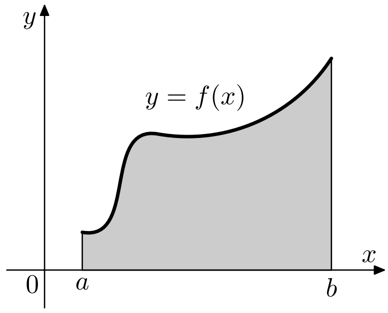


图 3.6 曲边梯形

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 我们考虑由 f 的图像, 直线 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$ (x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形的 “面积”, 我们用记号 $\int_a^b f(x)dx$ 表示这个 “面积” 的值, 称为 f 在 $[a,b]$ 上的积分.

(1) 设 $f(x)\equiv c$ 为常值函数, 则所求面积是矩形的面积, 因此自然地定义

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

(2) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的线性函数, 则所求面积是一个梯形的面积, 因此定义

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a).$$

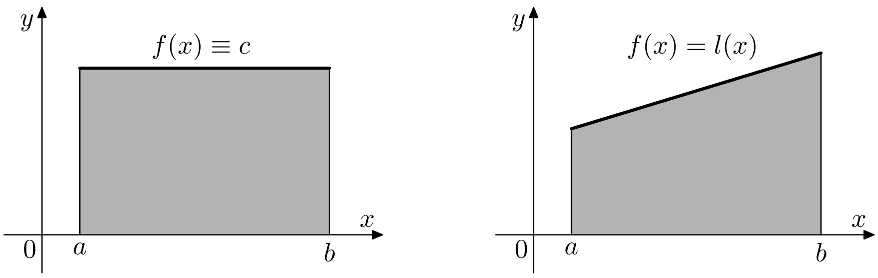


图 3.7 矩形和梯形

当 f 为常值函数时, 这个定义和 (1) 是一致的. 并且, 从定义可得

- 如果 f, g 均为线性函数, 则

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

这可从定义直接得到.

- 如果 f 为线性函数, 且存在常数 M, 使得 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall\, x\in[a,b]$, 则

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant M(b-a).$$

事实上, 由定义, 有

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| = \Big|\frac{1}{2}\big[f(a)+f(b)\big](b-a)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\big[|f(a)|+|f(b)|\big](b-a) \leqslant M(b-a).$$

- 如果 f 为线性函数, $c\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

这是因为, $[a,b]$ 上的线性函数 $f(x)$ 可以写为

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ \text{或}\ f(x)=f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b),$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx&=\frac{1}{2}[f(a)+f(c)](c-a)+\frac{1}{2}[f(c)+f(b)](b-c)\\&=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-b)](c-a)\\&\quad+\frac{1}{2}[f(a)+f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)](b-c)\\&=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](c-a)+\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-c)\\&=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)\\&=\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

(3) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续的分段线性函数, 即存在区间 $[a,b]$ 中的分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得 $f(x)$ 在每一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上均为线性函数, 则定义

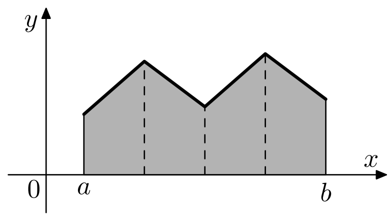


图 3.8 分段线性函数的积分

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx,$$

这个定义是恰当的: 如果存在 $[a,b]$ 的另外一些分点

$$a=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$$

使得 $f(x)$ 在每一个小区间 $[x_{i-1}',x_i']$ 上均为线性函数, 则所有这些分点 $\{x_i,x_i'\}$ 按从小到大的顺序排列后依然将 $[a,b]$ 分割为一些小区间, 在每个小区间上 f 仍为线性函数, 且根据 (2) 中线性函数积分性质的第三条可知, f 在这些新的小区间上的积分之和与分点 $\{x_i\}$ 或 $\{x_i'\}$ 分割后形成的小区间上 f 的积分之和是一致的.

以上说明了分段线性函数的积分与区间中分点的选取无关. 利用这一点不难看出, (2) 中线性函数积分的三条性质对于分段线性函数也完全成立.

(4) 现在假设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 不一定是分段线性的, 我们要定义 f 在 $[a,b]$ 上的积分. 一个自然的想法是用分段线性的函数去逼近 f. 事实上, 任给正整数 n, 将 $[a,b]$ 作 n 等分, 分点为 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$. 在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上定义 $l_i(x)$ 为满足条件 $l_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $l_i(x_i) = f(x_i)$ 的线性函数, $l_i(x)$ 的表达式为

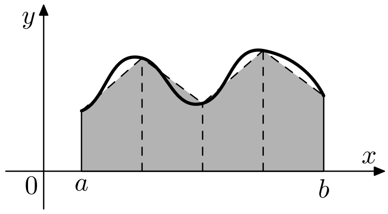


图 3.9 连续函数的积分

$$l_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

在 $[a,b]$ 上定义连续分段线性函数 $f_n(x)$ 为

$$f_n(x) = l_i(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\quad i = 1, \cdots, n.$$

命题 3.5.1. *设 f, f_n 如上, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时*

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\quad \forall\ x \in [a,b].$$

证明. 这需要用到闭区间上连续函数的一致连续性. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon,\quad \forall\ |x' - x''| < \delta.$$

取正整数 $N > (b-a)/\delta$, 则当 $n > N$ 时 $\dfrac{1}{n}(b-a) < \delta$. 此时, 设 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - l_i(x)| \\
&= \left|f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})\right| \\
&= \left|\big(f(x) - f(x_{i-1})\big)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \big(f(x) - f(x_i)\big)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right| \\
&\leqslant \varepsilon\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \varepsilon\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了命题. □

利用这个命题, 当 $m, n > N$ 时, 就有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon,$$

因为 $f_m(x) - f_n(x)$ 也是分段线性函数, 故有

$$\left|\int_a^b f_m(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_m(x) - f_n(x)\big)dx\right| \leqslant 2\varepsilon(b-a),$$

这说明, 数列 $\left\{\int_a^b f_n(x)dx\right\}$ 是 Cauchy 列, 因此其极限存在, 我们现在就定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

如果 $f(x)$ 本来就是 $[a,b]$ 上的连续分段线性函数, 则这个定义与 (3) 中的积分定义是一致的, 我们把这个一致性的证明留给读者思考. 根据分段线性函数积分的定义, f 的积分可以表示为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\big[f(a+\frac{i-1}{n}(b-a))+f(a+\frac{i}{n}(b-a))\big]\frac{1}{n}(b-a)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\big(a+\frac{i}{n}(b-a)\big)(b-a),\end{aligned}\tag{3.1}$$

注. 和式 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))$ 是一个平均数, 其极限可以认为是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值. 在这个意义下, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分就等于 $f(x)$ 的平均值乘以区间长度, 这是连续函数积分的几何含义.

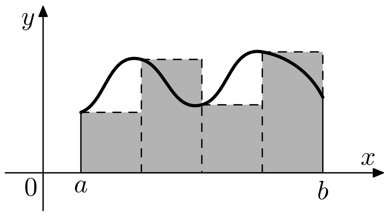


图 3.10 积分的极限表示

下面我们按照积分的定义计算两个例子.

例 3.5.1. 计算积分 $\int_a^b \cos x dx$.

解. 将 $[a,b]$ 作 n 等分, 利用等式

$$\sin\frac{1}{2}h\cos(a+ih) = \frac{1}{2}\big[\sin\big(a+(i+\frac{1}{2})h\big)-\sin\big(a+(i-\frac{1}{2})h\big)\big]$$

以及 (3.1) 得 (其中 $h=(b-a)/n$)

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos\big(a+\frac{i}{n}(b-a)\big)(b-a)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n\sin\frac{b-a}{2n}}\sum_{i=1}^n\big[\sin\big(a+(i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big)-\sin\big(a+(i-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big)\big]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n\sin\frac{b-a}{2n}}\big[\sin\big(a+(n+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big)-\sin\big(a+\frac{b-a}{2n}\big)\big]\\ &= \sin b-\sin a.\end{aligned}$$

例 3.5.2. 求函数 $f(x)=a^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分, 其中 $a>0$, $a\neq 1$.

解. 将 $[0,1]$ 作 n 等分, 利用 (3.1) 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 a^x dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}\\ &= \lim_{t\to 0^+}(a-1)\frac{ta^t}{a^t-1} = \frac{a-1}{\ln a}.\end{aligned}$$

利用连续函数的一致连续性, 我们可以改写 (3.1). 事实上, 沿用前面的记号如 ε, N 等, 当 $n>N$ 时, 在等分小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i, 则有

$$|f(x_i)-f(\xi_i)|\leqslant\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(b-a)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(b-a)\Big|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(\xi_i)|(b-a)\leqslant\varepsilon(b-a),$$

这说明

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(b-a),\quad\forall\ \xi_i\in[x_{i-1},\ x_i].\tag{3.2}$$

这个极限等式也可以作为积分的定义, 它的好处是无须总在小区间的端点取 $f(x)$ 的值, 而极限仍然不变.

例 3.5.3. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分, 其中 $b>a>0$.

解. 将 $[a,b]$ 作 n 等分, 在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上取 $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{1}{x^2}\,dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\big(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\big)\\&=\lim_{n\to\infty}\big(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\big)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.\end{aligned}$$

§3.5.2 积分的基本性质

前一小节定义了连续函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的积分, 现在我们做如下约定:

$$\int_a^a f(x)dx=0;\quad\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

从积分定义的讨论, 特别是 (3.1) 式, 我们可以得到积分的如下简单性质:

- (线性性) 如果 f,g 为 $[a,b]$ 上的连续函数, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则
$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx;$$
- 如果 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall\ x\in[a,b]$, 则 $\Big|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\Big|\leqslant M(b-a)$;
- (保序性) 如果 $f\geqslant g$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx$; 特别地, 由 $-|f|\leqslant f\leqslant|f|$ 可得 $\Big|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\Big|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$;

- (关于区间的可加性) 设 f 为连续函数, a,b,c 为定义域中三点, 则

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

事实上, 不妨设 $a<b<c$. 任给 $\varepsilon>0$, 分别在区间 $[a,b]$, $[b,c]$ 上取连续的分段线性函数 φ 和 ψ, 使得 $\varphi(b)=\psi(b)$, 且

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall\ x\in[a,b];\quad |f(x)-\psi(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall\ x\in[b,c].$$

在 $[a,c]$ 上定义分段线性函数 $g(x)$, 使得在 $[a,b]$ 上 $g=\varphi$, 在 $[b,c]$ 上 $g=\psi$, 于是

$$|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall\ x\in[a,c].$$

根据积分的保序性以及分段线性函数的积分关于区间的可加性, 得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_a^c g(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx\Big| + \varepsilon(c-a) \\
&= \Big|\int_a^b [g(x)-f(x)]dx + \int_b^c [g(x)-f(x)]dx\Big| + \varepsilon(c-a) \\
&\leqslant \varepsilon(b-a)+\varepsilon(c-b)+\varepsilon(c-a) = 2\varepsilon(c-a),
\end{aligned}$$

由于 ε 是任取的, 故积分关于区间的可加性成立.

- 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 则 $\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $f\equiv 0$. 这条性质的前半部分从积分的保序性得到. 至于后半部分, 如果 $f(x_0)>0$, 则由 f 的连续性可知, 存在区间 $[c,d]\subset[a,b]$, 使得

$$f(x)\geqslant\frac{1}{2}f(x_0),\quad \forall\ x\in[c,d].$$

此时由积分关于区间的可加性以及保序性可得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \geqslant \int_c^d f(x)dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0,$$

即此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为正.

例 3.5.4. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $c\in[a,b]$. 定义函数*

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

则 F 为 Lipschitz 函数.

证明. 设 $|f(x)| \leqslant M$, $\forall\, x \in [a,b]$. 不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \in [a,b]$, 则

$$\begin{aligned}|F(x_2)-F(x_1)| &= \Big|\int_c^{x_2} f(x)dx - \int_c^{x_1} f(x)dx\Big| \\ &= \Big|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\Big| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \\ &\leqslant M|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

因此 F 为 Lipschitz 函数. □

例 3.5.5. 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果对 $[a,b]$ 上任意连续函数 g, 均有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

则 $f=0$.

证明. 取 $g=f$, 则由已知条件得

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

从而 $f^2=0$, 即 $f=0$. □

为了方便积分的计算, 我们可以进一步将 (3.1) 式和 (3.2) 作改写. 在定义积分时, 我们使用的是将区间作等分然后求极限的方法. 我们要说明的是, 作区间划分时不必取等分分点. 事实上, 在 $[a,b]$ 中任取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 称

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

为 $[a,b]$ 的一个分划 (或分割). 记 $\|\pi\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|$. 任给 $\varepsilon>0$, 由连续函数的一致连续性, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,\quad \forall\, x,x'\in[x_{i-1},x_i],\quad i=1,2,\cdots,n.$$

任取 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, 由

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big[f(x)-f(\xi_i)\big]dx\end{aligned}$$

得

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\Big| \leqslant \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i-x_{i-1}) = \varepsilon(b-a),$$

这说明

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \tag{3.3}$$

(3.2) 式是上式的特殊情形.

例 3.5.6. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分, 其中 $b>a>0$.

解. 将 $[a,b]$ 做如下分划:

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^n=b,$$

其中 $q=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}>1$. 取 $\xi_i=aq^{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant n)$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{aq^{i-1}}(aq^i-aq^{i-1})\\ &= \lim_{n\to\infty} n(q-1)=\lim_{n\to\infty} n\Big(\big(\frac{b}{a}\big)^{\frac{1}{n}}-1\Big)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{(b/a)^t-1}{t}=\ln(b/a).\end{aligned}$$

例 3.5.7. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分.

解. 将 $[0,1]$ 做如下分划:

$$0<\tan\frac{\pi}{4n}<\tan\frac{2\pi}{4n}<\cdots<\tan\frac{i\pi}{4n}<\cdots<1,$$

取 $\xi_i=\sqrt{x_ix_{i-1}}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{x_i-x_{i-1}}{1+x_ix_{i-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \tan\big(\frac{i\pi}{4n}-\frac{(i-1)\pi}{4n}\big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

在计算积分的时候, 有时需要对变量做一些简单的变换. 例如, 当 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数时, $f(t+c)$ 是关于 $t\in[a-c,\ b-c]$ 的连续函数, 根据 (3.1) 易见

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-c}^{b-c} f(t+c)dt;$$

同理, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 也有

$$\int_a^b f(x)dx=\alpha\int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(\alpha t)dt.$$

例 3.5.8. $x>0$, 求积分 $\displaystyle\int_0^x a^t dt\ (a>0, a\neq 1)$.

解. 令 $t=xs$, 则由例 3.5.2, 有

$$\int_0^x a^t dt=x\int_0^1 (a^x)^s ds=x\frac{a^x-1}{\ln a^x}=\frac{a^x-1}{\ln a}.$$

命题 3.5.2 (积分中值定理)**.** 设 f, g 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果 g 不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证明. 不妨设 $g \geqslant 0$. f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别记为 m, M, 则

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad \forall\ x \in [a,b].$$

根据积分的保序性和线性性, 有

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则任取 $\xi \in [a,b]$ 即可. 如果 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 则

$$m \leqslant \Big(\int_a^b g(x)dx\Big)^{-1}\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M,$$

由连续函数的介值定理知存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \Big(\int_a^b g(x)dx\Big)^{-1}\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

此 ξ 即为所求的点. □

注. 在此命题中取 $g = 1$, 则得到简单推论: 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad 或\ f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

这里 $f(\xi)$ 也就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

例 3.5.9. 设 f 为 $[0,a]$ 上的连续函数, 则

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(0).$$

证明. 由积分中值定理, 当 $x \in (0,a)$ 时, 存在 $\xi = \xi_x \in [0,x]$, 使得

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(\xi).$$

当 $x \to 0^+$ 时, $\xi \to 0^+$. 由 f 的连续性以及上式即得欲证结论. □

例 3.5.10. $(*)$ 设 f 为 $[0,a]$ 上的连续函数, 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明, 存在 $\xi = \xi_{n,x} \in [0,x]$ 使得

$$f_n(x) = f(\xi)\frac{x^n}{n!}.$$

证明. 我们对 n 使用归纳法. $n=1$ 的情形就是积分中值定理. 设结论对 $n-1$ 成立, 则

$$m\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant f_{n-1}(x)\leqslant M\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

其中 m, M 分别是 f 的最小值和最大值. 利用 t^{n-1} 在 $[0,x]$ 上积分为 x^n/n (习题) 可得

$$m\frac{x^n}{n!}\leqslant \int_0^x f_{n-1}(t)dt\leqslant M\frac{x^n}{n!},$$

于是欲证结论由连续函数的介值定理得到. □

§3.5.3 进一步的例子

本小节内容可以作为选读材料.

下面继续举几个和积分有关的例子.

例 3.5.11. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\big)$.

解. 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\Big]\\ &=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\ln 2.\end{aligned}$$

例 3.5.12. 求出所有满足下面条件的连续函数 f:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}.$$

解. 因为 f 连续, 我们在等式 $f(x+t)=f(x)+f(t)$ 两边关于 t 积分, 有

$$\int_x^{x+y}f(t)dt=\int_0^y f(x+t)dt=f(x)y+\int_0^y f(t)dt,$$

因此

$$\int_0^{x+y}f(t)dt=f(x)y+\int_0^x f(t)dt+\int_0^y f(t)dt.$$

在上式中交换 x,y 的位置立即得到 $f(x)y=f(y)x$. 特别地, 令 $y=1$ 可得出 $f(x)=f(1)x=Cx$. □

例 3.5.13 (Young 不等式)**.** 设 f 是 $[0,+\infty)$ 中的单调递增连续函数, $f(0)=0$, $f^{-1}(y)$ 表示 f 的反函数, 则当 $a,b>0$ 时

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

等号成立当且仅当 $b=f(a)$.

证明. 我们分情况讨论.

(1) $b = f(a)$. 这时 $f : [0, a] \to [0, b]$ 为连续函数, 其逆 $f^{-1} : [0, b] \to [0, a]$ 也是连续函数. 取 $[0, a]$ 的 n 等分:

$$\pi: \ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a,$$

则 $y_i = f(x_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 构成 $[0, b]$ 的分划:

$$\pi': \ 0 = f(x_0) = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

因为 f 在闭区间上一致连续, 故当 $n \to \infty$ 时 $\|\pi'\| \to 0$. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f^{-1}(f(x_{i-1}))(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \big[f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \big[f(x_i)x_i - x_{i-1}f(x_{i-1})\big] \\
&= \lim_{n\to\infty} [x_n f(x_n) - x_0 f(x_0)] \\
&= af(a) - 0f(0) = af(a) = ab.
\end{aligned}$$

(2) $0 < b < f(a)$. 由 f 的连续性, 存在 $\xi \in (0, a)$ 使得 $b = f(\xi)$. 由 (1), 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \\
&= \int_0^\xi f(x)dx + \int_\xi^a f(x)dx + \int_0^{f(\xi)} f^{-1}(y)dy \\
&> f(\xi)(a - \xi) + \int_0^\xi f(x)dx + \int_0^{f(\xi)} f^{-1}(y)dy \\
&= f(\xi)(a - \xi) + \xi f(\xi) = af(\xi) = ab.
\end{aligned}$$

(3) $b > f(a)$. 这时将 f 视为 f^{-1} 的反函数就可将问题化为情形 (2). □

作为应用, 如果我们考虑连续函数 $f(x) = x^{p-1}$ $(p > 1)$, 其逆为

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}, \ \ (\text{其中 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

于是当 $a, b > 0$ 时,

$$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

这个不等式也称为 Young 不等式 (上式中的积分参见本节习题 3.5(3)), 等号成立的条件是 $b^q = a^p$. 当 $p = q = 2$ 时, Young 不等式也就是平均值不等式.

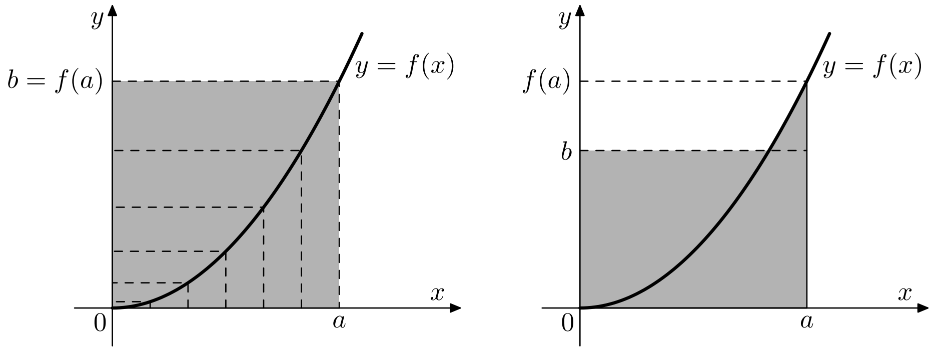


图 3.11 Young 不等式

例 3.5.14 (Hölder 不等式)**.** 设 f,g 为 $[a,b]$ 上非负连续函数, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \Big[\int_a^b f^p(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\int_a^b g^q(x)dx\Big]^{\frac{1}{q}},$$

等号成立当且仅当 $f^p=cg^q$ 或 $cf^p=g^q$, c 为常数.

