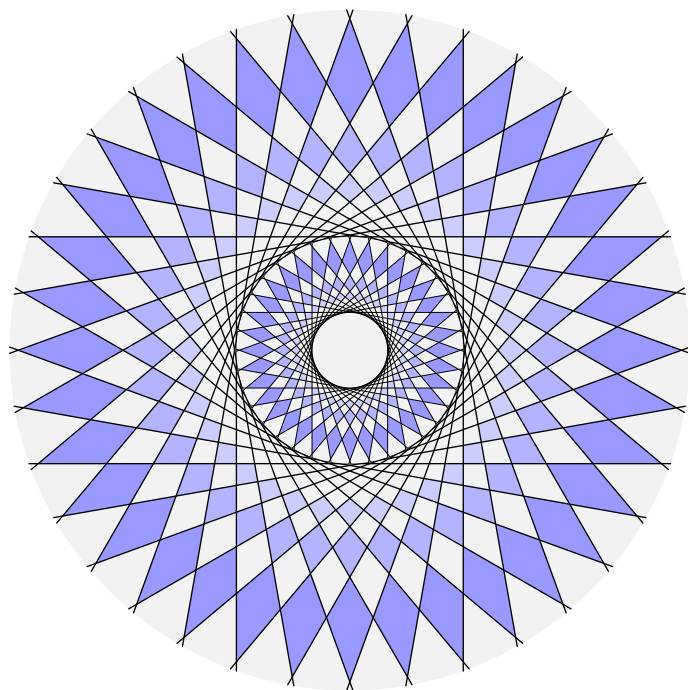


数学分析讲义

梅加强 编著

© 2006-2015



前言

数学分析的核心内容是微积分。微积分的发展大体上经过了三个阶段。牛顿 (Newton) 和莱布尼兹 (Leibniz) 在继承公元 15–16 世纪以来许多杰出数学家的成果的基础上, 将微积分发展成了一门独立的学问, 微积分被用来解决天文、力学、工程等方面的大量实际问题。19 世纪初, 由于科学技术进步的推动, 为微积分建立牢固基础的要求十分迫切。经过近二百年的努力, 到 19 世纪五六十年代, 柯西 (Cauchy), 黎曼 (Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 等建立了严格的极限理论, 并用极限的语言严格地证明了微积分的所有定义和定理, 为微积分的普及创立了更加有利的条件。到 20 世纪初, 格拉斯曼 (Grassmann), 庞加莱 (Poincaré) 和嘉当 (Cartan) 等人又发展了外微分形式的语言, 并利用外微分形式的语言把微分和积分这一对矛盾统一在斯托克斯 (Stokes) 积分公式中, 这就使得牛顿和莱布尼兹的微积分基本公式达到了一个统一的新高度, 以后的发展就属于近代数学的范畴了。

本书在内容的编排上试图展现微积分发展各阶段的重要成果, 并适当地采用现代数学的思想方法和观点处理经典的分析问题。下面对本书主要内容作一简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程, 我们只着重于介绍和传统教材有较大差别的地方。

在第一章中我们介绍了集合与映射的一些基本概念。这一章虽然是复习性质的, 但我们还是引入了确界和可数这两个重要概念。我们把确界原理作为一元分析的基础, 在第二章关于数列极限的论述中这一点显得特别突出。实数的构造以及实数系的基本性质对于一元分析来说是非常重要的, 但为了减轻负担, 我们将实数构造的理论放在第一章附录中了。

第三章研究连续函数。和传统教材不同的是, 我们在这里就已经介绍了连续函数的积分了。这样, 在第四章中, 我们就很快得到了微积分的基本定理 —Newton-Leibniz 公式, 从而不定积分的内容就显得较为自然。微分中值定理和 Taylor 展开是一元微分学发展的一个高峰, 我们在第五章中介绍这部分内容。

第六章和第七章是一元函数积分的内容。Riemann 积分是一元分析的一个难点。由于前面已经有连续函数的积分, Riemann 积分的理解难度有所降低。为了透彻地理解 Riemann 积分, 我们还引入了零测集的概念, 利用它刻画了可积函数。

第八、九和第十章是关于无穷级数理论的, 这是分析学的经典内容。其中, 关于数项级数, 我们突出了 Kummer 判别法的作用, 由此简化了众多收敛发散判别法的叙述。我们在这几章的最后一节中讨论了一些进一步的内容, 如级数用于近似计算, Euler-Maclaurin 公式以及 Stirling 公式的渐近展开, Fourier 级数的平均收敛和一致收敛性, 以及对于等分布问题和等周问题的应用等。对于 Fourier 级数中

重要的 Parseval 等式, 我们所用的证明方法和传统的教材也有所不同。

第十一章是承前继后的一章。我们将实数的基本性质提炼出来, 引入了内积空间和度量空间的概念, 并通过完备性, 紧致性和连通性等刻画了连续映射的基本性质。与度量空间有关的内容十分丰富, 我们在这里只挑选了最必需的若干概念和定理, 一方面将一元分析中所获得的概念做了一些提升, 另一方面为多元分析准备扎实的基础。当然, 在课时有限的情况下也可将所有的论述局限于欧氏空间。

第十二章是多元函数的微分学。这一章对于线性代数的要求较高, 读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因, 是因为微分学的基本手法无非是作线性化, 线性代数的语言很自然地要用上。比如, 在这一章里, 无论是拟微分中值定理, 还是逆映射定理, 隐映射定理, 甚至是 Lagrange 乘数法, 它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的, 其中 Jacobian 矩阵起了突出的作用。

第十三章是多元函数的 Riemann 积分。和一元函数一样, 我们也是用零测集刻画可积函数乃至可求面积(体积)集的。除了强调计算以外, 我们还给出了多重积分变量代换公式的完整证明, 这个证明通常是被省略的。我们的证明和其它一些教材上的也不相同。