证明. 不妨设

$$\int_a^b f^p(x)dx>0,\quad \int_a^b g^q(x)dx>0.$$

则由 Young 不等式, 有

$$\frac{f(x)g(x)}{\Big[\int_a^b f^p(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\int_a^b g^q(x)dx\Big]^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{f^p(x)}{\int_a^b f^p(x)dx}+\frac{1}{q}\frac{g^q(x)}{\int_a^b g^q(x)dx},$$

上式两边在 $[a,b]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\Big[\int_a^b f^p(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\int_a^b g^q(x)dx\Big]^{\frac{1}{q}}} &\leqslant \frac{1}{p}\frac{\int_a^b f^p(x)dx}{\int_a^b f^p(x)dx}+\frac{1}{q}\frac{\int_a^b g^q(x)dx}{\int_a^b g^q(x)dx}\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

不等式得证. 等号成立的条件可由 Young 不等式等号成立的条件得到. □

例 3.5.15. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, g 是周期为 T 的连续周期函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_a^b f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

证明. 不妨设周期函数 $g(x)$ 在一个周期区间内积分为零, 不然考虑 $g(x)-C$ 即可, 其中

$$C=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx.\ \ (g \text{ 的平均值})$$

由于闭区间上连续函数是一致连续的, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon,\ \ \forall\ |x'-x''|\leqslant T/n.$$

当 n 充分大时, 不妨设

$$\frac{i-1}{n}T<a\leqslant\frac{i}{n}T,\ \ \ \frac{k}{n}T\leqslant b<\frac{k+1}{n}T,$$

其中 i,k 为整数. 利用

$$\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} g(nx)dx=\frac{1}{n}\int_{jT}^{(j+1)T} g(t)dt=0,\ \ \forall\ j\in\mathbb{Z}$$

可得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(nx)dx\\
&=\int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx+\sum_{j=i}^{k-1}\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} f(x)g(nx)dx+\int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx\\
&=\int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx+\sum_{j=i}^{k-1}\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T}\big[f(x)-f(\frac{j}{n}T)\big]g(nx)dx\\
&\quad+\sum_{j=i}^{k-1} f(\frac{j}{n}T)\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T} g(nx)dx+\int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx\\
&=\int_a^{\frac{i}{n}T} f(x)g(nx)dx+\sum_{j=i}^{k-1}\int_{\frac{j}{n}T}^{\frac{(j+1)}{n}T}\big[f(x)-f(\frac{j}{n}T)\big]g(nx)dx+\int_{\frac{k}{n}T}^b f(x)g(nx)dx.
\end{aligned}$$

于是, 当 n 充分大时, 可得如下估计

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)g(nx)dx\Big|&\leqslant\frac{T}{n}\max|f|\max|g|+\frac{(k-i)}{n}T\varepsilon\max|g|+\frac{T}{n}\max|f|\max|g|\\
&\leqslant\frac{2T}{n}\max|f|\max|g|+(b-a)\varepsilon\max|g|,
\end{aligned}$$

由此易见

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=0.$$

注. 这个证明利用了这一点, 即当 n 充分大时, $g(nx)$ 的周期充分小, 从而在一个周期之内 f 近似地为常数. □

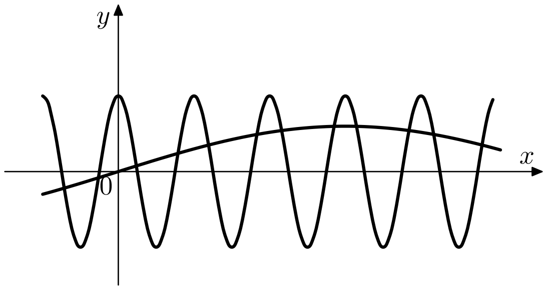


图 3.12 周期振荡函数的积分

习题 3.5

1. 如果 f 本身就是分段线性的连续函数, 试说明用等分区间作分段线性逼近所得积分的极限与分段线性函数的积分是一致的.

2. 按照定义计算积分 $\displaystyle\int_a^b \sin x\,dx$.

3. (1) 设 $b>a>0$, $\alpha\neq-1$. 按照定义求积分 $\displaystyle\int_a^b x^\alpha dx$. (2)* 设 $b,\alpha>0$, 求积分 $\displaystyle\int_0^b x^\alpha dx$, 利用积分计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

4. 不借助对数函数, 证明函数

$$f(x)=\int_1^x\frac{dt}{t},\quad x>0$$

具有性质 $f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall\ x,\,y>0$.

5. 设 g 为连续周期函数, 周期为 T, 则当 $b-a=T$ 时

$$\int_a^b g(x)dx=\int_0^T g(x)dx.$$

6. 通过计算证明 $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$.

7. 试说明, 积分中值定理中的点 ξ 可取在开区间 (a,b) 中.

8. 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果对 $[a,b]$ 上任意满足条件 $g(a)=g(b)=0$ 的连续函数 g, 均有 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=0$, 则 $f\equiv 0$.

9. 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果对 $[a,b]$ 上任意满足条件 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 的连续函数 g, 均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, 则 $f = C$ 为常数. (提示: 设 f 的平均值为 C, 考虑 $g = f - C$ 以及 g^2 的积分.)

10. (*) 利用积分 $e^x = 1 + \int_0^x e^t dt$ 证明

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \quad \theta \in [0,1].$$

11. 设 f 为 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数, 则

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx \leqslant 2\int_a^b xf(x)dx,$$

等号成立当且仅当 f 为常值函数. (提示: 考虑 $(x - \frac{a+b}{2})(f(x) - f(\frac{a+b}{2}))$.)

12. (*) 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 则

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\int_a^b |f(x)|^n dx\Big]^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

13. 设 f, g 为 $[a,b]$ 上非负连续函数, 利用 Hölder 不等式证明

$$\Big(\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b f^n(x)g(x)dx\Big)\Big(\int_a^b f^{n+2}(x)g(x)dx\Big).$$

14. (*) 设 f, g 为 $[a,b]$ 上正的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f^n(x)g(x)dx} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

15. 用 Young 不等式证明 Hölder 不等式: 设 $a_i, b_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \big(\sum_{i=1}^n a_i^p\big)^{\frac{1}{p}}\big(\sum_{i=1}^n b_i^q\big)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{其中 } p,\ q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

16. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0.$$

17. $(*)$ 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 中的严格单调递增连续函数, 则

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & x > 0, \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

也是 $[0,+\infty)$ 中的严格单调递增连续函数.

18. $(*)$ 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上正连续函数, 则

$$\lim_{r\to 0^+}\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^r(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{r}} = \exp\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\Big),$$

并用 Hölder 不等式说明上式左端关于 r 单调递增.

第四章　微分及其逆运算

本章初步介绍一元函数的微分学, 我们引入导数和微分的概念来研究函数在一点附近的局部变化性质. 将微分和积分这一对概念统一在一起的是重要的 Newton-Leibniz 公式.

§4.1　可导与可微

在经典物理学中, 如果我们考察质点沿直线的运动, 则有速度和加速度的概念. 速度是反映位移随时间变化的量, 即速度是位移函数的变化率, 而加速度是反映速度随时间变化的量. 我们现在利用极限给出这些变化量的数学定义.

定义 4.1.1 (导数). *设函数 f 在 x_0 附近有定义, 如果极限*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且有限, 则称 f 在 x_0 处可导, 此极限称为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.

注. (1) 如果记 $y=f(x)$, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, 则导数也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号是 $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, 它主要强调 f 是关于 x 求导的.

(2) 既然导数是用极限定义的, 我们当然也可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述它: 如果存在 $A\in\mathbb{R}$, 使得任给 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A\right|<\varepsilon,$$

则 f 在 x_0 处可导, 导数为 A.

例 4.1.1. *研究下列函数的导数:*

$$C,\quad x^n\ (n\geqslant 1),\quad a^x\ (a>0,\ a\neq 1),\quad \ln x,\quad \sin x,\quad \cos x.$$

解. 显然, 常值函数的导数恒为零. 这和我们的直观是相吻合的, 因为导数反映函数的变化率, 而常值函数的变化率当然为零.

当 $n\geqslant 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0+\Delta x)^n=x_0^n+nx_0^{n-1}\Delta x+\cdots,$$

其中省略的是 Δx 的高次项. 于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^n-x_0^n}{\Delta x}=nx_0^{n-1},$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

当 $a>0$, $a\neq 1$ 时, 利用例 3.1.15 的计算可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a,$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a$. 特别地, $(e^x)'=e^x$.

当 $x_0>0$ 时, 利用例 3.1.13 的计算可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x}=\frac{1}{x_0},$$

即 $(\ln x)'=1/x$.

设 $x_0\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x_0,$$

即 $(\sin x)'=\cos x$. 同理可以算出 $(\cos x)'=-\sin x$. □

如果考虑左右极限, 则有左导数和右导数的概念. 左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$. f 在 x_0 处可导当且仅当其左右导数相等.

例 4.1.2. 研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解. 当 $x<0$ 时, 有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

这说明 $f'_-(0)=-1$. 类似地, 当 $x>0$ 时, 有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

因此 $f'_+(0)=1$. 这说明 f 在 $x_0=0$ 处不可导. □

例 4.1.3. 定义函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

研究 f 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解. 我们来计算 f 在 $x_0=0$ 处的右导数:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0,$$

同理可得 $f'_-(0)=0$, 因此 f 在 $x_0=0$ 处可导. □

下面我们研究导数的运算法则. 首先有

命题 4.1.1. *设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.*

证明. 设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x\to x_0}\big[f(x)-f(x_0)\big]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

即 f 在 x_0 处连续. □

命题 4.1.2 (导数的运算法则)**.** *设 f,g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α,β 为常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 在 x 处可导. 且有*

(1) $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$ （线性性）;

(2) $(fg)'=f'g+fg'$ （导性）.

证明. (1) 这可从导数的定义和函数极限的性质直接得出.

(2) 设 f, g 在 x_0 处可导. 利用

$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=\big[f(x)-f(x_0)\big]g(x)+f(x_0)\big[g(x)-g(x_0)\big]$$

可得

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

其中我们用到了 f, g 在 x_0 处的连续性. □

导数运算的线性性可以推广为对任意有限多个函数的线性组合成立. 从导性还得到

推论 4.1.3. *设 f,g 在 x_0 处可导, $g(x_0)\neq 0$. 则 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

证明. 设 g 在 x_0 处可导, 则 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0)\neq0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零. 我们先说明 $1/g=\dfrac{1}{g}$ 在 x_0 处可导:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x_0)g(x)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

因此 $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ 可导, 利用导数的导性, 有

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)' = f' \cdot \Big(\frac{1}{g}\Big) + f \cdot \Big(\frac{1}{g}\Big)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

推论得证. □

例 4.1.4. *研究下列函数的导数:*

$$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1), \quad \csc x, \quad \sec x, \quad \tan x, \quad \cot x.$$

解. 利用 $(\ln x)' = 1/x$ 可得

$$(\log_a x)' = \Big(\frac{\ln x}{\ln a}\Big)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

利用 $(\sin x)' = \cos x$ 可得

$$\begin{aligned}(\csc x)' &= \Big(\frac{1}{\sin x}\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = -\csc x \cot x.\end{aligned}$$

利用 $(\cos x)' = -\sin x$ 可得

$$\begin{aligned}(\sec x)' &= \Big(\frac{1}{\cos x}\Big)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\sin x = \sec x \tan x.\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \\ (\cot x)' &= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.\end{aligned}$$

这就得到了常见三角函数的导数. □

为了讨论导数关于复合函数的运算规则, 我们现在从几何的角度来解释导数的含义. 考虑函数 f 在 x_0 附近的图像, 经过图像上两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x, f(x))$ 的直线 (割线) 的方程为

$$y(t) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(t - x_0) + f(x_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

当 $x \to x_0$ 时, 考察此直线的变化. 当 f 在 x_0 处可导时, 直线的极限位置是一条经过 $(x_0, f(x_0))$ 且斜率为 $f'(x_0)$ 的直线, 称为 f 在 x_0 处的**切线**, 其方程为

$$y(t) = f'(x_0)(t - x_0) + f(x_0).$$

方程

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$$

所代表的直线则称为 f 在 x_0 处的**法线**.

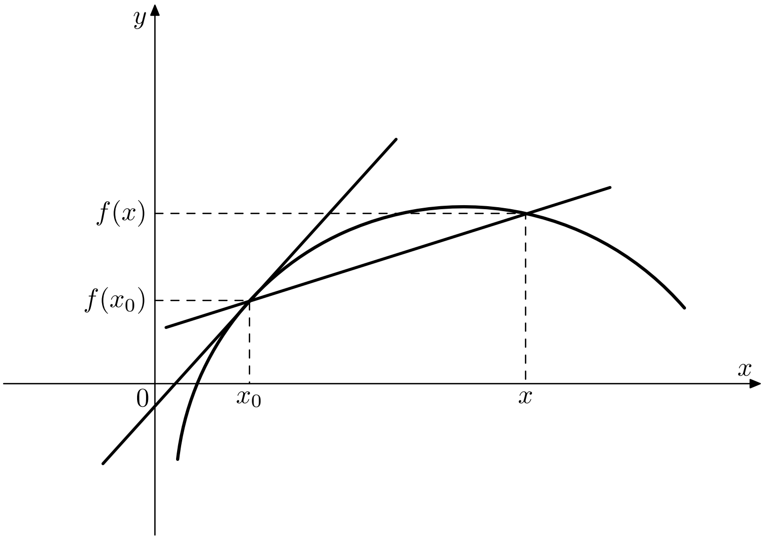


图 4.1 导数与切线

根据切线的定义过程, 我们可以把切线看成函数 f 的图像在 x_0 处的一个线性逼近. 即, 函数 f 在 x_0 附近可以近似地看成线性函数, 这种线性逼近或线性化的方法是我们研究函数的一种基本手法. 比如, 在力学中, 考察某个质点的运动, 它的运动轨迹可能非常复杂, 但在一个非常短的时间之内往往可以认为该质点在做匀速直线运动. 引入下面的概念使得我们可以严格地描述这种现象.

定义 4.1.2 (微分)**.** 设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 如果存在常数 A, 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0)$.

导数和微分之间的关系体现在下面的命题中.

命题 4.1.4. 设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

证明. 设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

因此

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0).$$

这说明 f 在 x_0 处可微.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)=A$. □

微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似. 由于微分的斜率等于导数, 我们将 x_0 处的微分 $df(x_0)$ 写为

$$df(x_0)=f'(x_0)dx(x_0),$$

其中 $dx(x_0)$ 是函数 x 在 x_0 的微分 (即恒同线性映射).

命题 4.1.5 (链规则). *设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f\circ g=f(g)$ 在 x_0 处可导, 且*

$$[f(g)]'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证明. 因为 g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

这说明 $x\to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x)-g(x_0)|\leqslant C|x-x_0|$. 由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned}f(g(x))&=f(g(x_0))+f'(g(x_0))\big(g(x)-g(x_0)\big)+o\big(g(x)-g(x_0)\big)\\&=f(g(x_0))+f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0)+f'(g(x_0))o(x-x_0)+o(x-x_0)\\&=f(g(x_0))+f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).\end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微 (可导), 导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

链规则对于任意有限个函数的复合也适用, 比如

$$[f(g(h))]'=f'(g(h))g'(h)h'.$$

例 4.1.5. *研究下列函数的导数:*

$$\ln|x|,\quad x^\alpha\ (\alpha\neq 0).$$

证明. 我们知道, 当 $x\neq 0$ 时, $(|x|)'=\mathrm{sgn}x$. 由复合函数的求导得

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}(|x|)'=\frac{1}{|x|}\mathrm{sgn}x=\frac{1}{x}.$$

如果 $\alpha \neq 0$, $x > 0$, 则

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \big(e^{\alpha \ln x}\big)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' \\ &= x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1};\end{aligned}$$

如果 $\alpha > 1$, 则 $x = 0$ 处的导数计算如下

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = 0;$$

我们现在考虑 $x < 0$ 的情形. 此时, 要求 $\alpha = \dfrac{p}{q}$ 为有理数, p, q 为互素的整数, 且 q 为奇数. 我们有

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= ((-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|})' = (-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|}(\alpha \ln |x|)' \\ &= x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

这样就得到了定义域内所有可导点处的导数. □

命题 4.1.6 (反函数求导法则)**.** *设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 如果 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

证明. 因为 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\ (x \to x_0). \tag{4.1}$$

当 $x \to x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, 上式表明, 当 $x \to x_0$ 时, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant C|x - x_0|, \quad 或 \quad |y - y_0| \geqslant C|g(y) - g(y_0)|.$$

特别地, 当 $y \to y_0$ 时, $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$. 在 (4.1) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$ 可得

$$\begin{aligned}y &= y_0 + f'(x_0)\big(g(y) - g(y_0)\big) + o\big(g(y) - g(y_0)\big) \quad (y \to y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)\big(g(y) - g(y_0)\big) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0),\end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0).$$

这说明 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且导数为 $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

注. 导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能去掉. 例如 $f(x) = x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数, f 处处可导, 但其反函数 $g(y) = y^{1/3}$ 在 $y = 0$ 处不可导. □

例 4.1.6. *研究下列函数的导数:*

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x, \quad \operatorname{arccot} x.$$

证明. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 可逆. 由反函数求导公式, 有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\arccos x$ 可类似求导, 也可这样看: 因为 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, 故

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$ 可逆. 由反函数求导公式, 有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{-\csc^2 \operatorname{arccot} x} = -\frac{1}{1 + \cot^2 \operatorname{arccot} x} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

这就得到了反三角函数的导数公式. □

我们如下定义一类所谓的双曲函数, 首先是双曲正弦 $\sinh x$ 和双曲余弦 $\cosh x$:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

然后是双曲正切 $\tanh x$ 和双曲余切 $\coth x$:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

简单的计算表明, 双曲函数之间满足如下关系

$$\begin{aligned}
\sinh(x + y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y, \\
\sinh(x - y) &= \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y, \\
\cosh(x + y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y, \\
\cosh(x - y) &= \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y,
\end{aligned}$$

以及

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - (\tanh x)^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)^2 - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}.$$

双曲函数的导数计算如下:

命题 4.1.7. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$, $(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$.

证明. 利用 e^x 的导数直接计算即可, 留作习题. □

为了方便起见, 我们把已经得到的导数计算公式总结在下面.

1. $(C)' = 0$ (C 为常数);
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0)$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$;
6. $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\sec x)' = \sec x \tan x$;
12. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;
13. $(\tan x)' = \sec^2 x$;
14. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\cot x)' = -\csc^2 x$;
16. $(\mathrm{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
17. $(\sinh x)' = \cosh x$;
18. $(\cosh x)' = \sinh x$;
19. $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$;
20. $(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$.

下面我们来计算两个稍微复杂一点的例子.

例 4.1.7. 求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解. 利用复合求导, 有

$$\begin{aligned}
\big[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\big]' &= (x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\big[x' + (\sqrt{1+x^2})'\big] \\
&= (x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\big[1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)'\big] \\
&= (x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\big[1 + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

例 4.1.8. 设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x)\ln u(x))' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x),$$

利用复合求导就得到

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)}\Big(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big).$$

上面例子中求对数再求导的方法称为**对数法**, 这是很常用的求导数技巧.

最后我们简要介绍函数的全微分的概念. 我们知道, f 在 x 处的微分是一个斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 当 x 变化时, 这些线性映射也随之变化, 即 $x \mapsto df(x)$ 是一个新的映射, 记为 df, 称为 f 的**外微分** 或 **全微分**. 在这个意义下, x 的全微分 dx 是这样一个映射, 它把任意点 x 均映为 x 处的恒同线性映射. 因为 $df(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法和数乘运算, 此时有

$$df = f'(x)dx.$$

一般地, 我们把形如 fdx (f 为函数) 的表达式称为 1 次微分形式. 根据导数的运算法则, 我们有

命题 4.1.8. *设 f, g 可微, 则*
(1) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$, 其中 α, β 为常数;
(2) $d(fg) = gdf + fdg$;
(3) $d(f/g) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$, 其中 $g \neq 0$.

对于可微函数来说, 复合求导可以重新表述为全微分的形式不变性, 即

命题 4.1.9. *设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则*

$$d[f(g)] = f'(g)dg.$$

证明. 根据复合求导和外微分的定义, 有

$$d[f(g)] = [f(g)]'dx = f'(g)g'dx = f'(g)dg.$$

这个式子称为形式不变性是因为它的形式和 $df = f'dx$ 一样, 只是将 x 换成了 g 而已. □

我们也可以利用外微分来计算导数.

例 4.1.9. *求函数*

$$f(x) = \ln(x^2e^x + \sqrt{1+x^2})$$

的导数.

解. 由全微分的形式不变性, 有

$$\begin{aligned} df &= (x^2e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1}d(x^2e^x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= (x^2e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1}\big(e^x(2x)dx + x^2e^xdx + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)\big) \\ &= (x^2e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1}\big(2xe^x + x^2e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\big)dx, \end{aligned}$$

因此 f 的导数为

$$f'(x) = (x^2e^x + \sqrt{1+x^2})^{-1}\big(2xe^x + x^2e^x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\big).$$

有时候, 函数不是通过显式表达式给出, 而是通过隐式给出, 这时利用外微分计算导数显得比较容易一些.

例 4.1.10. 设 $-y^2 + 2e^y = x^2$ 决定了可微函数 $y = f(x)$, 求 f 的导数.

证明. 在等式 $-y^2 + 2e^y = x^2$ 两边微分得

$$-2ydy + 2e^ydy = 2xdx,$$

因此

$$dy = \frac{x}{e^y - y}dx,$$

这说明 f 的导数为 $\frac{x}{e^y - y}$. □

在第十二章中我们将讨论隐函数存在的条件.

习题 4.1

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\big[f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)\big].$$

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}.$$

3. 按照导数的定义求函数 $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^2$ 在 $x = 0, 1, 2$ 处的导数.

4. 按照导数的定义求函数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在 $x = 0, 1, 2$ 处的导数.

5. 设 $f(0) = 0$, f 在 $x = 0$ 处可导, 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

6. 已知函数 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 为在 a 处连续的函数, 求 $f'(a)$.

7. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数}, \\ 0, & x \text{ 为有理数}, \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 处有导数.

8. 计算函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的导数.

9. 函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导吗?

10. 确定常数 a, b 的值, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 1,\\ ax+b, & x<1,\end{cases}$$

在 $x=1$ 处可导.

11. 求下列函数的导数

(1) $f(x)=2x^3+4x^2-3$; (2) $f(x)=(x+1)^2(x+2)(x+3)^3$;
(3) $f(x)=(1+nx^m)(1+mx^n)$; (4) $f(x)=(ax^m+b)^n(cx^n+d)^m$;
(5) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$; (6) $f(x)=\ln(\sin x)+e^{-x}\sin x$.

12. 求下列函数的导数

(1) $f(x)=\sqrt{\sin^2 x}$; (2) $f(x)=\dfrac{2+\sin x}{x}$; (3) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{1+x}-\dfrac{1}{x}$;
(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$; (5) $f(x)=\dfrac{xe^{-x}-1}{\sin x}$; (6) $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}$;
(7) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; (8) $f(x)=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$; (9) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$.

13. 求下列函数的导数

(1) $f(x)=e^{x^2\sin x}$; (2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; (3) $f(x)=\arcsin(\cos^2 x)$;
(4) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (5) $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$; (6) $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)$;
(7) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; (8) $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$; (9) $f(x)=\sin(\sin(\cos x))$.

14. 求下列函数的导数

(1) $f(x)=(x\sin x)^x$; (2) $f(x)=(x)^{a^x}$; (3) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}$;
(4) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (5) $f(x)=a^{x^n}$; (6) $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

15. 设 $f(x)$ 可导, 求 y':

$$(1)\ y=f(x\sin x);\quad (2)\ y=f(e^x)e^{f(x)};\quad (3)\ y=f(\cos x)\sin x;$$
$$(4)\ y=f(f(f(x)));\quad (5)\ y=f(\tan x);\quad (6)\ y=[f(\ln x)]^n.$$

16. 设 $u(x)$, $v(x)$ 可导, 求 y':

$$(1)\ y=\sqrt{u^2(x)+v^2(x)};\quad (2)\ y=\arctan\tfrac{u(x)}{v(x)};\quad (3)\ y=\sqrt[v]{u};$$
$$(4)\ y=\frac{u}{v^2};\quad (5)\ y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}};\quad (6)\ y=u^{e^v}.$$

17. 通过对 $(1+x)^n$ 求导并利用二项式定理证明

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k=n2^{n-1};\quad (2)\ \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}.$$

18. 证明, 可导偶函数的导数为奇函数, 可导奇函数的导数为偶函数, 可导周期函数的导数仍为周期函数.

19. $(*)$ 设 $a_{ij}(x)$ 均为可导函数, 求行列式函数 $\det\big(a_{ij}(x)\big)_{n\times n}$ 的导数.

20. $(*)$ Riemann 函数定义为

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\in(0,1)\cap\mathbb{Q},\ p,q\ \text{为互素正整数},\\ 0, & x\ \text{为}\ (0,1)\ \text{中的无理数}.\end{cases}$$

证明 Riemann 函数 $R(x)$ 处处不可导.

§4.2 高阶导数

在前一节开始我们已经提到, 要考察质点的运动, 除了考虑速度, 还要考虑加速度. 速度是位移函数的导数, 加速度则是速度的导数.

定义 4.2.1 (高阶导数). 设 f 在 x_0 附近可导, 如果导函数 f' 在 x_0 处仍可导, 则称 f 在 x_0 处 2 阶可导. 记

$$f''(x_0)=(f')'(x_0),$$

称为 f 在 x_0 处的 2 阶导数. 一般地, 如果 f 在 x_0 附近 n $(n\geqslant 1)$ 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 在 x_0 处可导, 则称 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 记

$$f^{(n+1)}(x_0)=(f^{(n)})'(x_0),$$

称为 f 的 $n+1$ 阶导数.

按照我们的记号, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ 等等. 我们约定 $f^{(0)} = f$. 有时也用下面的记号表示高阶导数:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(3)} = f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \text{等等.}$$

例 4.2.1. 求线性函数 $f(x) = ax + b$ 的 2 阶导数.

解. $f'(x) = (ax+b)' = a$, $f''(x) = (a)' = 0$. 因此线性函数的 2 阶导数恒为零, 即匀速直线运动的加速度为零. □

例 4.2.2. 求二次函数 $f(x) = x^2$ 的 2 阶导数.

解. $f'(x) = (x^2)' = 2x$, $f''(x) = (2x)' = 2$, 即二次函数的 2 阶导数为常数. □

定义 4.2.2. 如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n 阶可导; 如果 f 可导, 且导函数 f' 连续, 则称 f (1 阶) 连续可导, 记为 $f \in C^1(I)$; 一般地, 如果 f 在 I 中 n 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 连续, 则称 f n 阶连续可导, 记为 $f \in C^n(I)$. 如果 f 在 I 中存在任意阶导数, 则称 f 是光滑的, 记为 $f \in C^\infty(I)$.

例 4.2.3. 可微函数的导函数不一定连续.

解. 考虑下面的函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们先计算 f 在 $x = 0$ 处的导数:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

这里我们用到了估计

$$\left|\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{x} \to 0 \quad (x \to 0^+).$$

当 $x > 0$ 时, 由复合求导, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

考察 f' 在 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 处的取值知 $f'(x_n) \to -\infty$, 因此 f' 不连续. □

例 4.2.4. 设 $k=1,2,\cdots$, 则函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是 C^k 函数, 但不是 C^{k+1} 的.

解. 同上例一样, 可以计算出 $f'(0)=0$, 且

$$f'(x)=\begin{cases}(2k+1)x^{2k}\sin\frac{1}{x}-x^{2k-1}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

同理,

$$f''(x)=\begin{cases}2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x}-4kx^{2k-2}\cos\frac{1}{x}-x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

继续求导可得 $f^{(k)}(0)=0$, 且当 $x\neq 0$ 时,

$$f^{(k)}(x)=x^2\phi(x)\pm x\sin\frac{1}{x}\ \ \text{或}\ \ x^2\phi(x)\pm x\cos\frac{1}{x},$$

其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 附近有界. 因此 $f^{(k)}$ 连续但在 $x=0$ 处不可导. □

例 4.2.5. $(*)$ 分析函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$$

的高阶可导性质.

解. 如同前面的例子那样, 可以计算出 $f'(0)=0$, 且

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

我们用归纳法说明

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$$

其中 $p_k(t)$ 是次数为 $2k$ 的多项式. $k=1$ 时 $p_1(t)=t^2$. 假设 $f^{(k)}$ 如上, 则显然 $f_-^{(k+1)}(0)=0$, 而

$$\begin{aligned}f_+^{(k+1)}(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}}{x}\\ &=\lim_{t\to+\infty}\frac{tp_k(t)}{e^t}=0.\end{aligned}$$

因此 $f^{(k+1)}(0)=0$. 当 $x>0$ 时

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= p_k'\big(\frac{1}{x}\big)\big(-\frac{1}{x^2}\big)e^{-\frac{1}{x}} + p_k\big(\frac{1}{x}\big)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\
&= p_{k+1}\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x}},
\end{aligned}
$$

其中 $p_{k+1}(t)=t^2p_k(t)-t^2p_k'(t)$. 这就说明 f 是任意阶可导的光滑函数. □

命题 4.2.1. 设 f,g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

证明. (1) 这可由求导运算的线性及归纳法直接得到.

(2) 对 n 用数学归纳法. $n=1$ 的情形就是求导运算的导性. 设公式对 $n=k$ 成立, 则 $n=k+1$ 时

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} &= [(fg)^{(k)}]' = \sum_{l=0}^{k}C_k^l[f^{(k-l)}g^{(l)}]' \\
&= \sum_{l=0}^{k}C_k^l[f^{(k-l+1)}g^{(l)}+f^{(k-l)}g^{(l+1)}] \\
&= C_k^0f^{(k+1)}g+\sum_{l=1}^{k}C_k^lf^{(k-l+1)}g^{(l)}+\sum_{l=0}^{k-1}C_k^lf^{(k-l)}g^{(l+1)}+C_k^kfg^{(k+1)} \\
&= f^{(k+1)}g+\sum_{l=1}^{k}[C_k^l+C_k^{l-1}]f^{(k-l+1)}g^{(l)}+fg^{(k+1)} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1}C_{k+1}^lf^{(k+1-l)}g^{(l)},
\end{aligned}
$$

其中我们用到组合恒等式 $C_k^l+C_k^{l-1}=C_{k+1}^l$. □

现在我们再看几个高阶导数计算和应用的例子.

例 4.2.6. 设多项式 $p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 次数为 n, 则

(1) $p_n^{(n)}(x)=n!a_n$, 从而 $p_n^{(k)}=0$, $\forall\ k>n$;

(2) $a_k=\dfrac{1}{k!}p_n^{(k)}(0)$, $k=0,1,\cdots,n$.

证明. 直接逐项求导, 利用归纳法可得

$$
p_n^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}+(n-1)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-1-k}+\cdots+k!a_k,
$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n$. 特别地, 取 $k=n$ 就得到 (1), 而令 $x=0$ 就得到 (2). □

例 4.2.7. 求函数 $f(x)=a^x$ 的各阶导数.

解. $f'(x)=a^x\ln a$, $f''(x)=a^x(\ln a)^2$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$. □

例 4.2.8. 求函数 $f(x)=\sin x$, $\cos x$ 的各阶导数.

解. $(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $(\sin x)''=-\sin x=\sin(x+\pi)$. 一般地, 如果 $(\sin x)^{(k)}=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$, 则

$$(\sin x)^{(k+1)}=\cos\big(x+\frac{k\pi}{2}\big)=\sin\big(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\big),$$

这说明 $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$. 同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$. □

例 4.2.9. 求函数 $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{2-3x+x^2}$ 的各阶导数.

解. $(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$, $(\frac{1}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$, 用归纳法易见

$$\big(\frac{1}{1-x}\big)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

从而

$$\big(\frac{1}{2-3x+x^2}\big)^{(n)}=\big(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}\big)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}-\frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

这里使用了裂项的技巧. □

例 4.2.10. ($*$) 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解. 记 $y=\arctan x$, 则 $x=\tan y$, 从而

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\big(y+\frac{\pi}{2}\big).$$

对 x 再次求导, 得

$$\begin{aligned}y''&=y'\cdot\big[-\sin y\cdot\sin\big(y+\frac{\pi}{2}\big)+\cos y\cdot\cos\big(y+\frac{\pi}{2}\big)\big]\\&=\cos^2 y\cdot\cos\big(2y+\frac{\pi}{2}\big)\\&=\cos^2 y\cdot\sin 2\big(y+\frac{\pi}{2}\big).\end{aligned}$$

继续对 x 求导, 用归纳法可以发现

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\big(y+\frac{\pi}{2}\big).$$

例 4.2.11. 设 f,g 均为 3 阶可导函数, 求复合函数 $f(g)$ 的 3 阶导数.

解. $[f(g)]'=f'(g)g'$, $[f(g)]''=[f'(g)g']'=f''(g)g'g'+f'(g)g''$, 从而

$$[f(g)]^{(3)}=[f''(g)g'g'+f'(g)g'']'=f^{(3)}(g)(g')^3+3f''(g)g''g'+f'(g)g^{(3)}.$$

这种计算可以推广到高阶导数, 从而得到一个类似于 Leibniz 公式的等式. □

习题 4.2

1. 求下列函数指定阶的导数:

(1) $f(x)=e^x\cos x$, 求 $f^{(5)}$;

(2) $f(x)=x^2\ln x+x\ln^2 x$, 求 f'';

(3) $f(x)=x^2e^x$, 求 $f^{(10)}$;

(4) $f(x)=x^5\cos x$, 求 $f^{(50)}$;

(5) $f(x)=(x^2+1)\cosh x$, 求 $f^{(10)}$;

(6) $f(x)=x\sinh x$, 求 $f^{(100)}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; (2) $f(x)=\sin ax\sin bx$; (3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

(4) $f(x)=x\ln x$; (5) $f(x)=\dfrac{x^n}{1+x}$; (6) $f(x)=x^ne^{ax}$;

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$; (8) $f(x)=x\cos ax$; (9) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

3. 证明下列等式:

(1) $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $\forall\ n\geqslant 1$;

(2) $(\sin^4 x+\cos^4 x)^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{\pi}{2}n)$, $\forall\ n\geqslant 1$;

(3) $(e^{ax}\sin bx)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$, 其中 φ 满足条件

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. 求函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 的各阶导数.

5. 求函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的各阶导数.

6. 设 f 的各阶导数存在, 求 y 的二阶和三阶导数:

(1) $y=f(x^3)$, (2) $y=f(e^{-x})$, (3) $y=f(f(x))$, (4) $y=f(\ln x)$.

7. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足等式 $y''-2y'+2y=0$.

8. 验证函数 $y=a\sin(\alpha x+\varphi)+b\cos(\alpha x+\varphi)$ 满足等式 $y''+\alpha^2y=0$.

9. 验证函数 $y=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}$ 满足等式 $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=0$.

10. 验证函数 $y=\arcsin x$ 满足等式 $xy'=(1-x^2)y''$, 并求 $y^{(n)}(0)$.

11. $(*)$ 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kk^m=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,n-1,\\ (-1)^nn!, & m=n.\end{cases}$$

§4.3 不定积分

在前面两节中, 我们研究了函数的可导性质. 现在我们考虑这样的问题, 即一个给定的函数是另一个可导函数的导数吗? 如果函数 f 给定, 问题就是考虑方程

$$F'(x) = f(x) \tag{4.2}$$

的解. 我们要问, (4.2) 的解存在吗? 如果存在的话, 有多少个解? 在下一章我们将说明, 不是对所有的 f (4.2) 都有解; 如果 F 是一个解, 则显然 $F + C$ (C 为常数) 也是一个解, 我们来说明这也是所有可能的其它解.

命题 4.3.1. *设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' = 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.*

证明. 只要证明必要性即可. 设 $f' = 0$, 在定义域 I 中任取两点 $a < b$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$. 设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数. 考虑集合

$$A = \{x \in [a,b] \,\big|\, |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a,b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 不是空集. 设 ξ 为 A 的上确界. 由 f 的连续性知 $\xi \in A$. 我们断言 $\xi = b$. 事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ξ', 使得 $\xi < \xi' \leqslant b$, 且

$$\Big|\frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi}\Big| = \Big|\frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi} - f'(\xi)\Big| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\xi') - f(\xi)| \leqslant \varepsilon |\xi' - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \xi' \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\xi') - f(a)| &\leqslant |f(\xi') - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon |\xi' - \xi| + \varepsilon |\xi - a| = \varepsilon |\xi' - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\xi' \in A$, 这和 ξ 的选取相矛盾, 因此只能有 $\xi = b$. 即

$$|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon |a - b|.$$

因为 ε 是任取的, 令 $\varepsilon \to 0^+$, 上式表明 $f(a) = f(b)$. □

注. (1) 如果将导数解释为速度, 则命题说的就是速度为零时, 位移不变. 基本的想法是利用连续性论证方法先去证明平均速度很小. 在下一章中我们会给出这件事实的另一个证明.

(2) 如果存在常数 M 使得 $|f'| \leqslant M$, 则把命题证明过程中的 ε 换成 $M + \varepsilon$ 后可以得出下面的估计

$$|f(a) - f(b)| \leqslant M|a - b|,$$

即 f 为 Lipschitz 函数.

同理, 如果关于导数的条件改为 $f' \geqslant 0$, 则可说明 f 单调递增 (习题). □

现在我们回到方程 (4.2). 如果 F_1, F_2 都是 (4.2) 的解, 则 $(F_1 - F_2)' = 0$, 从而 $F_1 - F_2 = C$ 为常数.

定义 4.3.1 (原函数)**.** *方程 (4.2) 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个原函数.*

根据上面的讨论, 任何两个原函数之间只相差一个常数. 对于一般的原函数我们给出下面的定义:

定义 4.3.2 (不定积分)**.** *设函数 f 在区间 I 上有原函数, 则我们用记号*

$$\int f(x)dx$$

表示 f 的原函数的一般表达式, 即如果 F 为 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ \ x \in I,$$

其中 C 为常数.

根据定义, 如果 F 是 f 的原函数, 则 $dF = f(x)dx$, 因此

$$d\Big(\int f(x)dx\Big) = f(x)dx,$$

因此求原函数的过程是求微分过程之逆. 我们可以将前一节的计算结果用原函数表示如下:

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C$;	2. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$;
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$;	4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$;
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;	6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$;
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$;	8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$;
9. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;	10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + C$;
11. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$;	12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$;
13. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$;	14. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\mathrm{arccot} x + C$;
15. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$;	16. $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$;
17. $\displaystyle\int \tanh^2 x\,dx = x - \tanh x + C$;	18. $\displaystyle\int \coth^2 x\,dx = x - \coth x + C$.

我们当然要问, 除了上面列出的函数之外, 还有哪些函数有原函数? 下面重要的结果给出了这个问题的部分答案.

定理 4.3.2 (Newton-Leibniz). 区间 I 中的连续函数都有原函数. 具体来说, 设 f 连续, $a \in I$, 则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in I$$

是 f 的一个原函数.

证明. 设 $x_0 \in I$. 因为 f 连续, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

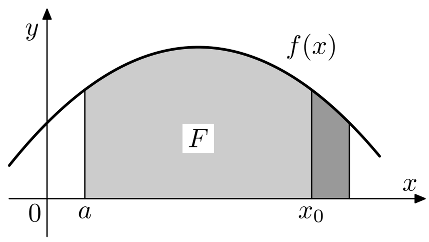
此时

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\Big| \\ &= \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big[f(t) - f(x_0)\big]dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt\Big| \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

这就推出 F 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

由 x_0 的任意性即知 F 为 f 的原函数. □



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$$

图 4.2 Newton-Leibniz 公式

注. (1) 这个定理又称为**微积分基本定理**, 这是本课程最重要的一个定理, 它将微分和积分联系在了一起.

(2) 在第六章中我们会稍稍降低定理中对 f 的连续性要求, 得到一样的结论.

我们现在将 Newton-Leibniz 的这个重要定理改写一下. 设 f 在区间 I 中连续, G 为 f 的任一原函数, 则存在常数 C, 使得 $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt + C$, 因此

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G\Big|_a^b \quad (\text{Newton-Leibniz 公式}).$$

因为 f 的不定积分为原函数, 因此上式也可写为

$$\int_a^b f(x)dx = \Big(\int f(x)dx\Big)\Big|_a^b,$$

从这个等式来看, 连续函数在区间上的积分就好象是在它的不定积分中代入上下积分限一样.

Newton-Leibniz 公式还可写为 (当 G 连续可微时)

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) = G\Big|_a^b \quad \text{(Newton-Leibniz 公式)}.$$

这是一个很常用的形式, 它有一个物理的解释: 如果 G 是随时间 x 变化的物理量, G' 就表示物理量的变化率. G' 的积分表示无穷小变化量在某一段时间内的积累, 最终就等于总的变化量 (右式差值). 例如, 质点位移的变化率就是速度, 速度的积分就又得到位移.

有了这些 Newton-Leibniz 公式, 某些情形下连续函数积分的计算就变得很简单了.

例 4.3.1. 设 $\alpha > 0$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$.

解. 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

相比起直接用积分的定义来计算, 这个计算简单多了. □

例 4.3.2. 设 $x > 0$, 计算积分 $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

解. 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x.$$

利用这个等式我们可以将对数函数定义为连续函数 $\dfrac{1}{t}$ 从 1 到 x 的积分, 即积分给出了定义新函数的一种手段, 这种手段不同于对函数做初等的四则运算. □

例 4.3.3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

解. 因为

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

故由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

例 4.3.4. 计算积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解. 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

例 4.3.5. 计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

解. 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 4.3.6. 计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解. 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

现在我们回到不定积分. 我们有

命题 4.3.3 (不定积分的线性性质)**.** 设 f, g 在区间 I 中均有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx,$$

其中 α, β 为常数.

证明. 这可由求导的线性性和不定积分的定义立即得到. □

下面我们计算几个简单的不定积分作为例子.

例 4.3.7. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$.

解. 由不定积分的线性性质, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

在本例中, 我们充分利用了三角函数的性质对被积函数进行裂项. 下例是另外一种裂项方法.

例 4.3.8. 设 $a \neq 0$, 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$.

解. 由不定积分的线性性质, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\Big[\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\Big] \\ &= \frac{1}{2a}\big[\ln|x-a| - \ln|x+a|\big] + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C.\end{aligned}$$

下面的命题有时也比较有用.

命题 4.3.4. 设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

证明. 记 $G(x) = xg(x) - F(g(x))$, 由 $f(g(x)) = x$ 以及复合求导, 有

$$\begin{aligned}G'(x) &= g(x) + xg'(x) - F'(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - f(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - xg'(x) = g(x).\end{aligned}$$

因此 $G(x)$ 为 g 的原函数. □

例 4.3.9. 求不定积分 $\int \cot x\, dx$.

解. 由

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \cot x,$$

即知

$$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C.$$

例 4.3.10. 求不定积分 $\int \mathrm{arccot} x\, dx$.

解. 根据上例和上面的命题, 有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arccot} x\, dx &= x\mathrm{arccot} x - \ln|\sin \mathrm{arccot} x| + C \\ &= x\mathrm{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

读者可用求导的方法直接验证结论的正确性. □

在下一节我们将介绍不定积分的更多计算方法.

习题 4.3

1. 求下列不定积分:

$$(1)\ \int (3x^2+1)dx;\qquad (2)\ \int (2+x^2)^3dx;\qquad (3)\ \int \big(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)dx;$$
$$(4)\ \int (2^x+3^x)^2dx;\qquad (5)\ \int \tan^2 x\,dx;\qquad (6)\ \int (e^x-e^{-x})^3dx;$$
$$(7)\ \int \frac{x^3+3x-2}{x}dx;\qquad (8)\ \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx;\qquad (9)\ \int \cos^2 x\,dx.$$

2. 求下列不定积分:

$$(1)\ \int \cos x\cos 2x\,dx;\quad (2)\ \int \sin(2x)dx;\qquad (3)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx;$$
$$(4)\ \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx;\qquad (5)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx;\quad (6)\ \int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$$

3. 求下列不定积分:

$$(1)\ \int e^{-|x|}dx,\quad (2)\int |x|dx,\quad (3)\int \max(1,x^2)dx,\quad (4)\int |\sin x|dx.$$

4. 证明, 如果 $F(t)$ 为 $f(t)$ 的原函数, 则 $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$ 是 $f(ax+b)$ 的原函数.

5. 求下列积分

$$(1)\ \int_0^1 (1-x^2)^2dx,\quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx,\quad (3)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx,\quad (4)\ \int_0^1 \arccos x\,dx.$$

6. 求下列积分

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2+x)}dx,\quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx,\quad (3)\ \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

7. 设 f 在 (a,b) 中可导, 且 $|f'(x)|\leqslant M$, $\forall\ x\in(a,b)$. 证明, 极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在且有限.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中的左导数存在且恒为零, 证明 f 为常值函数; 对于右导数有类似的结论.

9. 设 f 周期为 T, 则其原函数 F 以 T 为周期当且仅当 $F(T)=F(0)$.

10. 设 f 为奇函数, 则其原函数为偶函数; 设 f 为偶函数, 则其原函数 F 为奇函数当且仅当 $F(0)=0$.

§4.4 积分的计算

不定积分是微分的逆运算. 我们知道, 微分运算满足线性性, 导性和形式不变性, 对应到不定积分就有相应的积分方法. 我们在这一节中就详细介绍不定积分的各种计算方法, 实际上这是为了计算定积分而作的预备 (因为有 Newton-Leibniz 公式).

§4.4.1 换元积分法

命题 4.4.1 (换元积分法)**.** 设 $f(u)$ 是在区间 J 中有定义的函数, $u=\phi(x)$ 是区间 I 中的可微函数, 且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 中存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 中的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du + C = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设 ϕ 可逆, 且其逆可微, $\phi(I)=J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G, 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

证明. (1) 如果 $F'=f$, 则由复合求导, 有

$$[F(\phi)]' = f(\phi)\phi',$$

所以 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 的原函数.

(2) 当 ϕ^{-1} 可微时, 对 $\phi(\phi^{-1}(u))=u$ 求导, 得

$$[\phi^{-1}(u)]' = \frac{1}{\phi'(x)}, \quad x=\phi^{-1}(u).$$

因此

$$[G(\phi^{-1}(u))]' = G'(\phi^{-1}(u))[\phi^{-1}(u)]' = f(u)\phi'(\phi^{-1}(u))\frac{1}{\phi'(x)} = f(u),$$

所以 $G(\phi^{-1}(u))$ 是 $f(u)$ 的原函数. □

注. (1) 换元积分法又称变量替换法, 其要点是将变量 u 通过 $u=\phi(x)$ 换成 x (或反之).

(2) 在下一章中我们将知道, 如果 $\phi'(x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$, 则 ϕ 可逆, 因此逆函数 ϕ^{-1} 也可微.

(3) 由 Newton-Leibniz 公式, 如果 f 连续, ϕ 连续可微, 则相应地有关于连续函数定积分的换元公式.

例 4.4.1. 求不定积分 $\displaystyle\int \cot x\,dx$.

解. 令 $u=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx\\ &= \int \frac{d\sin x}{\sin x}\\ &= \int \frac{du}{u}\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.\end{aligned}$$

例 4.4.2. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解. 令 $u=\sqrt{x}$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx &= 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+x}\\ &= 2\int \frac{du}{1+u^2}\\ &= 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

例 4.4.3. 求积分 $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$.

解. 令 $u=x^2$, 则

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

例 4.4.4. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$.

解. 令 $u=e^{-x}$, 则 $du=-e^{-x}dx$, 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx\\ &= -\int \frac{du}{1+u}\\ &= -\ln(1+u)+C = -\ln(1+e^{-x})+C.\end{aligned}$$

例 4.4.5. 求不定积分 $\displaystyle\int \sec x\,dx$.

解. 令 $u=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}\\ &= \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+u}{1-u}\Big| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big| + C.\end{aligned}$$

例 4.4.6. 求积分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

解. 令 $x=a\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 则

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t(a\cos t)dt\\ &= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt\\ &= \frac{1}{2}a^2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

§4.4.2 分部积分法

命题 4.4.2 (分部积分法)**.** 设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 中可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

证明. 设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则由

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

得

$$\Big[u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\Big]' = u(x)v'(x).$$

这说明 $u(x)v(x) - \displaystyle\int u'(x)v(x)dx$ 是 $u(x)v'(x)$ 的原函数. □

注. (1) 分部积分法也可改写为

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(2) 如果 u, v 均连续可微, 则分部积分法条件满足. 特别地, 对于定积分有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

例 4.4.7. 求不定积分 $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$.

解. 取 $u(x) = \ln x$, $v(x) = \dfrac{1}{3}x^3$, 则

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln x\, dx &= \int \ln x\, d\Big(\frac{1}{3}x^3\Big) \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.
\end{aligned}$$

注意这个例子中 x 的幂次是升高的, 这是为了消去 $\ln x$.

例 4.4.8. 求不定积分 $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$.

解. 取 $u(x)=x^2$, $v(x)=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx=&\int x^2d(\sin x)\\&=x^2\sin x-\int \sin xd(x^2)\\&=x^2\sin x+2\int xd(\cos x)\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\int \cos x\,dx\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.\end{aligned}$$

注意这个例子中 x 的幂次是下降的, 目的是消去 x 的幂次.

例 4.4.9. 求不定积分 $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

解. 先用分部积分:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx&=x\sqrt{1+x^2}-\int x(\sqrt{1+x^2})'dx\\&=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\\&=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\&=x\sqrt{1+x^2}-\int \sqrt{1+x^2}\,dx+\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\end{aligned}$$

在等式右边也出现了欲求不定积分, 移项后得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx&=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1+x^2}+\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\Big]\\&=\frac{1}{2}\big[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\big]+C.\end{aligned}$$

我们再看一个类似的例子.

例 4.4.10. 设 $a\neq 0$, 求不定积分 $I=\int e^{ax}\cos bxdx$ 和 $J=\int e^{ax}\sin bxdx$.

解. 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned}I&=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int \cos bxd(e^{ax})\\&=\frac{1}{a}\Big[e^{ax}\cos bx+b\int e^{ax}\sin bxdx\Big]\\&=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}J.\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} J &= \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}\int \sin bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a}\Big[e^{ax}\sin bx - b\int e^{ax}\cos bx dx\Big] \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I. \end{aligned}$$

因此解出 I, J 为

$$I = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C_1, \quad J = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C_2.$$

例 4.4.11. 求积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\, dx$.

解. 记 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$, 则 $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$. 一般地, 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} - I_{n-2}. \end{aligned}$$

特别地, $I_2 = 1 - I_0 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$, $I_4 = \dfrac{1}{3} - I_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$. □

这个例子中用到了递推的方法, 我们再看一例.

例 4.4.12. 求不定积分 $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. 显然 $I_0 = x + C$, $I_1 = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$. 当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\Big[\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx - a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\Big] \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

这样就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

由此可以求出所有的 I_n. □

§4.4.3 有理函数的积分

有理函数是指形如
$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$
的函数, 其中 P,Q 均为关于变量 x 的多项式. 如果 P 的次数小于 Q, 则称 R 为真分式. 显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和. 因此, 有理函数的积分就只要考虑真分式的情形就可以了. 根据实系数多项式的因式分解可以证明, 真分式可以进一步分解为下面两种简单真分式之和:
$$\frac{A}{(x-a)^k},\ k\geqslant 1;\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k\geqslant 1,\ p^2-4q<0.$$
它们的不定积分可以计算如下:

(1) $k=1$:
$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$$
(2) $k>1$:
$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C;$$
(3) $k=1$:
$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}&=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx\\&=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}\\&=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}\\&=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C;\end{aligned}$$
(4) $k>1$ 时, 和 (3) 类似, 有
$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$
其中 $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$. 上式右端的不定积分我们在前一小节中已经用递推的办法算过.

总之, 有理函数的不定积分可以用初等函数表示. 在具体的分解计算过程中我们通常可以用待定系数法, 我们来举例说明.

例 4.4.13. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^2-2x+3}dx$.

解. 先对被积函数作分解:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{x^2-2x+3} &= \frac{x(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3}+\frac{2x^2-3x+1}{x^2-2x+3}\\ &= x+\frac{2(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3}+\frac{x-5}{x^2-2x+3}\\ &= x+2+\frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2},\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}dx = 2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)-2\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

例 4.4.14. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^3+1}dx$.

解. 我们用待定系数法作分解:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

上式两边消去分母, 得

$$1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1),$$

比较等式两边 x 的幂次, 得

$$A+B=0,\quad -A+B+C=0,\quad A+C=1,$$

解出 $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{-1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, 因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+C.\end{aligned}$$

例 4.4.15. 求不定积分 $\int \frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2}dx$.

解. 用待定系数法作分解:

$$\frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{5x+6}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2},$$

上式两边消去分母得

$$5x+6=A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2,$$

我们可以通过比较等式两边 x 的幂次解出 A, B, C, 不过, 取 x 的特殊值代入等式也可以: 令 $x=-1$ 得 $B=1$; 令 $x=-2$ 得 $C=-4$; 再令 $x=0$ 得 $A=4$. 因此

$$\frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{4}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+2},$$

欲求不定积分为

$$\int\frac{5x+6}{x^3+4x^2+5x+2}dx=4\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-4\ln|x+2|+C.$$

例 4.4.16. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^4+1}dx$.

解. 因为 $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, 因此

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

同前面的例子一样, 不难算出

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad D=\frac{1}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}dx&=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)\\&\quad+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.\end{aligned}$$

§4.4.4 有理三角函数的积分

有理函数是两个多项式的商, 它们可以由变量 x 和常数经过有限次四则运算得到. 如果我们对三角函数和常数做有限次的四则运算, 则得到的函数称为有理三角函数. 因为 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ 和 $\csc x$ 可以看成由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 生成的有理三角函数, 故一般的有理三角函数可记为 $R(\sin x,\cos x)$.

对有理三角函数的积分有一个通用的处理方法, 称为**万能变换**: 令

$$t=\tan\frac{x}{2},$$

则

$$x=2\arctan t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

且有

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{1+t^2},$$

以及

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

这说明有理三角函数的积分可以通过万能变换化为有理函数的积分, 因此是可以计算出来的. 在实际计算过程中, 有时也可以视情形采用变换 $t = \sin x$, $t = \cos x$ 或 $t = \tan x$ 等, 以下举例说明.

例 4.4.17. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

解. 令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$, 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} &= \int \frac{2dt}{2t + 2(1-t^2) + 3(1+t^2)} \\
&= 2\int \frac{dt}{t^2+2t+5} \\
&= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+4} \\
&= \arctan\frac{t+1}{2} + C = \arctan\big(\frac{1}{2}(1+\tan\frac{x}{2})\big) + C.
\end{aligned}$$

例 4.4.18. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx\ (0 < r < 1)$.

解. 令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$, 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx &= 2\int \frac{1-r^2}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(1-t^2)}dt \\
&= 2(1-r^2)\int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2t^2} \\
&= 2\arctan\big(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\big) + C.
\end{aligned}$$

例 4.4.19. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$.

解. 令 $t = \cos x$, 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx &= -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}d(\cos x) \\
&= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}dt \\
&= -\int \big(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t\big)dt \\
&= \frac{1}{2t^2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}t^2 + C \\
&= \frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\arccos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.
\end{aligned}$$

例 4.4.20. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.

解. 令 $t=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x} &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x\cos^2 x}\\ &= \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}\\ &= \int \Big(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\Big)dt\\ &= -\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+t}{1-t}\Big|+C\\ &= -\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.\end{aligned}$$

例 4.4.21. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(a,b>0)$.

解. 令 $t=\tan x$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x d(\tan x)}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\\ &= \int \frac{d(\tan x)}{a^2\tan^2 x+b^2}\\ &= \frac{1}{ab}\arctan\big(\frac{a}{b}\tan x\big)+C.\end{aligned}$$

§4.4.5 某些无理积分

以下讨论几种可以转化为有理积分的某些无理函数的不定积分. 我们用记号 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示关于 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的有理函数.

(**1**) 形如 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的无理函数的积分, 其中 $ad-bc\neq 0$, 而 n, $\cdots$, m 是大于 1 的整数. 设 k 为这些整数的最小公倍数, 令

$$t=\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)^{\frac{1}{k}},$$

则

$$x=\frac{dt^k-b}{a-ct^k},\quad dx=\frac{ad-bc}{(a-ct^k)^2}kt^{k-1}dt,$$

从而 R 的积分可以转化为关于 t 的有理积分.

例 4.4.22. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx$.

解. 令 $2x+3=t^3$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx &= \int \frac{3t^2}{t^3+2t^2-3}dt \\ &= \int \frac{3t^2}{(t-1)(t^2+3t+3)}dt \\ &= \frac{3}{7}\int \big(\frac{1}{t-1}+\frac{6t+3}{t^2+3t+3}\big)dt \\ &= \frac{3}{7}\ln|t-1|+\frac{9}{7}\ln(t^2+3t+3)-\frac{12\sqrt{3}}{7}\arctan\frac{2t+3}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

将 $t=\sqrt[3]{2x+3}$ 代入上式就得到欲求不定积分. □

例 4.4.23. 求不定积分 $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1-x}$.

解. 令 $\frac{1-x}{1+x}=t^3$, 则

$$x=\frac{1-t^3}{1+t^3},\quad dx=\frac{-6t^2dt}{(1+t^3)^2},$$

因此

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1-x} &= \int t\frac{1+t^3}{2t^3}\frac{-6t^2dt}{(1+t^3)^2} \\ &= -3\int \frac{dt}{1+t^3} \\ &= -\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\big(t-\frac{1}{2}\big)+C.\end{aligned}$$

将 $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ 代入上式就得到欲求不定积分. □

(**2**) 形如 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 的函数积分, 其中 $R(x,y)$ 为关于 x,y 的有理函数, $a>0$ 时 $b^2-4ac\neq 0$, 或 $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$. 由于

$$ax^2+bx+c=a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big],$$

故当 $a>0$ 时, 令

$$u=x+\frac{b}{2a},\quad k^2=\Big|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big|,$$

原积分化为如下形式的积分:

$$\int R(u,\sqrt{u^2-k^2}),\quad 或 \int R(u,\sqrt{u^2+k^2}),$$

分别进一步令 $u=k\sec t$, $u=k\tan t$ 就把不定积分变成了有理三角函数的积分, 从而可以计算出来.

当 $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 时, 令

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

则原积分化为如下形式积分:

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - k^2}), \quad 或 \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}),$$

分别进一步令 $u = k\sec t$, $u = k\sin t$ 就把不定积分变成了有理三角函数的积分, 从而可以计算出来.

还有一些别的办法来计算这些积分. 例如, 如果 $a > 0$, 令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,x + t \quad (或 t - \sqrt{a}\,x),$$

则 x 为 t 的有理函数:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t},$$

从而可以把原积分化为关于 t 的有理积分; 如果 $c > 0$, 令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \quad (或 tx - \sqrt{c}),$$

则 x 为 t 的有理函数:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2},$$

从而可以把原积分化为关于 t 的有理积分; 如果 $b^2 - 4ac > 0$, 则 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实根:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha),$$

则 x 为 t 的有理函数:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2},$$

从而也可以把原积分化为关于 t 的有理积分; 这里用到的变量替换统称为**Euler 替换**, 在实际的计算过程中当然也可灵活选择其它的变量替换方法.

例 4.4.24. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

解. 因为 $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$, 我们令 $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = (x-1)t$, 则

$$x = \frac{t^2 + 4}{t^2 - 1}, \; dx = \frac{-10tdt}{(t^2 - 1)^2},$$

原积分化为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int \frac{t^2-1}{t^2+4}\frac{t^2-1}{5t}\frac{-10tdt}{(t^2-1)^2}\\ &= -2\int \frac{dt}{t^2+4}\\ &= -\arctan\frac{t}{2}+C\\ &= -\arctan\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{2(x-1)}+C.\end{aligned}$$

例 4.4.25. 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$.

解. 令 $x=\sin t$ $(|t|<\frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{dt}{1+\sin^2 t}\\ &= \int \frac{\csc^2 t}{1+\csc^2 t}dt\\ &= -\int \frac{d(\cot t)}{2+\cot^2 t}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\cot t}{\sqrt{2}}+C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}+C.\end{aligned}$$

值得指出的是, 并非所有的不定积分都可以用初等函数表示, 例如下面函数的不定积分都不能用初等函数表示:

$$e^{\pm x^2},\ \sin(x^2),\ \cos(x^2),\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \sqrt{1-k^2\sin^2 x},\ \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\ (0<k<1).$$

习题 4.4

1. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll}(1)\ \int \frac{dx}{1+\cos x}; & (2)\ \int \cos mx\cos nxdx; & (3)\ \int \sin mx\cos nxdx;\\ (3)\ \int \frac{dx}{\cos^4 x}; & (5)\ \int \frac{dx}{1+\sin x}; & (6)\ \int \sin mx\sin nxdx;\\ (7)\ \int \cot 2xdx; & (8)\ \int \sinh x\sinh 2xdx; & (9)\ \int \sinh^{-2} x\cosh^{-2} xdx.\end{array}$$

2. 求下列不定积分:

(1) $\int xe^{-x^2}dx$; (2) $\int \frac{xdx}{4+x^2}$; (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$;

(4) $\int(1+e^x)^{-1}dx$; (5) $\int(\sin x)^{-1}dx$; (6) $\int(e^x+e^{-x})^{-1}dx$;

(7) $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; (8) $\int(2^x+3^x)^2dx$; (9) $\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}dx$;

(10) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; (11) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; (12) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$;

(13) $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$; (14) $\int \sin^3 x\cos xdx$; (15) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$;

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$; (17) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$; (18) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(19) $\int \sin^2 2x\,dx$; (20) $\int(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dx$; (21) $\int(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$;

(22) $\int(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}dx$; (23) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx$; (24) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$;

(25) $\int x^5(1+x)^{-1}dx$; (26) $\int(ax^2+b)^{-1}dx$; (27) $\int(x-a)^{-2}(x+b)^{-2}dx$;

(28) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; (29) $\int \sin x\sin 3xdx$; (30) $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \ln^2 x\,dx$; (2) $\int x^2e^{-3x}dx$; (3) $\int \cos(\ln x)dx$;

(4) $\int x\sin^{-2}xdx$; (5) $\int x^2\sin 2xdx$; (6) $\int \arcsin x(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$;

(7) $\int \csc^3 xdx$; (8) $\int \sqrt{x(1-x^3)}dx$; (9) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

(10) $\int x^2\arccos xdx$; (11) $\int x^2\arctan xdx$; (12) $\int x^5e^{x^2}dx$;

(13) $\int x^3e^{-x^2}dx$; (14) $\int \sin(\ln x)dx$; (15) $\int e^{2x}\sin^2 xdx$;

(16) $\int xe^x\sin xdx$; (17) $\int x^2(\ln x)^2dx$; (18) $\int x^7(1-x^4)^{-2}dx$;

(19) $\int(\arcsin x)^2dx$; (20) $\int e^{-x}\sin 6xdx$; (21) $\int x^2(1+x^2)^{-2}dx$;

(22) $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$; (23) $\int x\sin\sqrt{x}dx$; (24) $\int \sin x\ln(\tan x)dx$;

(25) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; (26) $\int \arctan\sqrt{x}dx$; (27) $\int \sin^{-2}x\ln(\sin x)dx$;

(28) $\int x^{-2}\arcsin xdx$; (29) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; (30) $\int x^2(x^2-2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

4. 求下列不定积分的递推公式 (m, n 为非负整数):

(1) $\int \sin^n x dx$; (2) $\int \cos^n x dx$; (3) $\int \sin^{-n} x dx$;

(4) $\int \cos^{-n} x dx$; (5) $\int (\arcsin x)^n dx$; (6) $\int (\ln x)^n dx$;

(7) $\int x^n e^x dx$; (8) $\int \sin^m x \cos^n x dx$; (9) $\int x^n (1+x)^{-1} dx$.

5. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}$; (2) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}$; (3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

(4) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}$; (5) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; (6) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-3x+2}$;

(7) $\int \frac{(x+4)dx}{x^3+2x-3}$; (8) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}$; (9) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

(10) $\int \frac{dx}{1+x^4}$; (11) $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$; (12) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$;

(13) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; (14) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; (15) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x(x^2+1)^2}$;

(16) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; (17) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$; (18) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

6. 设 $P_n(x)$ 是次数为 n 的多项式, 求不定积分

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

7. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1+4\cos^2 x}dx$; (2) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$; (3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

(4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x+\cos x}dx$; (5) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$; (6) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$;

(7) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$; (8) $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$; (9) $\int \frac{dx}{(3+\cos x)\sin x}$;

(10) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$; (11) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}$; (12) $\int \tan x(\tan x+a)dx$.

8. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$; (2) $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$; (3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}}$;

(4) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$; (5) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; (6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$;

(7) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$; (8) $\int \frac{x^3dx}{1+x^2}$; (9) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

9. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin^{-\frac{3}{2}} x \cos^{-\frac{5}{2}} x\, dx$; (2) $\int \sin^{-\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x\, dx$; (3) $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$;

(4) $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$; (5) $\int \dfrac{dx}{\sin x - \sin \alpha}$; (6) $\int \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$.

10. $(*)$ 求不定积分的递推公式 $(a \neq 0)$:

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

11. $(*)$ 设 $a, b > 0$, 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}.$$

§4.5 简单的微分方程

本节内容可以作为选读材料. 我们已经看到, 求 f 的原函数相当于解以 F 为未知变量的方程 $F' = f$. 为了方便起见, 我们用 $\dfrac{d}{dx}$ 表示求导运算, 即

$$\frac{d}{dx} F = F',$$

类似地, 用 $\dfrac{d^2}{dx^2}$ 表示二次求导运算, 而 $\dfrac{d^n}{dx^n}$ 表示 n 次求导运算. 我们记

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k},$$

约定 $\frac{d^0}{dx^0} = 1$. P 作用在 n 阶可导的函数 φ 上定义为

$$P\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \varphi^{(k)}(x).$$

我们将如上定义的运算 P 称为一个 n 阶微分算子, 关于未知变量 φ 的方程 $P\varphi = f$ 的方程称为 n 阶微分方程. 微分方程的求解将在后续的专门课程中学习, 我们在此仅举几个简单的例子.

例 4.5.1. 设 $n \geqslant 0$, 证明 $\varphi^{(n+1)} = 0$ 当且仅当 φ 为次数不超过 n 的多项式.

证明. 我们对 n 归纳. $n = 0$ 的情形我们已经证明过. 设 $n = k-1$ 时结论成立, 则 $n = k$ 时, 由

$$(\varphi')^{(k)} = \varphi^{(k+1)} = 0$$

知 $\varphi' = p_{k-1}$ 是次数不超过 $k-1$ 的多项式, 从而

$$\varphi = \int p_{k-1}(x) dx$$

是次数不超过 k 的多项式. □

例 4.5.2. 设 λ 为常数, 求解一次微分方程 $\varphi' = \lambda\varphi$.

解. 设 $\varphi' = \lambda\varphi$, 则

$$(\varphi e^{-\lambda x})' = \varphi' e^{-\lambda x} + \varphi(-\lambda)e^{-\lambda x} = 0,$$

因此 $\varphi e^{-\lambda x} = C$ 为常数, 方程的解为

$$\varphi = Ce^{\lambda x}.$$

如果 $\lambda = 1$, 则在初始条件 $\varphi(0) = 1$ 下 $\varphi' = \varphi$ 的惟一解为指数函数 e^x, 因此我们也可以用这个一次微分方程来定义指数函数. □

上例的做法可推广如下.

例 4.5.3. 设 g, h 为已知连续函数, 求解一次微分方程 $\varphi' = g\varphi + h$.

解. 同上例一样, 有

$$\begin{aligned}\left(\varphi e^{-\int g(x)dx}\right)' &= \varphi' e^{-\int g(x)dx} + (-g)\varphi e^{-\int g(x)dx}\\ &= he^{-\int g(x)dx}.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi e^{-\int g(x)dx} = \int h(x)\cdot e^{-\int g(x)dx}\,dx + C,$$

方程的解为

$$\varphi = e^{\int g(x)dx}\cdot\int h(x)\cdot e^{-\int g(x)dx}\,dx + Ce^{\int g(x)dx}.$$

在介绍下一个例子之前, 我们注意到这样的事实: 如果 φ, ψ 同时满足方程

$$\varphi'' = c\varphi, \quad \psi'' = c\psi,$$

则

$$(\varphi'\psi - \varphi\psi')' = \varphi''\psi - \varphi\psi'' = c(\varphi\psi - \varphi\psi) = 0,$$

因此 $\varphi'\psi - \varphi\psi' = C$ 为常数.

例 4.5.4. 设 $\lambda \neq 0$ 为常数, 求解二次微分方程 $\varphi'' = \lambda^2\varphi$.

解. 显然, 函数 $e^{-\lambda x}$ 和 $e^{\lambda x}$ 都是方程的解. 因此, 如果 φ 满足方程, 则根据以上观察, 存在常数 C_1', C_2', 使得

$$\varphi' e^{\lambda x} - \lambda\varphi e^{\lambda x} = C_1', \quad \varphi' e^{-\lambda x} + \lambda\varphi e^{-\lambda x} = C_2'.$$

从而

$$\varphi = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

这就得到了方程的所有解 (通解). □

例 4.5.5. 设 $\lambda \neq 0$ 为常数, 求解二次微分方程 $\varphi'' = -\lambda^2\varphi$.

解. 同上例类似, 首先我们看到函数 $\cos\lambda x$ 和 $\sin\lambda x$ 都是方程的解, 因此, 如果 φ 满足方程, 则根据以上观察, 存在常数 C_1', C_2', 使得

$$\varphi'\sin\lambda x - \lambda\varphi\cos\lambda x = C_1', \quad \varphi'\cos\lambda x + \lambda\varphi\sin\lambda x = C_2'.$$

从而

$$\varphi = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x.$$

这就得到了方程的所有解 (通解). □

例 4.5.6. (∗) 三角函数与圆周率.

从微分方程出发, 我们可以给出正弦 (余弦) 函数以及圆周率的正式定义, 这可使我们避免借助几何直观计算基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

考虑二次微分方程

$$f''(x) = -f(x), \quad f(0) = 0, \ f'(0) = 1. \tag{4.3}$$

如果方程有解, 则显然 f 是光滑的, 且 $g(x) = f'(x)$ 满足以下方程

$$g''(x) = -g(x), \quad g(0) = 1, \ g'(0) = 0. \tag{4.4}$$

(1) 解的惟一性. 如果 f_1, f_2 均为 (4.3) 的解, 令 $h = f_1 - f_2$, 则

$$h''(x) = -h(x), \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

于是

$$\big[h^2(x) + h'^2(x)\big]' = 2(hh' + h'h'') = 2(hh' - h'h) = 0,$$

因此 $h^2 + h'^2$ 为常数, 从而恒为零. 即 $f_1 = f_2$.

同理, 方程 (4.4) 的解也惟一. 如果 f 为 (4.3) 的解, 则同理可得 $f^2 + g^2 \equiv 1$, 特别地, f, g 为有界函数.

(2) 解的存在性. 假定 f 为 (4.3) 的一个解, 我们先看看它应具有什么形式. 由 Newton-Leibniz 公式以及 $f' = g$, $g' = -f$ 可得

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x g(t)dt = \int_0^x \Big(1 - \int_0^t f(s)ds\Big)dt \\
&= x - \int_0^x\int_0^t f(s)dsdt \\
&= x - \int_0^x\int_0^t \Big(s - \int_0^s\int_0^v f(u)dudv\Big)dsdt \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \int_0^x\int_0^t\int_0^s\int_0^v f(u)dudvdsdt,
\end{aligned}$$

这个过程可以继续. 这启发我们定义

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}.$$

可以说明 (参见本节习题或第九章) f 二阶可导, 且 f 满足方程 (4.3).

(3) $g = f'$ 必有正零点.(反证法) 不然的话, 由 $f'(0) = 1$ 以及连续函数的介值定理知在右半实轴上 $f' > 0$. 当 $x > y \geqslant 0$ 时,

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)dt > 0,$$

因此 f 在 $[0, +\infty)$ 中单调递增. 又因为 f 有界, 从而极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 为有限正数. 于是, 存在 $x_0 > 0$, 当 $x \geqslant x_0$ 时 $f(x) \geqslant A/2$. 此时

$$g(x) = g(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant g(x_0) - \frac{A}{2}(x - x_0), \quad \forall\ x \geqslant x_0.$$

这与 g 有界相矛盾.

(4) 记 $g = f'$ 的最小正零点为 $\pi/2$, 则 f 在 $[0, \pi/2]$ 中 (严格) 单调递增. 由 $f^2 + g^2 = 1$ 知 $f(\pi/2) = 1$. 这说明, 函数 $f(\pi/2 - x)$ 也满足方程 (4.4). 根据解的惟一性, 我们就得到等式

$$f(\pi/2 - x) = g(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

由 f 为奇函数, $g = f'$ 为偶函数得

$$f(\pi - x) = f(\pi/2 - (x - \pi/2)) = g(x - \pi/2) = g(\pi/2 - x) = f(x),$$

因此 f 在 $[\pi/2, \pi]$ 中 (严格) 单调递减, π 是 f 的最小正根. 进而有

$$f(\pi + x) = f(-x) = -f(x), \quad f(2\pi + x) = -f(\pi + x) = f(x),$$

因此 f 为周期函数, 2π 是其最小正周期.

最后, 我们规定 $\sin x = f(x)$, $\cos x = g(x)$, 圆周率 π 规定为 $\sin x$ 的最小正根. 这样, 其它的三角函数自然也就有了定义. □

例 4.5.7. *设 b, c 为常数, 求解二次微分方程 $\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$.*

解. 我们想办法将这个二次微分方程转化为刚才已经解过的情形. 事实上, 设 φ 满足方程, 则

$$\begin{aligned}\big(\varphi e^{\frac{b}{2}x}\big)'' &= \varphi'' e^{\frac{b}{2}x} + b\varphi' e^{\frac{b}{2}x} + \frac{b^2}{4}\varphi e^{\frac{b}{2}x}\\ &= \big(\frac{b^2}{4} - c\big)\big(\varphi e^{\frac{b}{2}x}\big).\end{aligned}$$

因此, 根据前面的例子, 我们有

(1) 当 $\frac{b^2}{4}-c=0$ 时, 方程的解为

$$\varphi(x)=e^{-\frac{b}{2}x}(C_1x+C_2);$$

(2) 当 $\frac{b^2}{4}-c<0$ 时, 方程的解为

$$\varphi(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\Big(C_1\cos\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\,x+C_2\sin\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\,x\Big);$$

(3) 当 $\frac{b^2}{4}-c>0$ 时, 方程的解为

$$\varphi(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\big(C_1e^{-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\,x}+C_2e^{\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\,x}\big).$$

例 4.5.8. 设 $\lambda\neq 0$ 为常数, g 已知, 求解二次微分方程 $\varphi''=\lambda^2\varphi+g$.

解. 我们来找一个形如下面的特殊解 f_0:

$$f_0(x)=C_1(x)e^{-\lambda x}+C_2(x)e^{\lambda x},$$

为了简单起见, 设

$$C_1'(x)e^{-\lambda x}+C_2'(x)e^{\lambda x}=0. \tag{4.5}$$

此时 $f_0'(x)=-\lambda C_1(x)e^{-\lambda x}+\lambda C_2(x)e^{\lambda x}$, 因此

$$f_0''(x)=-\lambda C_1'(x)e^{-\lambda x}+\lambda C_2'(x)e^{\lambda x}+\lambda^2f_0(x),$$

我们得到

$$-\lambda C_1'(x)e^{-\lambda x}+\lambda C_2'(x)e^{\lambda x}=g(x), \tag{4.6}$$

从 (4.5) 和 (4.6) 中解出 $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x)=-\frac{1}{2\lambda}\int e^{\lambda x}g(x)dx,\quad C_2(x)=\frac{1}{2\lambda}\int e^{-\lambda x}g(x)dx.$$

这就得到了方程的一个特解

$$f_0(x)=-\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}g(x)dx+\frac{1}{2\lambda}e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}g(x)dx.$$

如果 $f(x)$ 是另一解, 则 $f-f_0$ 满足方程 $\varphi''=\lambda^2\varphi$, 它的解我们已经求出. □

这个例子中所用的求解特解的办法叫做**常数变易法**.

例 4.5.9. 设 $\lambda\neq 0$ 为常数, g 已知, 求解二次微分方程 $\varphi''=-\lambda^2\varphi+g$.

解. 同上例一样, 用常数变易法可易求出方程的一个特解为

$$f_0(x)=-\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x\int g(x)\sin\lambda xdx+\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\int g(x)\cos\lambda xdx.$$

然后再由前面例子的结论就可求出所有的解. □

习题 4.5

1. 设 b, c 为常数, g 已知, 解二阶微分方程 $\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = g$.

2. 设 λ 为常数, 求满足方程 $f' = \lambda(1 + f^2)$ 的所有可微函数.

3. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且满足条件

$$f'\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \forall\ x \neq y.$$

证明 f 必为多项式, 其次数不超过二.

4. 定义

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}, \quad g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!}.$$

证明

(1) 当 $m > n$ 时

$$|f_m(x) - f_n(x)| + |g_m(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

于是 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 均为 Cauchy 列, 从而极限存在. 极限分别记为 f, g. 令 $m \to \infty$ 可得

$$|f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

(2) $|f_n(x)| + |g_n(x)| \leqslant e^{|x|}$. 于是

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \Big| \int_y^x g_n(t)dt \Big| \leqslant e^{|x|+|y|} |x - y|,$$

令 $n \to \infty$ 可知 f 连续. 同理可得 g 也连续. 利用

$$f_n(x) - \int_0^x g(t)dt = \int_0^x [g_n(t) - g(t)]dt$$

证明

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

同理证明

$$g(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt.$$

5. 验证例 4.5.6 中定义的三角函数满足恒等式

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

6. 按照下列步骤从头开始定义指数函数 e^x:

(1) 考虑一次微分方程

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1. \tag{4.7}$$

证明此方程解的惟一性.

(2) 如果 f 为 (4.7) 的解, 则

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^t f(s)dsdt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots .$$

(3) 验证函数

$$f(x) = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

有意义, 且为 (4.7) 的解.

(4) 验证恒等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$.

(5) 说明 $f(x)$ 为严格单调递增的恒正函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(6) 当 $x \geqslant 0$ 时, 证明

$$f(x) \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

7. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中可导, 且

$$2f(x) = f(x^2), \quad \forall\, x > 0.$$

证明 $f(x) = c\ln x$.

8. 设 p, q 为连续函数, f 在 $[a, b]$ 上满足方程 $f'' + pf' + qf = 0$. 如果 $q \leqslant 0$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 则 f 恒为零.

第五章　微分中值定理和 Taylor 展开

本章继续利用微分学来研究一元函数, 主要的工具是微分中值定理. 一开始我们将探讨函数的极值, 它为进一步的研究提供了动机.

§5.1　函数的极值

要研究一个变化量, 可以考察其 "最大" 值和 "最小" 值, 我们已经在数列极限和函数连续性的研究中用过这个方法了.

定义 5.1.1 (极值点). *设 f 是定义在区间 I 中的函数, $x_0 \in I$. 如果存在 $\delta > 0$, 使得*

$$f(x) \geqslant f(x_0)(f(x) \leqslant f(x_0)), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

*则称 x_0 为 f 在 I 中的一个***极小 (大) 值点***, $f(x_0)$ 称为***极小 (大) 值***.*

如果 $x_0 \in I$, 且

$$f(x) \geqslant f(x_0)(f(x) \leqslant f(x_0)), \quad \forall\, x \in I,$$

*则称 x_0 为 f 在 I 中的一个***最小 (大) 值点***, $f(x_0)$ 称为***最小 (大) 值***.*

显然, 最小 (大) 值点是极小 (大) 值点. 我们把极小值点和极大值点统称为极值点, 极小值和极大值统称为极值, 最大值和最小值统称最值. 当定义中的不等号在 x_0 的空心邻域中严格成立时, 相应的极值点称为严格极值点, 相应的极值称为严格极值.

定理 5.1.1 (Fermat). *设 x_0 是函数 f 在 I 中的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 如果 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.*

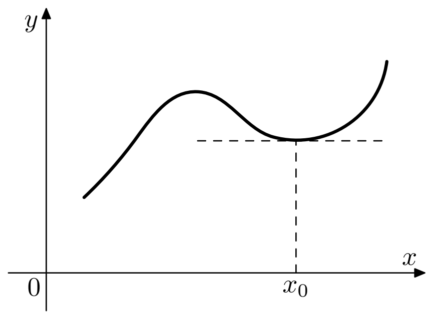


图 5.1　函数的极值点

证明. 不妨设 x_0 为 f 的极小值点 (不然可考虑 $-f$). 由于 x_0 为 I 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$. 当 x_0 为 f 的极小值点时, 我们假设 δ 充分小, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

特别地, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

这说明 $f'(x_0)=0$. □

注. (1) 如果 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导 (存在左导数或右导数), 导数也不必为零. 如定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x$ 就是例子. 如果 x_0 为 f 在 I 中的极值点, 但不是 I 的内点, 则根据定理的证明可以得到下面的结论:

设 x_0 是 I 的左端点, 如果 x_0 为 f 的极小 (大) 值点, 则 $f'_+(x_0)\geqslant 0(\leqslant 0)$; 设 x_0 是 I 的右端点, 如果 x_0 为 f 的极小 (大) 值点, 则 $f'_-(x_0)\leqslant 0(\geqslant 0)$;

(2) 函数可能在不可导点处取极值, 例如 $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$ 在 $x_0=0$ 处取到最小值, 但 f 在 $x_0=0$ 处不可导, 当然就谈不上导数为零了.

(3) 我们把满足条件 $f'(x_0)=0$ 的点称为 f 的**驻点**或**临界点**. 需要注意的是, 驻点不必为极值点, 例如 $f(x)=x^3$, $x_0=0$ 为 f 的驻点, 但不是极值点.

定理 5.1.2 (Darboux)**.** (∗) *设 f 为 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.*

证明. 设 k 是介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的数. 考虑函数 $g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)\cdot g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数; 如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a)>0$, $g'_-(b)<0$, 则 g 在 a 或 b 处均取不到最大值, 从而 g 在 $[a,b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值. 由 Fermat 定理, $g'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=k$. □

注. 这个定理说明, 如果 f 是区间 I 中的可导函数, 则其导函数 f' 的值域仍为区间. 特别地, Dirichlet 函数没有任何原函数.

例 5.1.1. *求函数 $f(x)=x^3-x+1$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值和最大值.*

解. 因为 $f(x)=x^3-x+1$ 为连续函数, 故它在 $[-1,1]$ 上可以取到最小值和最大值. 我们首先来求驻点: 方程

$$f'(x)=3x^2-1=0$$

的解为 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$. 因此 f 的可能极值点为 $-1,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1$. 在这些点处计算 f 的值如下:

$$f(-1)=1,\ f(-\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{2}{3\sqrt{3}},\ f(\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{2}{3\sqrt{3}},\ f(1)=1.$$

这说明 f 的最大值为 $1+\frac{2}{3\sqrt{3}}$, 最小值为 $1-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. □

在上面的例子中, 驻点正好也是最值点. 下面的例子正好相反.

例 5.1.2. 求函数 $f(x)=x^3-x^2+1$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值和最大值.

解. 先求驻点: $f'(x)=3x^2-2x=0$ 的解为 $x=0,\frac{2}{3}$. 因此 f 的可能极值点为 $-1,0,\frac{2}{3},2$, 在这些点处计算 f 的值如下:

$$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(\frac{2}{3})=\frac{23}{27},\ f(2)=5.$$

这说明 f 的最小值为 -1, 最大值为 5.

利用下一节的知识可以说明, 这个例子中的两个驻点中一个是极大值点, 另一个是极小值点. □

以下我们给出在一般区间上定义的连续函数最值的一种判别方法.

命题 5.1.3. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

证明. 我们不妨设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 由极限的定义, 存在 $M>0$ 使得当 $|x|\geqslant M$ 时 $f(x)>f(0)$. 因为 f 为连续函数, 故在闭区间 $[-M,M]$ 上取到最小值. 设 f 在 x_0 处取到此最小值, 则 $f(x_0)\leqslant f(0)$ (因为 $0\in[-M,M]$). 另一方面,

$$f(x_0)\leqslant f(0)<f(x),\quad \forall\, x\in(-\infty,M)\cup(M,+\infty),$$

这说明 x_0 也是 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值点. □

显然, 上述命题可以推广到其它非闭区间的情形, 以 $(a,+\infty)$ 为例, 我们有如下结论: 如果连续函数 f 满足

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(-\infty)$$

则 f 在 $(a,+\infty)$ 上达到最小 (大) 值.

例 5.1.3. 设 a_i, $i=1,2,\cdots,n$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 个点. 在 $\mathbb{R}$ 上求一点, 使得它到 a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的距离的平方和最小.

解. 设 $x\in\mathbb{R}$, 考虑连续函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

我们的问题就是求 f 的最小值点. 容易看出, 当 $|x|\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 因此由上面的命题, f 的最小值点的确存在. 又因为 f 可微, 故最小值点必为驻点. 方程

$$f'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=0$$

的惟一解为

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

因此它就是我们要求的点. □

例 5.1.4. 设 $p > 1$, 研究函数 $f(x) = x - \dfrac{x^p}{p}$, $x \in [0, +\infty)$ 的极值.

解. 显然, $f(0) = 0$, 且 $x \to +\infty$ 时, $f(x) \to -\infty$. 因此 $f(x)$ 的最大值存在, 最小值不存在. 因为

$$f'(x) = 1 - x^{p-1} = 0$$

只有一个解 $x = 1$, 且 $0 = f(0) < f(1) = 1 - 1/p$, 故 $x = 1$ 就是最大值点, 从而有

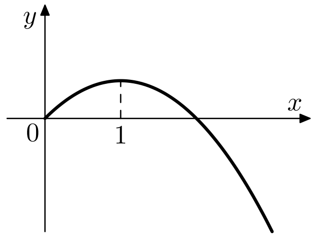


图 5.2 极值点与不等式

$$f(x) \leqslant f(1) = 1 - \frac{1}{p}, \quad \forall\, x \geqslant 0.$$

如果记 $q = \dfrac{p}{p-1}$, 则上式可以改写为

$$x \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}, \quad \forall\, x \geqslant 0.$$

设 $a, b > 0$, 以 $x = ab^{-\frac{1}{p-1}}$ 代入上式, 整理后得到

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

这也就是 Young 不等式, 等号成立当且仅当 $a^p = b^q$. □

例 5.1.5. 光线的折射和反射原理.

设在 x 轴两侧有两种不同的介质 M_1 和 M_2, 光在介质 M_1 和 M_2 中的传播速度分别为 v_1 和 v_2. 设光从介质 M_1 中的 $A = (0, a)$ 点经过 x 轴到达介质 M_2 中的 $C = (b, -c)$ 点, 这里 $a, b, c > 0$. 我们要找出光线与 x 轴的交点. 因为光线服从 "最小原理", 即光线从 A 经过 x 轴到达 C 所经过的路径应该是所有可能的路径中花费时间最少的那一条, 因此我们将问题转化为求时间函数的极值. 从 $A = (0, a)$ 到 $(x, 0)$ 再到 $C = (b, -c)$ 光线所需要的时间为

$$f(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{c^2 + (b - x)^2}.$$

显然, 当 $|x| \to +\infty$ 时 $f(x) \to +\infty$, 因此 f 的最小值存在. 对 f 求导, 得

$$f'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{b - x}{\sqrt{c^2 + (b - x)^2}},$$

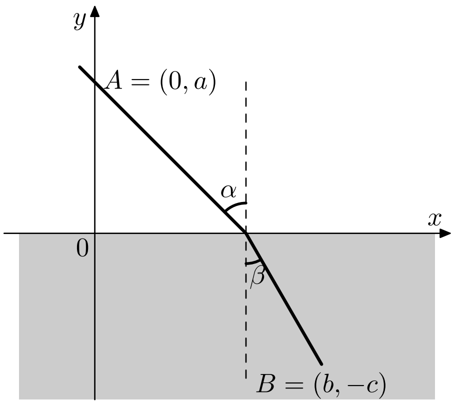


图 5.3 光线的折射

显然, 当 $x \leqslant 0$ 时 $f'(x)<0$; 当 $x \geqslant b$ 时 $f'(x)>0$. 当 $x \in (0,b)$ 时, $f'(x)$ 可写为

$$f'(x)=\frac{1}{v_1}\Big(\frac{x^2}{a^2+x^2}\Big)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v_2}\Big(\frac{(b-x)^2}{c^2+(b-x)^2}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

由此不难看出当 $f'(x)$ 在 $(0,b)$ 中严格单调递增. 总之, 根据介值定理可知 $f(x)$ 的驻点存在且惟一, 它就是 f 的最小值点, 即光线经过 x 轴的点, 满足条件

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\frac{b-x}{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}.$$

通常用入射角 α 和折射角 β 将上式改写为

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2},\quad 或\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

这就是光学中著名的折射定律.

类似地, 如果光线在同一介质中经过 x 轴反射, 则经过的路径遵从反射定律, 即光线的入射角等于反射角. □

习题 5.1

1. 求下列函数的极值:

   (1) $f(x)=2x^3-x^4$; (2) $f(x)=x^2-3x+2$; (3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$.

2. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值:

   (1) $f(x)=x^4(1-x),\ x\in[0,1]$; (2) $f(x)=x^4-2x^2+5,\ x\in[-2,2]$.

3. 求函数 $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x\ (x\in\mathbb{R})$ 的极值.

4. 求函数 $f(x)=x^3e^{-x}\ (x\in\mathbb{R})$ 的极值.

5. 求函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$ 的极值.

6. 给出光线反射定律的证明.

7. 设 $p \geqslant 1$, 证明 Bernoulli 不等式: $(1 + x)^p \geqslant 1 + px, \ \ \forall\, x \geqslant -1$.

8. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中可微, 且 $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = A, \ \lim_{x\to+\infty} f'(x) = B$. 证明, 如果 $A \neq B$, 则任给 $\theta \in (0, 1)$, 均存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得
$$f'(\xi) = \theta A + (1 - \theta)B.$$

9. $(*)$ 设 $f(x)$ 在区间 I 中 n 阶可微, $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为 I 中的点. 证明, 存在 $\xi \in I$, 使得
$$\frac{1}{k}\big[f^{(n)}(x_1) + f^{(n)}(x_2) + \cdots + f^{(n)}(x_k)\big] = f^{(n)}(\xi).$$

10. $(*)$ 设 $f(x)$ 在区间 I 中可微, $x_0 \in I$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

11. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 (a, b) 中可微, 如果 $f'(x)$ 为单调函数, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 中连续.

§5.2 微分中值定理

定理 5.2.1 (Rolle)**.** *设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 中可微, 且 $f(a) = f(b)$. 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.*

证明. 连续函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上可以取到最大值 M 和最小值 m. 如果 $M = m$, 则 f 恒为常数，从而 $f' \equiv 0$; 如果 $M > m$, 则由 $f(a) = f(b)$ 知 m 与 M 中至少有一个是被 f 在内点 $\xi \in (a, b)$ 处所取得，由 Fermat 定理，$f'(\xi) = 0$. □

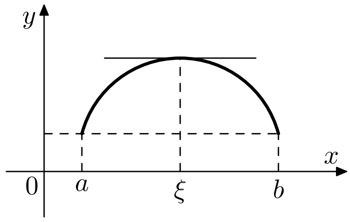
定理 5.2.2 (Lagrange)**.** *设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 中可微, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得*
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ \text{或}\ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

证明. 令
$$F(x) = f(x) - \Big[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\Big],$$
则 $F(a) = F(b) = 0$, F 满足 Rolle 定理的条件. 从而存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 此 ξ 即为满足定理要求的 ξ. □

注. Lagrange 定理的物理含义: 质点的平均速度等于某一点的瞬时速度. 令

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

则 $l(x)$ 是满足条件 $l(a) = f(a), l(b) = f(b)$ 的惟一线性函数, 其图像是连接 $(a,\ f(a))$ 和 $(b,\ f(b))$ 的直线. Lagrange 定理的证明思想就是将这条直线看成是 X 轴, 从而将问题转化为已知情形.



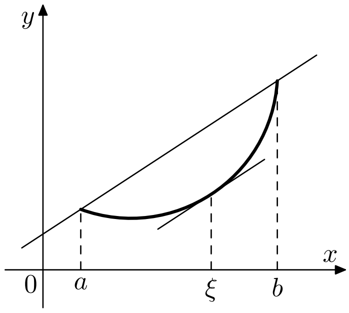


图 5.4 Rolle 定理和 Lagrange 定理

定理 5.2.3 (Cauchy)**.** *设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 中可微, 且 $g'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in (a, b)$. 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明. 由 Rolle 定理和 $g' \neq 0$ 知 $g(b) \neq g(a)$. 令

$$F(x) = f(x) - \Big[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\Big],$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, F 满足 Rolle 定理的条件, 从而存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. ξ 即为满足要求的点. □

注: 令 $g(x) = x$, 则 Cauchy 定理可以推出 Lagrange 定理. 以上三个定理均称为微分中值定理或微分中值公式. 这些结果体现了变化量 (如函数值的差) 和变化率 (导数) 之间的紧密联系, 我们应记得 Newton-Leibniz 公式也是这种关系的一个精确体现.

例 5.2.1. *证明 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.*

证明. 因为 $(\sin x)' = \cos x$, 由 Lagrange 微分中值定理得

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \xi||x - y| \leqslant |x - y|, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

注. 从这个例子的证法可以知道, 如果 f' 为有界函数, 则 f 是 Lipschitz 函数, 读者可以将这里的证明方法和第四章第三节里的证明方法互相比较.

例 5.2.2. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

证明. 考虑函数 $g(x)=e^x f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中可导, 且

$$g(a)=e^a f(a)=0,\quad g(b)=e^b f(b)=0.$$

由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$. 因为

$$g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x),$$

而 $e^\xi>0$, 故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$. □

例 5.2.3. 证明 $e^x\geqslant 1+x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, 且等号仅在 $x=0$ 处成立.

证明. 对函数 e^x 应用 Lagrange 中值定理可得

$$e^x-1=e^x-e^0=e^{\theta x}x,\quad \theta\in(0,1).$$

当 $x>0$ 时, $e^{\theta x}>1$; 当 $x<0$ 时 $e^{\theta x}<1$. 总之, $x\neq 0$ 时均有 $e^x-1>x$. □

注. 设 $a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 记

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\ \ (\text{算术平均}),\quad G=\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}}\ \ (\text{几何平均}).$$

利用 $e^x\geqslant 1+x$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{A}{G}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{G}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\ln\frac{a_i}{G}}\\&\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\big(1+\ln\frac{a_i}{G}\big)=1,\end{aligned}$$

即 $A\geqslant G$, 等号成立当且仅当 $a_i\equiv G$. 这是经典的算术 – 几何平均值不等式. □

例 5.2.4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中二阶可导. 如果 $f(a)=f(b)=0$, 则对任意 $c\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

证明. 不妨设 $c\in(a,b)$, 令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b),\quad x\in[a,b].$$

则 $F(a)=F(c)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=0,\quad F'(\xi_2)=0.$$

因为 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上可微, 再一次由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得

$$F''(\xi)=0.$$

简单的计算表明

$$F''(x)=f''(x)-\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)},$$

在上式中代入 $x=\xi$ 即得欲证结论. □

注. 这个例子可以推广到一般情形. 例如, 设 f 是 n 阶可导函数, 且 $f(x)=0$ 有 n 个不同的解 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 则对任意 $c\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(c)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(c-x_i). \tag{5.1}$$

证明的方法仍是构造适当的辅助函数并利用微分中值定理. 例如, 无妨设 $c\neq x_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{\prod_{i=1}^n(c-x_i)}\prod_{i=1}^n(x-x_i),\quad x\in[a,b].$$

则 $F(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点 c,x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, 对 F 反复使用 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F^{(n)}(\xi)=0$. 再利用 n 次多项式 $\prod_{i=1}^n(x-x_i)$ 的 n 阶导数为 $n!$ 即可得到欲证等式.

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 中 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^n\Big[\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\Big]f(x_i),$$

则 p_{n-1} 为次数不超过 $n-1$ 的多项式, 它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取相同的值, 称为 f 的 Lagrange 插值多项式. 由于 $f-p_{n-1}$ 有 n 个不同的零点, 由 (5.1) 可得 (注意 p_{n-1} 的 n 阶导数为零)

$$f(x)-p_{n-1}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(x-x_i),\quad \xi\in(a,b). \tag{5.2}$$

这个等式称为插值多项式的余项公式, 在第六章中, 我们将利用它来估计积分近似值的误差.

例 5.2.5. 证明勒让德 (*Legendre*) 多项式 $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 中有 n 个不同的实根, 其中 $n\geqslant1$.

证明. 首先, 多项式 $(x^2-1)^n$ 有实根 -1 和 1, 根据 Rolle 定理, $\dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 内有实根, 记为 ξ_{11}. 当 $n>1$ 时, -1 和 1 仍为 $\dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n$ 的实根, 再次由

Rolle 定理即知 $\dfrac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,\xi_{11})$ 和 $(\xi_{11},1)$ 中分别有实根 ξ_{21} 和 ξ_{22}. 如果 $n>2$, 则 -1 和 1 仍为 $\dfrac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ 的实根, 即它有四个实根 $-1,\xi_{21},\xi_{22}$ 和 1. 继续使用 Rolle 定理, $\dfrac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^n$ 在 $(-1,1)$ 中就有三个不同的实根. 如此重复证明就知道欲证结论对任意正整数 n 都成立. □

注. 以上例题中, 用到非常重要的一点就是微分中值定理中的 ξ 可以取在区间内部.

习题 5.2

1. 证明多项式 x^3-3x+c 在 $[0,1]$ 上不存在两个不同的实根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中可微, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=2f(\xi)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

4. 设 $a_i,p_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1$. 利用 $e^x\geqslant 1+x$ 证明
$$\sum_{i=1}^n p_ia_i\geqslant\prod_{i=1}^n a_i^{p_i}.\quad (\text{加权平均值不等式})$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中二阶可导. 如果 l 是满足条件 $l(a)=f(a)$, $l(b)=f(b)$ 的线性函数, 则对任意 $c\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f(c)-l(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

6. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的三阶可导函数, 且 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$. 证明, 任给 $c\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f(c)=\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(c-a)^2(c-b).$$

7. 证明切比雪夫多项式 $e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ 有 n 个正的实根.

8. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且存在 $M>0$, 使得
$$|f'(x)|\leqslant M,\quad \forall\ x\in[a,b].$$
证明
$$\left|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}M(b-a),\quad \forall\ x\in[a,b].$$

9. (*) 设函数 f 在点 x_0 处可导, $x_n < x_0 < y_n$, 且 $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0).$$

10. (*) 设函数 f 在 (a,b) 中可微, 且 $a < x_i \leqslant y_i < b$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 证明, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)] = f'(\xi) \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i).$$

11. (*) 设 f 在 $[a, +\infty)$ 中可微, 且

$$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leqslant |f(x)|, \quad \forall\, x \in [a, +\infty).$$

证明 $f \equiv 0$.

§5.3 单调函数

我们应用微分中值定理来进一步研究函数的单调性和极值. 下面的结果在第四章第三节已经证明过了, 现在我们用微分中值定理可以得到很简单的新证明.

命题 5.3.1. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中可微. 如果 $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, 则 f 为常值函数.*

证明. 任取 $x, y \in [a,b]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0,$$

因此 f 为常值函数. □

完全类似的证明可以推出

命题 5.3.2. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中可微. 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.*

证明. 不妨设 f 为单调递增函数, 则由导数的定义, 当 $x_0 \in (a,b)$ 时, 有

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

因为 f 单调递增, 故 $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 总是非负的, 从而 $f'(x_0) \geqslant 0$.

反之, 不妨设 $f'(x) \geqslant 0$, $x \in (a,b)$. 任取 $x_1 < x_2 \in [a,b]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

因此 f 是单调递增的. □

注. 如果 $f' > 0$, 则 f 是严格单调递增的; 如果 $f' < 0$, 则 f 是严格单调递减的. 反之不然, 例如, 函数 $f(x) = x^3$ 是严格单调递增的, 但 $f'(0) = 0$.

下面的结果进一步说明, 如果可微函数在两个驻点之间没有其它驻点, 则它在这两个驻点之间是单调的, 我们可以藉此判断函数图像的大致走向.

定理 5.3.3 (反函数定理)**.** *设 f 为区间 I 中的可微函数, 如果 f 的导数处处非零, 则 $f : I \to f(I)$ 是可逆的, 且其逆函数也可微.*

证明. 如果 $f'(x) \neq 0, \forall\, x \in I$, 则由 Lagrange 定理知 f 是单射, 根据推论 3.4.7 的证明知 f 是严格单调函数, 根据推论 3.3.6 即知 f 可逆, 再由命题 4.1.6 即知 f 的逆函数也可微. □

下面的结果给出了用导数判断极值点的一个办法.

命题 5.3.4. *设 $\delta > 0$, f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中连续, 在 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 中可微. 如果*

$$f'(x) \leqslant 0,\ x \in (x_0-\delta, x_0);\quad f'(x) \geqslant 0,\ x \in (x_0, x_0+\delta),$$

则 x_0 为 f 的极小值点; 如果

$$f'(x) \geqslant 0,\ x \in (x_0-\delta, x_0);\quad f'(x) \leqslant 0,\ x \in (x_0, x_0+\delta),$$

则 x_0 为 f 的极大值点.

证明. 以第一种情形为例. 根据命题 5.3.2 可知 f 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 中单调递减, 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 中单调递增, 这说明 x_0 为局部最小值点. □

例 5.3.1. *设 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 证明*

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明. 考虑 $f(x) = \ln(1+x) - x,\ x > -1$. 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x},$$

当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 中严格单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 中严格单调递减, 从而 $f(x) \leqslant f(0) = 0, \forall\, x > -1$, 且等号仅在 $x = 0$ 处成立.

类似地, 考虑 $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

同样的讨论可以得出 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 中严格单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 中严格单调递增, 因此 $g(x)\geqslant g(0)=0$, 且等号仅在 $x=0$ 处成立. □

例 5.3.2. 设 $b>a>1$, 证明 $ba^b>ab^a$.

证明. 在欲证不等式两边取对数, 得

$$ba^b>ab^a \Longleftrightarrow \ln b+b\ln a>\ln a+a\ln b \Longleftrightarrow \frac{\ln a}{a-1}>\frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ $(x>1)$. 求导并利用上例, 得

$$f'(x)=\frac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}<0,\quad \forall\ x>1.$$

因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格单调递减, 从而欲证不等式成立. □

命题 5.3.5. 设 f 在内点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0$. 则

(1) 如果 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 为 f 的 (严格) 极小值点;

(2) 如果 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 为 f 的 (严格) 极大值点.

证明. 以 (1) 为例. 设 $f''(x_0)>0$, 则由导数定义,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0,$$

这说明, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$; 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)>0$. 利用命题 5.3.4 的证明即知 x_0 为 f 的 (严格) 极小值点. □

推论 5.3.6. 设 f 在内点 x_0 处二阶可导, x_0 为 f 的极小 (大) 值点, 则 $f''(x_0)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

证明. 不妨设 x_0 为 f 的极小值点, 则 x_0 为驻点. 如果 $f''(x_0)<0$, 则由刚才的命题, x_0 为 f 的严格极大值点, 从而不可能是极小值点. □

注. 如果 x_0 是 f 的驻点, 且 $f''(x_0)=0$, 则 x_0 可能是极值点, 也可能不是极值点. 这时可利用高阶导数去做进一步的判断, 参见本章最后一节.

例 5.3.3. 证明 $\sin x\geqslant x-\dfrac{x^3}{6}$, $\forall\ x\geqslant 0$, 且等号仅当 $x=0$ 时成立.

证明. 考虑 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$, 则

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\quad f''(x)=-\sin x+x\geqslant 0.$$

由 $f''\geqslant 0$ 知 f' 单调递增. 由于 $f'(0)=0$, 故当 $x\geqslant 0$ 时 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$, 即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中也是单调递增的. 再由 $f(0)=0$ 知 $f(x)\geqslant 0$, $\forall\ x\geqslant 0$. 因为 f'' 仅在 $x=0$ 处为 0, 故 f' 在 $[0,+\infty)$ 中实际上是严格单调递增的, 因而 f 在 $[0,+\infty)$ 中也是严格单调递增的. □

例 5.3.4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中二阶可导. 如果 f 有界, 证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明. (反证法) 假设 f'' 处处非零, 由 Darboux 定理可知 f'' 不变号. 不妨设 f'' 恒正, 则 f' 为严格单调递增函数. 取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f'(x_0) \neq 0$. 如果 $f'(x_0) > 0$, 则当 $x \geqslant x_0$ 时

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \geqslant f'(x_0)(x - x_0) \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

如果 $f'(x_0) < 0$, 则当 $x \leqslant x_0$ 时

$$f(x_0) - f(x) = \int_{x}^{x_0} f'(t)dt \leqslant f'(x_0)(x_0 - x) \to -\infty, \quad x \to -\infty.$$

总之与 f 有界相矛盾. □

习题 5.3

1. 证明下列等式:

   (1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$;

   (2) $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $\forall\, x \geqslant 1$.

2. 证明下列不等式:

   (1) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $\forall\, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$;

   (2) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x$, $\forall\, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$;

   (3) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2(1+x)}$, $\forall\, x > 0$;

   (4) $ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y)$ $(n > 1)$, $\forall\, x > y > 0$.

3. 证明不等式 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall\, x > 0$.

4. 证明不等式 $\dfrac{\tan x}{x} > \dfrac{x}{\sin x}$, $\forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

5. 数列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots, \sqrt[n]{n}, \cdots$ 中哪一项最大?

6. 研究函数 $\dfrac{x}{\sin x}$ 和 $\dfrac{\tan x}{x}$ 的单调性, 其中 $x \in (0, \pi/2)$.

7. 研究函数 $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x > 0)$ 的单调性.

8. $(*)$ 研究函数 $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ 的单调性, 其中 $x \in (0, \pi)$.

9. 设 f 在 $[a,b]$ 上二次可导. 如果 $f''\geqslant 0$, 且 $c\in(a,b)$ 为 f 的极值点, 则 c 必为 f 在 $[a,b]$ 上的最小值点.

10. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 I 中有惟一的极值点, 则该极值点为最值点.

11. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中二阶可导. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=0$, 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\xi)=0$.

12. (*) 设 $f(0)=0$, $f'(x)$ 严格单调递增, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 中也严格单调递增.

§5.4 凸函数

根据前一节的讨论, 如果函数 f 二阶可导, 且 $f''>0$, 则 f 在区间的内部取不到极大值. 进一步, 根据第二节 (5.2) 式 $(n=2)$, 如果 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 则

$$f(x)-l(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b),\quad \xi\in(a,b), \tag{5.3}$$

其中 $l(x)$ 是满足条件 $l(a)=f(a)$, $l(b)=f(b)$ 的线性函数, 它可以写成

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),\quad 或\quad l(x)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x). \tag{5.4}$$

于是, 当 $f''\geqslant 0$ 时, 有

$$f(x)\leqslant l(x),\quad \forall\, x\in(a,b). \tag{5.5}$$

特别地, 由线性函数的单调性可得

$$f(x)\leqslant l(x)\leqslant \max\{l(a),l(b)\}=\max\{f(a),f(b)\},\quad \forall\, x\in[a,b].$$

定义 5.4.1 (凸函数)**.** *设 f 为区间 I 中定义的函数. 如果对任意 $a<b\in I$, (5.5) 式均成立, 则称 f 为 I 中的***凸函数***.*

当 (5.5) 中不等号反向时, 则称相应的函数为**凹函数**. 有时也将凸函数称为下凸函数, 凹函数称为上凸函数. 如果 (5.5) 中不等号为严格小于号, 则称相应的函数为**严格凸函数**.

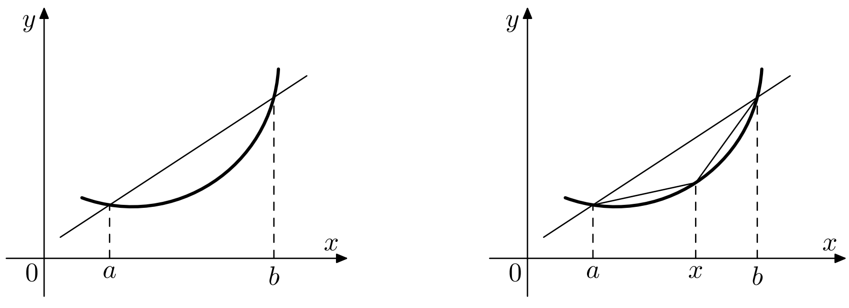


图 5.5 凸函数

根据 (5.4) 式, 我们可以将 $f(x) \leqslant l(x)$ 改写为

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{5.6}$$

上式与下面的不等式等价

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{5.7}$$

这只要对 (5.6) 两端利用如下初等结论即可: 即, 如果 $k, l > 0$, $\dfrac{m}{k} \leqslant \dfrac{n}{l}$, 则

$$\frac{m}{k} \leqslant \frac{m+n}{k+l} \leqslant \frac{n}{l}.$$

假设不等式 (5.7) 成立, 应用此初等结论即有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{(f(x)-f(a))+(f(b)-f(x))}{(x-a)+(b-x)} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

这也就是不等式 (5.6).

当 $x \in [a,b]$ 时, x 可以写为

$$x = ta + (1-t)b, \quad t = \frac{b-x}{b-a} \in [0,1].$$

此时 $l(x)$ 可以写为 $l(x) = tf(a) + (1-t)f(b)$. 于是 (5.5) 可以改写为

$$f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b), \quad \forall\, t \in (0,1).$$

例 5.4.1. 凸函数与 *Young* 不等式.

考虑指数函数 $f(x) = e^x$, 由 $f''(x) = e^x > 0$ 可知 f 为 (严格) 凸函数. 于是, 当 a, $b > 0$, p, q 满足条件 $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ 时, 有

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leqslant \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

这也就是 Young 不等式.

更一般地, 有

定理 5.4.1 (Jensen 不等式)**.** 设 f 是定义在区间 I 中的函数. 则 f 为凸函数当且仅当对任意的 $x_i \in I$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 有

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

证明. 只要证明必要性就可以了. 我们对 n 用数学归纳法. $n=1$ 是显然的, $n=2$ 上面已经讨论了. 假设不等式对 $n=k$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时, 不妨假设 $0<\lambda_{k+1}<1$, 此时

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}=1.$$

由归纳假设, 有

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\Big) &= f\Big((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\Big)\\
&\leqslant (1-\lambda_{k+1})f\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i\Big)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\leqslant (1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

这说明不等式对 $n=k+1$ 也成立, 从而定理得证. □

例 5.4.2. 算术 – 几何平均值不等式.

考虑函数 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$. 由 $f''(x)=x^{-2}>0$ 可知 f 为 (严格) 凸函数. 根据 Jensen 不等式, 当 $a_i>0$ 时

$$\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)\leqslant \ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

即

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n),\quad \forall\ a_i>0\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

这就重新得到了算术 – 几何平均值不等式. □

下面我们研究一般凸函数的基本性质, 先看连续性质.

命题 5.4.2 (连续性质)**.** *设 f 为区间 I 中的凸函数, 如果 $[a,b]$ 为 I 中不含 I 的端点的闭区间, 则 f 为 $[a,b]$ 上的 Lipschitz 函数. 特别地, 凸函数在区间内部总是连续的.*

证明. 由已知条件, 可取 $a',b'\in I$, 使得 $a'<a$, $b<b'$. 任取 $x<y\in[a,b]$, 因为 f 为凸函数, 故有下列不等式

$$\begin{aligned}
\frac{f(a')-f(a)}{a'-a}\leqslant\frac{f(a')-f(x)}{a'-x}&\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\
&\leqslant\frac{f(b')-f(y)}{b'-y}\leqslant\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}.
\end{aligned}$$

令

$$M = \max\Big\{\Big|\frac{f(a') - f(a)}{a' - a}\Big|, \Big|\frac{f(b') - f(b)}{b' - b}\Big|\Big\},$$

则不等式意味着

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \quad \forall\ x, y \in [a, b].$$

这说明 f 在 $[a, b]$ 上为 Lipschitz 函数. □

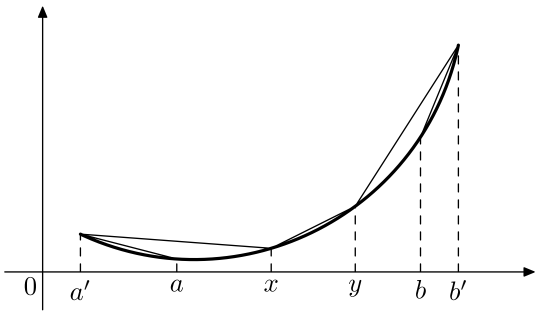


图 5.6 凸函数的连续性质

注. 凸函数在区间的端点处可能不连续, 例如函数

$$f(0) = 1,\ f(x) = 0,\ x > 0$$

是 $[0, +\infty)$ 中的凸函数, 但它在 $x = 0$ 处不连续.

对于连续的函数, 我们可以用下面较简单的方法去判别它是否为凸函数.

命题 5.4.3. *设 f 为区间 I 中的连续函数, 则 f 为凸函数当且仅当对任意 $x_1 < x_2 \in I$, 有*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\big[f(x_1) + f(x_2)\big]. \quad (\text{平均值不等式})$$

证明. 只要证明充分性即可. 设 $a < b \in I$, $l(x)$ 是 (5.4) 式中的线性函数. 显然, 函数 $g(x) = f(x) - l(x)$ 仍然满足平均值不等式. 因为 g 为连续函数, 故 g 在 $x_0 \in [a, b]$ 处取到最大值 M, 只要说明 $M = 0$ 即可. 如果 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$, 则 $M = 0$; 如果 $x_0 \in (a, b)$, 不妨设 $x_0 \leqslant (a + b)/2$. 考虑 a 关于 x_0 的对称点 $x_1 = 2x_0 - a$, 则 $x_1 \in [a, b]$, 且

$$M = g(x_0) = g\Big(\frac{a + x_1}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\big[g(a) + g(x_1)\big] \leqslant M,$$

这说明 $M = g(a) = 0$. □

从以上证明过程可以看出, 如果函数满足平均值不等式且在 x_0 处达到最大值, 则在关于 x_0 对称的任意一对点处也达到最大值. 特别地, 有

推论 5.4.4. (*) 设 f 为区间 I 中的凸函数, 如果 f 在 I 的内部达到最大值, 则 f 是常值函数.

证明. 设 f 在 x_0 处达到最大值. 任取 $a, b \in I$, $a < x_0 < b$. 则 $x_0 = ta + (1-t)b$, $t \in (0,1)$. 此时

$$\max f = f(x_0) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b) \leqslant t\max f + (1-t)\max f = \max f,$$

这说明 $f(a) = f(b) = \max f$, 因此 f 恒等于 $f(x_0)$. □

例 5.4.3. 函数 $f(x) = -\ln x$ $(x > 0)$ 的凸性.

当 $x, y > 0$ 时, 由

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

可得

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y),$$

上式两边取对数就得到

$$\frac{1}{2}(\ln x + \ln y) \leqslant \ln \frac{x+y}{2},$$

这可重新说明连续函数 $-\ln x$ 为凸函数. □

我们接着研究一般凸函数的可微性质.

命题 5.4.5 (导数性质)**.** (*) 设 f 为区间 I 中的凸函数, x 为 I 的内点, 则 f 在 x 处的左导数和右导数均存在, 且 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

证明. 任取 $x_1, x_2 \in I$, 使得 $x_1 < x < x_2$, 因为 f 为凸函数, 我们有不等式

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

f 为凸函数也意味着 $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ 是关于 x_1 的单调递增函数, 上式则表明这个单调递增函数有上界, 从而极限 $\lim\limits_{x_1 \to x^-} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_-(x)$ 存在, 且

$$f'_-(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

同理, 当 $x_2 \to x_+$ 时, $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ 单调递减且有下界, 从而极限存在且满足

$$f'_-(x) \leqslant \lim_{x_2 \to x^+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_+(x),$$

这就证明了命题. □

注. (1) 凸函数不一定可微, 例如函数 $f(x) = |x|$ 是凸函数, 但它在 $x = 0$ 处不可微 (左右导数不同);

(2) 凸函数的不可微点只有至多可数个.

对于可微函数, 我们可以用下面的方法去判别它是否是凸函数.

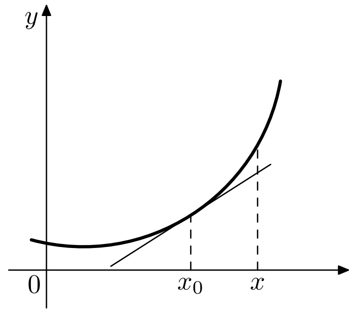


图 5.7 凸函数的可微性质

命题 5.4.6. 设 f 是区间 I 中的可微函数, 则

(1) f 为凸函数当且仅当 f' 为单调递增函数;

(2) f 为凸函数当且仅当对任意 $x_0 \in I$, $x \in I$, 有

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

证明. (1) 设 f 为可微凸函数, $x_1 < x_2$. 则当 $x \in (x_1, x_2)$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

分别在这个不等式的左边和右边令 $x \to x_1$ 以及 $x \to x_2$, 得

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2),$$

这说明 f' 是单调递增函数.

反之, 如果 f 可微, 设 $a < x < b$, 由微分中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a,x)$, $\xi_2 \in (x,b)$, 使得

$$f(x)-f(a) = f'(\xi_1)(x-a), \quad f(b)-f(x) = f'(\xi_2)(b-x).$$

如果 f' 为单调递增函数, 则 $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, 从而

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

由 (5.6)-(5.7) 知 f 为凸函数.

(2) 设 f 为可微凸函数, $x_0 \in I$. 如果 $x > x_0$, 则由 (1) 的证明, 有

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

如果 $x < x_0$, 仍则由 (1) 的证明, 有

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant f'(x_0);$$

这两个不等式合起来就得到了

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

反之, 如果不等式成立, 则任取 $a < x < b$, 有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

由 (5.6)-(5.7) 知 f 为凸函数. □

注. 结合前两个命题的证明不难发现, 凸函数的左导数或右导数为单调递增函数. 反之, 有

命题 5.4.7. (*) 设 f 为区间 I 中的连续函数. 如果 f 的左导数 f'_- 存在且单调递增, 则 f 为凸函数. 对右导数有类似结论.

证明. 我们来证明 f 满足 Jensen 不等式. 首先, 设 $x_0 \in I$, 记

$$L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad g(x) = f(x) - L(x).$$

于是 $g'_-(x) = f'_-(x) - f'_-(x_0)$. 由 f'_- 单调递增可知, 当 $x \leqslant x_0$ 时 $g'_-(x) \leqslant 0$; 当 $x \geqslant x_0$ 时, $g'_-(x) \geqslant 0$. 根据第四章命题 4.3.1 的证明方法及其注记可知, 在 x_0 的左边 g 单调递减, 在 x_0 的右边 g 单调递增. 这说明 g 的最小值为 $g(x_0) = 0$, 即

$$f(x) \geqslant L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in I. \tag{5.8}$$

其次, 设 $x_i \in I$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. 记 $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, 利用 (5.8) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) &\geqslant f'_-(x_0) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_0) + f(x_0) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ &= f(x_0),\end{aligned}$$

这说明 f 满足 Jensen 不等式. □

我们可以重新讨论二阶可导函数的凸性.

命题 5.4.8. 如果 f 在 I 中二阶可导, 则 f 为凸函数当且仅当 $f'' \geqslant 0$.

证明. 如果 f 二阶可导, 则 f 是凸函数当且仅当 f' 为单调递增函数, 而可微函数 f' 是单调递增函数当且仅当其导数 f'' 非负. □

例 5.4.4. 设 $p \geqslant 1$, 则

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^p \leqslant \frac{a^p + b^p}{2}, \quad \forall\, a, b \geqslant 0.$$

证明. 当 a 或 b 为零时不等式显然成立. 下设 $a, b > 0$. 考虑函数 $f(x) = x^p$, $x > 0$. 因为 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中是凸函数, 于是

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad \forall\, a, b > 0.$$

这也就是要证明的不等式. □

例 5.4.5. 设 $P=(a,b)$ 为平面上的一个固定点, x 轴上的点 $(x,0)$ 到 P 的距离函数是凸函数.

事实上, 如果 P 位于 x 轴上, 其坐标记为 $(x_0,0)$, 则距离函数 $f(x)=|x-x_0|$ 为凸函数; 如果 P 不在 x 轴上, 则距离函数

$$f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2},\quad x\in\mathbb{R}$$

是可微函数, 其一阶导数为

$$f'(x)=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}},$$

二阶导数为

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}-\frac{(x-a)^2}{[(x-a)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{b^2}{[(x-a)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}}>0,$$

因此 $f(x)$ 为凸函数.

值得指出的是, f 的凸性等价于不等式

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{1}{2}\big[f(x)+f(y)\big],$$

而这个不等式可以解释为平面三角形 P, $(x,0)$, $(y,0)$ 中从 P 出发的中线的长度不超过从 P 出发的两条边的长度和的一半, 这件事实在中学就已经学过了.

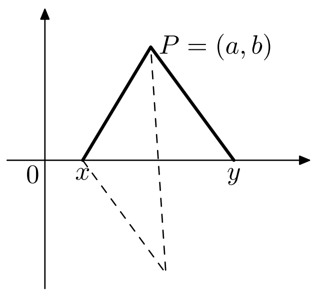


图 5.8 距离函数的凸性

习题 5.4

1. 研究下列函数的凸凹性:

   (1) $f(x)=x^p$ $(x\geqslant 0,\ 0<p\leqslant 1)$; (2) $f(x)=a^x$ $(a>0)$; (3) $f(x)=x\ln x$.

2. 研究函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{\sin x}$ 在区间 $\big[0,\dfrac{\pi}{2}\big]$ 上的凸性.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 并且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

4. 证明, 如果 f, g 均为区间 I 中的凸函数, 则 $\max\{f,g\}$ 也是 I 中的凸函数.

5. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为凸函数, 且 f 单调递增, 则 $f(g(x))$ 也是凸函数.

6. 证明三次的实系数多项式不是凸函数.

7. 设 $a,b\geqslant 0$, 证明下面的不等式:

$$2\arctan\frac{a+b}{2}\geqslant\arctan a+\arctan b.$$

8. 设 $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 证明下面的不等式:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

9. 设 $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, 证明下面的不等式

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_ix_i, \quad \forall\ x_i \geqslant 0,$$

并求等号成立的条件.

10. 设 f 为区间 I 中的凸函数, x_0 为 I 的内点. 如果 x_0 为 f 的极值点, 则 f 在 x_0 的左边单调递减, 在 x_0 的右边单调递增.

11. 证明, 定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的有界凸函数必为常值函数.

12. $(*)$ 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 中的连续函数, 如果任给 $x_0 \in I$, 均存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中是凸函数, 则 $f(x)$ 是 I 中的凸函数.

13. $(*)$ 设 f 为区间 I 中的凸函数, x_0 为 I 的内点. 如果 $f'_-(x_0) \leqslant k \leqslant f'_+(x_0)$, 则

$$f(x) \geqslant k(x-x_0) + f(x_0), \quad \forall\ x \in I.$$

并利用上式重新证明 Jensen 不等式.

14. $(*)$ 设 ϕ 为区间 I 中的连续凸函数, $g: [a,b] \to I$ 为连续函数. 证明积分形式的 Jensen 不等式

$$\phi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(g(x))dx.$$

15. 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续凸函数, 证明 Hadamard 不等式

$$f\big(\frac{a+b}{2}\big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

16. $(*)$ 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 中的连续函数, 如果对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = 0,$$

证明 $f(x)$ 为线性函数.

§5.5 函数作图

应用以上几节的知识, 我们可以在平面上大致作出函数的图像, 需要注意的要点就是: 求函数 f 的驻点和极值点, 判断 f 的单调区间和凸凹区间, 以及求出 f 的其它特殊值, 如 f 和坐标轴的交点, f 在间断点或无穷远处的极限.

我们再给出两个概念: 一是函数的拐点. 如果函数 f 在 x_0 的一侧是凸的, 而在另一侧是凹的, 则称 x_0 为 f 的拐点; 另一个概念是渐近线. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 则称 $x=x_0$ 为 f 的垂直渐近线; 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 则称 $y=ax+b$ 为 f 在无穷远处的渐近线.

例 5.5.1. 函数 $f(x)=x^3$ 的图像.

先求导: $f'(x)=3x^2\geqslant 0$, 因此 f 是单调递增函数. $f''(x)=6x$, 因此 f 在 $(-\infty,0)$ 中是凹的, 在 $(0,+\infty)$ 中是凸的. f 是奇函数, 当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$, $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$. 有了这些了解, f 的图像就大致清楚了.

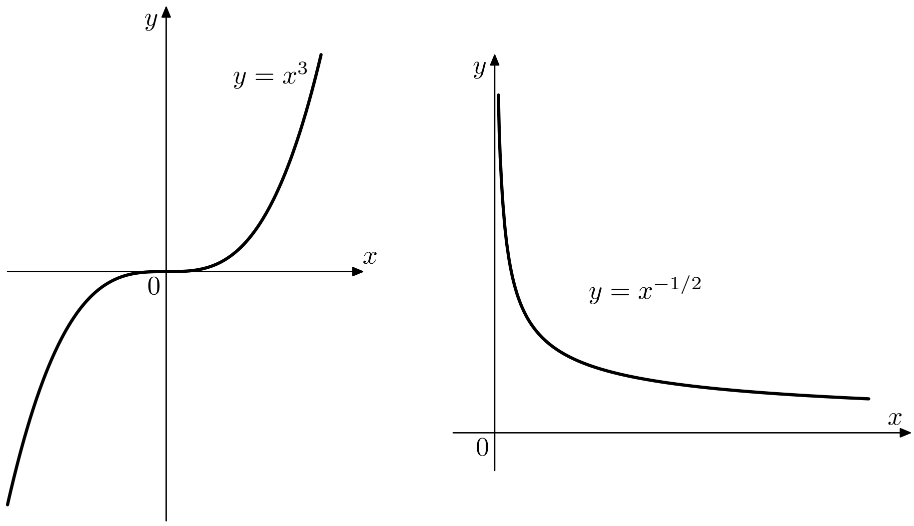


图 5.9 函数作图

例 5.5.2. 函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

f 的定义域为 $(0,+\infty)$. 求导:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}<0,\quad f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}>0,$$

因此 f 是单调递减的凸函数. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$, 故 $x=0$ 为 f 的垂直渐近线; 同理, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 故 $y=0$ 也是 f 的渐近线 (水平渐近线).

例 5.5.3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的图像.

这是一个偶函数, 求导:

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

f 的驻点为 0, 拐点为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 因此 f 在 $(-\infty,0]$ 中单调递增, 在 $[0,+\infty)$ 中单调递减, 在 $(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 和 $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 中是凸函数, 在 $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 中是凹函数. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 故 $y=0$ 是 f 的渐近线.

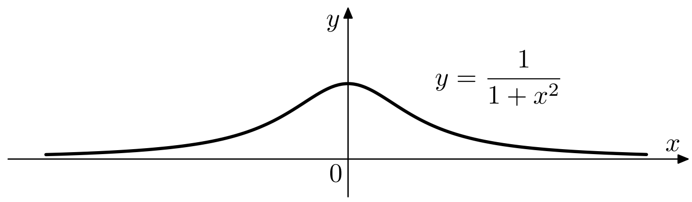


图 5.10 函数作图 (续)

例 5.5.4. 函数 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的图像.

这是一个奇函数. 求导:

$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$x=\pm1$ 为 f 的驻点, f 在 $(-\infty,-1)$ 中单调递减, 在 $(-1,1)$ 中单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 中单调递减. $f(-1)=-1$ 为 f 的极小值, $f(1)=1$ 为 f 的极大值.

$\pm\sqrt{3},0$ 为 f 的拐点, f 在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 中是凹的, 在 $(-\sqrt{3},0)$ 中是凸的, 在 $(0,\sqrt{3})$ 中是凹的, 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 中又是凸的.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 因此 $y=0$ 为 f 的渐近线.

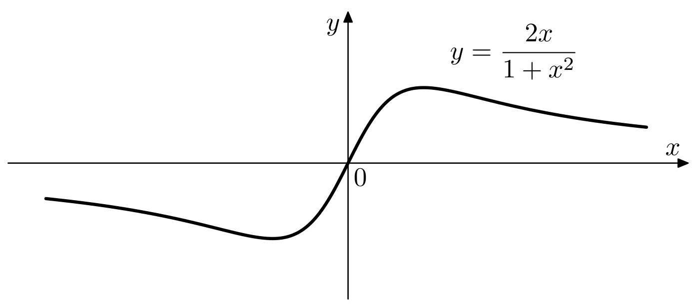


图 5.11 函数作图 (续)

习题 5.5

1. 设 x_0 为二阶可微函数 f 的拐点, 则 $f''(x_0)=0$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, 则 f 在无穷远处不存在渐近线.

3. 作出下列函数的图像

   (1) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x,\ x\in\mathbb{R}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}+1,\ x>0$;

   (3) $f(x)=x^3-x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$;　(4) $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$.

4. 作出下列函数的图像

   (1) $f(x)=e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R}$;　　(2) $f(x)=(2+x)e^{\frac{1}{x}},\ x\neq 0$;

   (3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ x\in\mathbb{R}$;　(4) $f(x)=x^2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

5. 研究函数 $f(x)=x^3+px+q$ 的图像, 分别找出 $f(x)=0$ 有一个实根和三个实根时 $p,\ q$ 应该满足的条件.

6. 研究凸函数的渐近线, 并回答问题: 是否存在 $\mathbb{R}$ 中的凸函数, 使得 $f(0)<0$, 且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0\ \ ?$$

§5.6　L'Hôpital 法则

在计算函数极限的时候, 经常遇到求这种类型的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 下列两种情况比较常见:

(1) $(\frac{0}{0})$ 型: $x\to x_0$ 时, $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$;

(2) $(\frac{\infty}{\infty})$ 型: $x\to x_0$ 时, $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$.

还有一些情形也可以转化为这两种情形之一. 利用求导我们往往可以方便地计算这样的极限, 这是微分学对于求极限的一个应用.

定理 5.6.1 (L'Hôpital 法则)**.** 设 $f,\ g$ 在 (a,b) 中可导, 且 $g'(x)\neq 0,\ \forall\, x\in(a,b)$. 又设

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=0=\lim_{x\to a^+}g(x).$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 f 在 $[a,b)$ 中连续. 由 Cauchy 中值定理, $\forall\ x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a^+$ 时, $\xi\to a^+$, 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

因此

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.9}$$

注. (1) 如果仍有 $f'_+(a)=g'_+(a)=0$, 则可利用二次导数继续求极限:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

高阶导数的情形类似.

(2) 区间 (a,b) 换成 $(-\infty,b)$ 或 (a,∞) 时, 有类似结论:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这可由变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$ 得出.

(3) 需要注意的是, 等式 (5.9) 成立需要其右端极限存在 (或为无穷), 如果极限不存在, 则 (5.9) 就未必成立了, 读者可在 $x=0$ 处验证 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ 就是不成立的例子.

例 5.6.1. 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

解. 由 L'Hôpital 法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

例 5.6.2. 设 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}.$$

解. 由 L'Hôpital 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}&=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}\\&=\frac{1}{2}f''(x_0).\end{aligned}$$

例 5.6.3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[e^{-1}(1+\frac{1}{x})^x]^x$.

解. 记题目中的函数为 $f(x)$, 则

$$\ln f(x) = x\Big[x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)-1\Big] = \frac{\ln(1+x^{-1})-x^{-1}}{x^{-2}}.$$

作变量替换 $y=1/x$, 由 L'Hôpital 法则得

$$\lim_{x\to\infty}\ln f(x) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)-y}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{-1}-1}{2y} = -\frac{1}{2},$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^{-1/2}$. □

定理 5.6.2 (L'Hôpital 法则)**.** 设 f, g 在 (a,b) 中可导, 且 $g'(x)\neq 0$, $\forall\, x\in(a,b)$. 又设

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty.$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

证明. 我们对 l 有限的情形加以证明, $l=\infty$ 的情形可类似证明. 由已知条件, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $x\in(a,a+\eta)$ 时

$$l-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

取 $c=a+\eta$, 当 $x\in(a,c)$ 时, 由 Cauchy 微分中值定理, 存在 $\xi\in(x,c)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

上式可以改写为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\big(g(x)-g(c)\big),$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{g(c)}{g(x)}.$$

利用 (5.10) 以及条件 $g(x)\to\infty$ $(x\to a^+)$ 不难得知, 存在正数 $\delta<\eta$, 使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - l\Big| < \varepsilon,$$

这就证明了所需结论. □

注. 与前一定理类似的注记请读者自行补充.

例 5.6.4. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可微.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot f'(x)=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(2) 如果存在 $\alpha>0$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f'(x))=\beta,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

证明. (1) 当 $x\to+\infty$ 时, $\ln x\to+\infty$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot f'(x)=1,$$

特别地, $f(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$.

(2) 当 $\alpha>0$ 时, $x^\alpha\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f+x^\alpha f'}{\alpha x^{\alpha-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f')=\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

习题 5.6

1. 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x};\quad (2)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x};\quad (3)\ \lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(4)\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a};\quad (5)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\Big);\quad (6)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{\tan x}{x}\Big)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(7)\ \lim_{x\to0}\frac{x\cot x-1}{x^2};\quad (8)\ \lim_{x\to1}\frac{1-\sin^2\frac{\pi x}{2}}{1-x^2};\quad (9)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\Big);$$

2. 求下列极限 $(a>0)$:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x\ln x)}{x^a};\quad (2)\ \lim_{x\to\infty}\Big(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\Big)^{1/x};\quad (3)\ \lim_{x\to\infty}x\Big[(1+\frac{1}{x})^x-e\Big];$$

$$(4)\ \lim_{x\to0^+}x^x;\quad (5)\ \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx};\quad (6)\ \lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x);$$

$$(7)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{x^4};\quad (8)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{\frac{1}{x}};\quad (9)\ \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan x\Big)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3. 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{\frac{1}{x^2}},\quad (2)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\Big)^{\frac{1}{x}}\quad (a_i\geqslant0).$$

4. 设 $f'''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\big[f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)\big].$$

5. 设函数 f 在点 x_0 处 2 阶可导, 且 $f''(x_0)\neq 0$. 由微分中值定理, 当 h 充分小时, 存在 $\theta=\theta(h)$ $(0<\theta<1)$, 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h.$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 中可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 中可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=l$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$. (提示: 考虑 $e^xf(x)$.)

8. 设 $a_i\in\mathbb{R}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(a_1x)\cos(a_2x)\cdots\cos(a_nx)}{x^2}.$$

9. 设 $f''(x_0)$ 存在, $f'(x_0)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to x_0}\Big[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\Big].$$

10. $(*)$ 设 $a_1\in(0,\pi)$, $a_{n+1}=\sin a_n$ $(n\geqslant 1)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$.

§5.7 Taylor 展开

这一节我们研究用多项式逼近高阶可微函数的问题. 研究一元函数 f 的局部性态时, 我们知道:

(1) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则

$$f(x)-f(x_0)=o(1)\ \ (x\to x_0),$$

即, 在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

(2) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 则

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=o(x-x_0)\ \ (x\to x_0),$$

即, 在 x_0 附近 f 可用线性函数 L 逼近, 其中

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

(3) 如果 $f''(x_0)$ 存在, 则由前节例 5.6.2,

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2]=o((x-x_0)^2)\ \ (x\to x_0),$$

即 f 在 x_0 附近可以用二次多项式逼近. 一般地, 我们有

定理 5.7.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)**.** *设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则*

$$(*)\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0).$$

证明. 记

$$R_n(x)=R_n(f,x)=f(x)-\big[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\big],$$

我们要证明 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ $(x\to x_0)$. 用数学归纳法来证. 对 $n=1,2$ 的情形我们在前面已讨论过. 设 $n=k$ 时 $(*)$ 成立, 则 $n=k+1$ 时, $f'(x)$ 满足归纳假设, 于是简单的计算表明

$$R'_{k+1}(f,x)=R_k(f',x)=o((x-x_0)^k)\ \ (x\to x_0).$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{k+1}(f,x)}{(x-x_0)^{k+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'_{k+1}(f,x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=0,$$

即 $(*)$ 对 $n=k+1$ 成立, 定理得证. □

R_n 称为 Taylor 展开的余项. 如果 f 有更好的可微性, 那么我们可以更好地估计余项的大小. 例如, 在可分部积分的条件下, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)dt=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)d(t-x)\\&=f(x_0)+f'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^x+\int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt\\&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt,\end{aligned}$$

这个过程可以继续 (参见本节习题). 由此可以得到余项的更精密的估计.

定理 5.7.2 (Taylor)**.** *设 f 在开区间 (a,b) 中有直到 $n+1$ 阶导数, x_0, $x\in(a,b)$. 则存在区间 (x,x_0)(或 (x_0,x)) 中的点 ξ, ζ, 使得 Taylor 展开的余项可表示为*

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},\quad (\textit{Lagrange}\ 余项)$$

以及

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0).\quad (\textit{Cauchy}\ 余项)$$

证明. 受分部积分过程的启发, 考虑以 t 为变量的函数

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in(a,b).$$

对 t 求导, 得

$$\begin{aligned}F'(t)&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\Big]\\&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n.\end{aligned}$$

根据 F 的构造, 有

$$F(x)-F(x_0)=R_n(x).$$

由 Lagrange 微分中值定理, 存在 $\zeta=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$, 使得

$$\begin{aligned}R_n(x)&=F'(\zeta)(x-x_0)\\&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0).\quad\text{(Cauchy 余项)}\end{aligned}$$

取 $G(t)=-(x-t)^{n+1}$, 再由 Cauchy 微分中值定理知, 存在 $\xi=x_0+\eta(x-x_0)$ $(0<\eta<1)$, 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.\quad\text{(Lagrange 余项)}$$

这就得到了 Taylor 展开余项的两种表达式. □

注. (1) 如果 f 的直到 n 阶的导数在 $[a,b]$ 上都是连续的 (因此 F 在 $[a,b]$ 上连续), 则对于 $x=a$ 或 $x=b$, 即区间的端点, 定理的结论仍然成立, 这是由微分中值定理成立的条件所保证的.

(2) 如果 x_0 为区间端点, 例如 f 在 $(a,x_0]$ 上存在直到 $n+1$ 阶的导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍然有如上 Taylor 余项公式.

(3) 在历史上, Taylor 是从插值多项式出发获得他的公式的. 下面我们用另一个方法导出 Lagrange 余项, 这个做法来源于插值多项式的余项公式.

引理 5.7.3. *设 $g(x)$ 在 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导, $x_0\in(a,b)$. 如果*

$$g(x_0)=g'(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)=0,$$

则任给 $c\in(a,b)$, 存在 $\xi=x_0+\theta(c-x_0)$ $(0<\theta<1)$, 使得

$$g(c)=\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}.$$

证明. 不妨设 $c \neq x_0$. 考虑辅助函数

$$h(x) = g(x) - \frac{g(c)}{(c-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}, \quad x \in (a,b).$$

则 $h(c) = 0$, 且 $h(x_0) = h'(x_0) = \cdots = h^{(n)}(x_0) = 0$. 由 $h(c) = h(x_0) = 0$ 以及 Rolle 中值定理知, 存在严格介于 c 和 x_0 之间的点 ξ_1, 使得 $h'(\xi_1) = 0$. 由 $h'(\xi_1) = h'(x_0) = 0$ 又可推出, 存在严格介于 ξ_1 和 x_0 之间的点 ξ_2, 使得 $h''(\xi_2) = 0$. 如此继续, 最后可以找到严格介于 c 和 x_0 之间的点 ξ, 使得 $h^{(n+1)}(\xi) = 0$. 即

$$g^{(n+1)}(\xi) - \frac{g(c)}{(c-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)! = 0,$$

上式整理以后就是欲证结论. □

注. 如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上还是连续的, 则对 $c = a$ 或 b, 引理的结论仍然成立.

现在, 如果 f 在 (a,b) 内 $n+1$ 次可导, $x_0 \in (a,b)$, 则其 Taylor 余项 $R_n(x)$ 满足下列等式 (习题):

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

对 $R_n(x)$ 运用上述引理就得到了 $R_n(x)$ 的 Lagrange 表示. 这种做法的好处就是, 只要 f 在 $[a,b]$ 上还是连续的, 则对 $x = a, b$ 同样有余项公式.

当 f 为 $n+1$ 阶连续可微函数时, 由微积分基本公式得

$$R_n(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

这是 Taylor 展开的积分余项, 它是余项的一个精确积分表示. 此时, 由于 $(x-t)^n$ 不变号, 由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in (x_0, x)$ (或 (x, x_0)), 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这也就是 Lagrange 余项. 同理可得 Cauchy 余项.

例 5.7.1. (*) 积分余项的一个应用.

考虑多项式函数 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$, $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处可展开为

$$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^k x^k + R_n(x),$$

其中 Taylor 展开的余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(2n+1)!}{n!}(1+t)^n (x-t)^n dt,$$

特别地, 取 $x=1$ 就得

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}R_n(1)\\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\Big(2^{2n+1}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^k\Big)\\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(2^{2n+1}-2^{2n}) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(C_{2n+1}^k + C_{2n+1}^{2n+1-k})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^k = 2^{2n}.\end{aligned}$$

这个积分也可以用递推的方法求出. □

如果 f 在 x_0 附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 Taylor 展开或 Taylor 公式. Taylor 公式在 $x_0=0$ 的特殊情形也称 Maclaurin 展开公式. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 则记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

此时称 f 的 Taylor 展开收敛到自身.

例 5.7.2. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ *在 $(-1,1)$ 中任意次可微. 求 $x=0$ 处 f 的 Taylor 展开, 并判断收敛性.*

解. 利用归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n=1,2,\cdots.$$

特别地 $f^{(n)}(0)=n!$, 因此 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

又因为余项

$$R_n(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

故得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad \forall\, x\in(-1,1).$$

例 5.7.3. 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0)=1\ (n\geqslant 1)$, 因此 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

因此有如下估计

$$|R_n(x)|\leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).$$

这说明

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdots,\quad\forall\, x\in(-\infty,+\infty).$$

特别地

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

由此容易说明 e 为无理数: 首先有

$$\begin{aligned}2<e&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\\&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=3.\end{aligned}$$

这说明 e 不是整数. 进一步, 如果 $e=\frac{p}{q}$ 是有理数, 则 $q!\cdot e-q!(1+1+\cdots+\frac{1}{q!})$ 为整数. 另一方面 $(\theta\in(0,1))$,

$$0<q!\cdot e-q!\big(1+1+\cdots+\frac{1}{q!}\big)=\frac{e^{\theta}}{q+1}<1,$$

这就导出了矛盾! □

例 5.7.4. 求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开.

解. 我们在第四章第二节已算出

$$\sin^{(n)}(x)=\sin\big(x+\frac{n}{2}\pi\big).$$

特别地

$$\sin^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\quad\sin^{(2k)}(0)=0.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cos\theta x}{(2n+3)!}\quad(0<\theta<1).$$

因为余项趋于零, 故可写为

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

类似地可得

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

为了更方便地得到更多函数的 Taylor 展开公式, 我们需要下面的结果.

定理 5.7.4 (Taylor 系数的惟一性). *设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \ k = 0, 1, \cdots, n.$$

证明. 根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示, $f(x)$ 又可写为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

如果令

$$b_k = a_k - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

则由已知条件得

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

首先, 在上式中令 $x \to x_0$ 即得 $b_0 = 0$. 其次, 上式两边除以 $x - x_0$, 再令 $x \to x_0$ 可得 $b_1 = 0$. 这个过程可以继续, 当等式两边除以 $(x - x_0)^k$ 并令 $x \to x_0$ 就得到 $b_k = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, 定理证毕. □

由惟一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题, 其证明留作习题.

命题 5.7.5. *设 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则*

(1) $f(-x)$ 的 Taylor 展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$;

(2) $f(x^k)$ 的 Taylor 展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 k 为正整数;

(3) $x^k f(x)$ 的 Taylor 展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中 k 为正整数;

(4) $f'(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$;

(5) $\int_0^x f(t)dt$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$;

(6) 如果 $g(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$, 则 $\lambda f(x)+\mu g(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$ 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

利用上述命题, 再结合前面的例子, 我们有

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \forall\, x\in(-1,1).$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots, \quad \forall\, x\in(-1,1),\\ \frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots, \quad \forall\, x\in(-1,1),\\ \frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+x^4-x^6+\cdots, \quad \forall\, x\in(-1,1),\end{aligned}$$

以及

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots, \qquad (*)$$

其余项

$$R_n(x) = \ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n} = -\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt,$$

如果 $-1\leqslant x<0$, 则

$$|R_n(x)| \leqslant \Big|\int_0^x t^n dt\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

如果 $0\leqslant x<1$, 则

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

因此 $(*)$ 对 $x\in[-1,1)$ 均成立. 将 x 换成 $-x$, 则得

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots, \quad \forall\, x\in(-1,1].$$

特别地, 在上式中取 $x=1$, 得

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

同理,

$$\arctan x = \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$. 当 $x \in [-1, 1]$ 时

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

这说明

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

特别地，在上式中取 $x = 1$, 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \qquad \text{(Leibniz-Gregory)}$$

类似地我们有如下展开式

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

通常, 有很多方法得到一个函数的 Taylor 展开, 但要判断 Taylor 展开是否收敛以及是否收敛到原函数就不是很容易了. 在后面的章节中, 我们将进一步研究象 Taylor 展开这样的无穷求和的收敛和发散性问题.

例 5.7.5. *Taylor 展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.*

定义函数

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

显然, 在 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 中 ϕ 是无限次可微的. 利用归纳法不难证明 (见例 4.2.5), ϕ 在 $x = 0$ 处也无限次可微, 且 $\phi^{(n)}(0) = 0$, $n \geqslant 0$. 因此, ϕ 虽然为非零光滑函数, 它在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开却恒为 0.

注. 这个光滑函数在一些后续课程中非常有用.

习题 5.7

1. 设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则其 Taylor 展开的余项 $R_n(x)$ 满足等式
$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

2. 设 $f(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式, 则对 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处作 Taylor 展开时, 其 Peano 余项 $R_n(x)$ 必恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $n+1$ 次可导, 则 f 在 x_0 处的 Peano 余项 $R_{n+1}(x)$ 可以写为

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(\xi)-f^{(n+1)}(x_0)](x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$.

4. 对公式

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

进行分部积分从而得到 f 的 Taylor 展开余项

$$R_n(x)=f(x)-\big[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\big].$$

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''\geqslant 0$. 用 Taylor 公式证明,

   (1) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall\ x,x_0\in[a,b]$;

   (2) $f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$, $\forall\ x_1<x_2$, 以及 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

6. 将下列函数在 $x_0=0$ 处做 Taylor 展开直到 x^4 项:

$$(a)\ \ x\cot x,\quad (b)\ \ e^{\sin x},\quad (c)\ \ \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}},\quad (d)\ \ \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\quad (e)\ \ (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

7. 将下列函数在 $x_0=0$ 处做 Taylor 展开直到 x^6 项:

$$(a)\ \ e^{2x-x^2},\quad (b)\ \ \ln(\cos x),\quad (c)\ \ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8. 将下列函数在 $x_0=0$ 处做 Taylor 展开:

$$(a)\ \ \sinh^{-1}x,\quad (b)\ \ \int_0^x e^{-t^2}dt,\quad (c)\ \ \int_0^x\frac{\sin t}{t}dt.$$

9. 求函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 展开.

10. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-1,1)$ 中无限次可微, 且

$$|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|,\quad \forall\ x\in(-1,1),\ n=0,1,2,\cdots.$$

证明 $f(x)=g(x)$.

11. 用下面的方法重新证明引理 5.7.3: 即对函数 $F(x)=g(x)$, $G(x)=(x-x_0)^{n+1}$ 反复使用 Cauchy 微分中值定理.

12. 如果 f 在 x_0 附近可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0),$$

则 $f(x)$ 是否在 x_0 处 n 阶可导？

13. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

§5.8 Taylor 公式和微分学的应用

我们来介绍 Taylor 公式以及微分学的几个应用.

(1) 函数极值的判断

我们知道, 如果 x_0 为 f 在定义域内部的极值点和可导点, 则 $f'(x_0)=0$. 进一步, 如果 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点; 如果 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点. 利用 Taylor 公式, 我们可以得到如下的一般结果.

定理 5.8.1. *设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则

(1) n 为偶数时, 如果 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点; 如果 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点;

(2) n 为奇数时, x_0 不是极值点.

证明. 根据已知条件, f 在 x_0 处有 Taylor 展开:

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\\&=f(x_0)+(x-x_0)^n\big[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(1)\big].\end{aligned}$$

因此结论的证明都是显然的. □

(2) Jensen 不等式的余项

下面的结果可以看成 (5.3) 的推广, 它可以给出 Jensen 不等式的误差估计.

定理 5.8.2. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中二阶可导. 当 $x_i\in[a,b]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 时, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得*

$$f\big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\big)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2,\tag{5.11}$$

其中 $\lambda_i \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1.$

证明. 记 $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \in [a,b]$. 如果 $\bar{x}$ 为区间端点, 则当 $\lambda_i \neq 0$ 时, x_i 都等于此端点, 此时 (5.11) 左端为零, 从而 ξ 可任意选取. 下设 $\bar{x} \in (a,b)$. 在 $\bar{x}$ 处, 根据 f 的 Taylor 展开, 有

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i - \bar{x})^2,\quad \xi_i \in (a,b).$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) &= f(\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + f'(\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f''(\xi_i)\lambda_i(x_i - \bar{x})^2\\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f''(\xi_i)\lambda_i(x_i - \bar{x})^2.\end{aligned}$$

记 $m = \min\{f''(\xi_i)\}$, $M = \max\{f''(\xi_i)\}$, 利用上式以及

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(x_i - x_j)^2$$

可得

$$\frac{m}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(x_i - x_j)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leqslant \frac{M}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(x_i - x_j)^2.$$

根据 f'' 的介值性 (Darboux 定理), 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) = \frac{1}{4}f''(\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(x_i - x_j)^2.$$

定理得证. □

(3) 计算某些极限

在某些情况下, Taylor 展开可以用来计算极限, 我们仅举例说明.

例 5.8.1. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\Big[x - x^2\ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\Big].$$

解. 当 $x \to \infty$ 时, $x^{-1} \to 0$, 因此

$$\ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\quad (x \to \infty),$$

这说明

$$x - x^2\ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}\ (x \to \infty).$$

例 5.8.2. 设 f 在 0 附近二阶可导, 且 $|f''| \leqslant M$, $f(0)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n^2}\big) = \frac{1}{2}f'(0).$$

证明. 由 Taylor 公式,

$$f\big(\frac{k}{n^2}\big) = f(0) + f'(0)\frac{k}{n^2} + R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}| = \frac{1}{2}|f''(\xi_{k,n})|\big(\frac{k}{n^2}\big)^2 \leqslant \frac{1}{2}M\frac{k^2}{n^4},$$

因此

$$\big|\sum_{k=1}^{n} R_{k,n}\big| \leqslant \frac{1}{2}Mn^{-4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \to 0 \ \ (n\to\infty),$$

这说明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n^2}\big) &= f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} R_{k,n} \\ &= f'(0)\frac{n+1}{2n} + o(1) \ \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

由此就得到了要证明的极限等式. □

(4) 近似计算

如果对余项有好的估计, 则 Taylor 展开也可用于近似计算, 这儿我们只考虑几个简单的例子, 在第九章第四节中我们将提供更进一步的计算方法.

例 5.8.3. 求 e 的近似值, 要求误差小于 10^{-4}.

解. 我们利用等式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \ \ (0<\theta<1).$$

当 $n=7$ 时,

$$0 < \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{8!} < 10^{-4},$$

这说明

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.71825.$$

例 5.8.4. 求 π 的近似值.

解. 利用恒等式

$$\arctan u + \arctan v = \arctan\big(\frac{u+v}{1-uv}\big)$$

可以得到

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$
$$=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\cdots$$

然后利用 Taylor 展开

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

就可以将 π 很快地算到很精确的值, 详细的讨论见第九章第四节.

注. 历史上, 公元 4 到 5 世纪时刘辉和祖冲之分别将 π 的值精确地计算到了小数点后第 4 位和第 7 位, 领先欧洲一千多年. 祖冲之用的是对圆进行逼近的方法, 那时的计算是非常困难的. 掌握了 Taylor 公式以后, 欧洲人大大地提高了 π 的计算精度.

(5) Stirling 公式

根据第二章例 2.2.6 可以知道 $n!\sim(\frac{n}{e})^n$. 令 $a_n=n!(e/n)^n$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}=e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}e^{1-(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

利用

$$\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)=\ln\big(1+\frac{1}{2n+1}\big)-\ln\big(1-\frac{1}{2n+1}\big)$$

以及 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开可得

$$\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)=2\Big[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\Big]. \tag{5.12}$$

于是

$$0<\big(n+\frac{1}{2}\big)\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)-1<\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\Big]$$
$$=\frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{12}\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\big).$$

这说明 $\{n^{-\frac{1}{2}}a_n\}$ 严格单调递减, $\{n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}}a_n\}$ 严格单调递增, 它们收敛于同一极限, 记为 C. 则

$$n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}}a_n<C<n^{-\frac{1}{2}}a_n,\quad \text{即}\quad a_n=C\sqrt{n}e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

现在 $n!$ 可写为

$$n!=C\sqrt{n}\big(\frac{n}{e}\big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

为了决定 C 的值, 首先利用上式可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}\frac{[2^n n!]^2}{(2n)!}=\frac{C}{2\sqrt{2}}. \tag{5.13}$$

其次, 利用递推可算出积分

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}dx = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2},$$

由

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}dx < \int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}dx < \int_0^1 (1-x^2)^{n}dx$$

以及例 5.7.1 (或直接用递推计算) 可得

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} < \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

上式各项都乘以 $\sqrt{n}$, 再令 $n \to \infty$ 得

$$\frac{C}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{C}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{C}{2\sqrt{2}},$$

解出 $C = \sqrt{2\pi}$. 最后我们得到如下 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{5.14}$$

注. (1) 在 (5.12) 中取 $n = 1$ 可得 $\ln 2$ 的一个收敛较快的展开式, 它可用于近似计算.

(2) (5.13) 式就是所谓的 Wallis 公式, 可参看第六章第三节的相关例子.

(6) Newton 方法

现在我们考虑这样的问题: 给定函数 $f(x)$, 怎样解方程

$$f(x) = 0$$

呢? 当 $f(x)$ 是二次函数的时候, 我们可以判断它有无解, 并且可以将解显式地写出来. 对于一般的函数, 我们往往只能近似地求解. 下面我们作这样的假设:

$(*)$ f 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$; f' 和 f'' 在 (a,b) 中都不变号.

在这个假设之下, 根据介值定理和微分中值定理, $f(x) = 0$ 在 (a,b) 中有且仅有一个解 ξ. 为了讨论的简单起见, 我们进一步假设 f' 和 f'' 有正的下界. 此时 f 为严格单调递增的凸函数, 因而 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

考察 f 的图像, 如果从 $(b, f(b))$ 作函数 $y = f(x)$ 的切线, 其方程为

$$y - f(b) = f'(b)(x - a),$$

此切线和 x 轴的交点的横坐标为

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

根据 f 的凸性可知, x_1 比 b 要更靠近 ξ.

再从 $(x_1, f(x_1))$ 出发作 $y = f(x)$ 的切线, 交 x 轴于 $(x_2, 0)$, 其中

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

x_2 要比 x_1 更靠近 ξ.

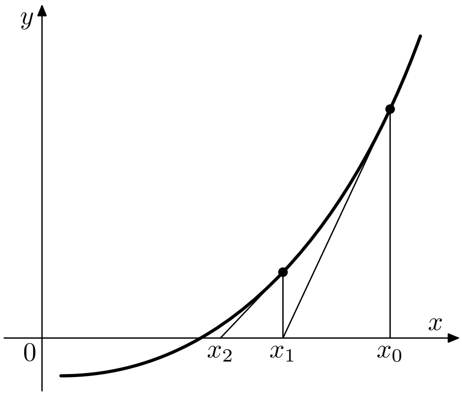


图 5.12 Newton 迭代

这样一直做下去就得到一列点 $\{x_n\}$, 它们可以递归地定义为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.15}$$

其中 $x_0 = b$. $\{x_n\}$ 为单调递减数列, 且 $\xi < x_n < b$, $\forall\ n \geqslant 1$. 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 记为 ξ'. 于是 $\xi \leqslant \xi' < b$. 在 (5.15) 中令 $n \to \infty$ 得

$$\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')},$$

即 $f(\xi') = 0$, 这说明 $\xi' = \xi$. 因此, 我们把 x_n 视为 $f(x) = 0$ 的近似解是合理的, 这种求近似解的方法称为 Newton 法或切线法, (5.15) 式称为 Newton 迭代公式.

下面我们来估计近似解 x_n 和 ξ 的之间的误差. 根据 Taylor 公式, 存在点 $c \in (\xi, x_n)$, 使得

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c)(\xi - x_n)^2,$$

利用 (5.15) 式, 上式可改写为

$$x_{n+1} - \xi = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(x_n - \xi)^2,$$

因此有

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - \xi|^2, \tag{5.16}$$

其中

$$M=\sup_{x\in(a,b)}|f''(x)|,\quad m=\inf_{x\in(a,b)}|f'(x)|.$$

从 (5.16) 可以看出, 数列 $\{x_n\}$ 趋于极限 ξ 的速度是很快的.

需要注意的是, 在我们的假设条件下, 一般来说不能从 $(a,f(a))$ 开始作切线求交点来近似求解 $f(x)=0$. 不难发现, 当 f' 和 f'' 同号时, 应从 $(b,f(b))$ 出发作切线; 当 f' 和 f'' 反号时则应从 $(a,f(a))$ 出发作切线.

例 5.8.5. 求黄金分割比 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值.

显然, 主要是要计算 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 首先利用 Taylor 展开找一个逼近程度比较好的近似解:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{2}&=\big(1+\frac{1}{4}\big)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\frac{1}{2}\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{4^3}+\cdots\\&\approx 1.118...\end{aligned}$$

因此, 我们取 $x_0=1.118$, 因为

$$5-(2\times 1.118)^2=3.04\times 10^{-4},$$

初始误差约为

$$0<\frac{\sqrt{5}}{2}-x_0=\frac{3.04}{2(\sqrt{5}+2x_0)}\times 10^{-4}<0.34\times 10^{-4}.$$

利用 Newton 迭代, 将 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 视为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{5}$ 的根, 则迭代方程为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n+\frac{1}{2}x_n\big(1-\frac{4}{5}x_n^2\big),$$

误差估计为

$$0<\frac{\sqrt{5}}{2}-x_{n+1}=\frac{2}{5}\big(\sqrt{5}+x_n\big)\big(\frac{\sqrt{5}}{2}-x_n\big)^2.$$

以 x_0 代入, 得 $x_1=1.11803398720$, 误差为

$$0<\frac{\sqrt{5}}{2}-x_1=\frac{2}{5}\big(\sqrt{5}+x_0\big)\big(\frac{\sqrt{5}}{2}-x_0\big)^2<1.56\times 10^{-9},$$

因此

$$1.11803398720<\frac{\sqrt{5}}{2}<1.11803398876,$$

这说明 $\alpha\approx x_1-0.5\approx 0.61803398$ 在小数点后面的 8 位数字都是准确的.

当然, 我们也可以从函数 $f(x)=x^2-\dfrac{5}{4}$ 出发作 Newton 迭代. 这时迭代方程为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{x_n}{2}+\frac{5}{8}\frac{1}{x_n},$$

相应的误差估计为

$$0<x_{n+1}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2x_n}\big(x_n-\frac{\sqrt{5}}{2}\big)^2.$$

如果取 $x_0=1.118034$, 则

$$0<x_0-\frac{\sqrt{5}}{2}<1.28\times 10^{-8},$$

代入 x_0 得 $x_1=1.11803398874989490480\ldots$, 且

$$0<x_1-\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2\times 1.118034}1.28^2\times 10^{-16}<0.733\times 10^{-16},$$

因此

$$0.61803398874989483150<\alpha<0.61803398874989490481,$$

即 $\alpha\approx 0.618033988749894$, 小数点后 15 位数字都是准确值.

注. 请读者回顾一下第二章第二节的习题, 看看那里的一些数列极限和本节 Newton 迭代的关系.

习题 5.8

1. 计算下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}x\big[(1+\frac{1}{x})^x-e\big],\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2},$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\Big\{\frac{e}{2}x+x^2\big[(1+\frac{1}{x})^x-e\big]\Big\},\quad (4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^4}.$$

2. 计算下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\big[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}\big],\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4},$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}x\big[(1+\frac{1}{x})^x-ex\ln(1+\frac{1}{x})\big],\qquad (4)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\big(\frac{1}{x}-\cot x\big).$$

3. 利用 Taylor 公式计算 $\ln 1.2$ 的近似值, 要求精确到小数点后第三位.

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, 其 Taylor 公式为 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n$, 其中 $0<\theta<1$. 证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一个开邻域内连续可微, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}.$$

(提示: 先用微分中值定理.)

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$. (提示: 对 e 用 Taylor 展开.)

7. 用 Newton 方法求 $\sqrt{2}$ 的近似值, 要求精确到小数点后 6 位数.

8. $(*)$ 设 $a_1\in\mathbb{R}$, $a_{n+1}=\arctan a_n$ $(n\geqslant 1)$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$.

9. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 中三阶可导, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 均存在且有限, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$. (提示: 先用 L'Hôpital 法则考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$, 再考虑 $f(x\pm 1)$ 的 Taylor 展开.)

10. $(*)$ 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty,\quad M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|<\infty.$$

证明 $M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|<\infty$, 且 $M_1^2\leqslant 2M_0\cdot M_2$.
(提示: 考虑 $f(x\pm h)$ 的 Taylor 展开.)