第十四章是曲线曲面上的积分。我们实际上统一处理了欧氏空间中正则子流形上的积分。关于 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式, 我们没有采用分割积分区域为较简单区域的传统办法, 而宁愿使用区域变换的观点讨论问题。这一章的附录中介绍了重要的 Riemann-Stieltjes 积分, 它们是在考虑可求长曲线时自然出现的。作为应用, 通过考虑 Riemann-Stieltjes 积分我们还得到了 Riemann 积分的中值公式, 分部积分公式和变量替换公式的最一般情形。

第十五章部分地反映了微积分发展的第三阶段的成果, 我们引入了微分形式, 外微分运算, 并给出了整体曲面的定义, 讨论了曲面的定向, 最后统一了 Green 公式, Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式。

第十六章讨论含参变量的积分。其中, 关于 Gamma 函数的 Stirling 公式的证明, 我们提供了两个办法, 它们和传统教材上的处理方法也不太一样。最后, 我们还讨论了 Fourier 变换的乘积公式, 反演公式和 Plancherel 公式, 并讨论了 Fourier 分析的几个重要应用。

本书作为讲义的形式曾在南京大学数学系多次试用, 在试用过程中, 程健、胡泽春、尤建功和张高飞等诸位老师都贡献了宝贵的意见和建议; 扬州大学徐海峰博士也仔细校订了本书前五章初稿, 作者在此一并致谢。

总体而言, 本书的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论和应用, 在定理的证明方面我们着重自然和简洁。限于作者的水平, 如有处理得不恰当的地方还请专家予以批评指正。

目 录

前言	i
第十二章 多元函数的微分	1
12.1 方向导数和微分	1
12.2 切线和切面	7
12.3 复合函数和链式法则	11
12.4 Taylor 公式及其应用	17
12.5 逆映射定理和隐映射定理	24
12.6 Lagrange 乘数法	32
12.7 多元函数微分的补充材料	37
12.7.1 叉乘运算	37
12.7.2 二次型与极值	38
12.7.3 函数的相关性和独立性	40
第十三章 多元函数的积分	43
13.1 二重 Riemann 积分	43
13.2 多重积分及其基本性质	50
13.3 重积分的计算	54
13.4 重积分的变量替换	62
13.4.1 仿射变换	62
13.4.2 一般的变量替换	68
13.4.3 极坐标变换	72
13.5 重积分的应用和推广	78
第十四章 曲线积分与曲面积分	87
14.1 第一型曲线积分	87
14.2 第二型曲线积分	93
14.3 第一型曲面积分	97
14.4 第二型曲面积分	104
14.5 几类积分之间的联系	108
14.5.1 余面积公式	109
14.5.2 Green 公式	111
14.5.3 Gauss 公式	117

14.5.4	Stokes 公式	121
14.6	附录: Riemann-Stieltjes 积分	126
14.6.1	有界变差函数	126
14.6.2	Riemann-Stieltjes 积分	129
第十五章	微分形式的积分	141
15.1	欧氏空间中的微分形式	141
15.2	微分形式之间的运算	148
15.3	曲面回顾	154
15.4	Stokes 公式	162
第十六章	含参变量的积分	169
16.1	含参变量的积分	169
16.2	含参变量的广义积分	174
16.2.1	一致收敛及其判别法	174
16.2.2	一致收敛积分的性质	176
16.3	特殊函数	184
16.3.1	Beta 函数的基本性质	184
16.3.2	Gamma 函数的基本性质	185
16.3.3	进一步的性质	186
16.3.4	Stirling 公式	191
16.4	Fourier 变换回顾	194

第十二章 多元函数的微分

在这一章中,我们将研究多个变量的函数或映射的基本性质. 在前一章中我们已经研究过连续性了,因此我们将研究多变量函数或映射的微分性质. 微分学的基本方法就是对函数或向量值的函数作线性化,用线性映射去作逼近. 本章大部分的内容和一元函数相应的内容平行,但有一些地方也有本质不同,我们会在这些地方着重强调说明.

§12.1 方向导数和微分

在科学和技术问题中,某个数量的值往往依赖于多个因素. 在数学上我们用多元函数来表示这种数量. 为了研究它们,一个初步的方法就是暂时只关注某一个因素的变化. 从数学的角度来看,就是先研究函数沿某个特定的方向如何变化,即将多元函数当成一元函数来研究.

在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中,所谓方向就是指某个单位向量. 设 u 为非零向量, u 的方向是指单位向量 $u/\|u\|$. 两个非零向量 u, v 同向是指 $u/\|u\| = v/\|v\|$.

定义 12.1.1 (方向导数). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为 D 中定义的函数. 对于 $x^0 \in D$, 以及 \mathbb{R}^n 中单位向量 u , 如果极限 $\lim_{t \rightarrow 0} [f(x^0 + tu) - f(x^0)]/t$ 存在, 则称 f 在 x^0 处沿方向 u 可导, 此极限称为 f 沿 u 的方向导数.

f 沿方向 u 的方向导数记为 $\frac{\partial f}{\partial u}$. 在 x^0 处, 此方向导数就是一元函数 $\varphi(t) = f(x^0 + tu)$ 在 $t=0$ 处的导数, 它是函数 f 沿方向 u 的变化率. 特别地, 当 $u = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (第 i 个位置为 1 的单位向量) 时, 又将 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 记为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, 称为 f 的第 i 个偏导数.

偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 又记为 f_{x_i} . 如果 $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 仍然可导, 则记 $f_{y_i x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} (\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $f_{x_i y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial f}{\partial y_i})$, 称为 2 阶偏导数. 类似地可以定义高阶偏导数. 我们也使用形如这样的记号:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right), \quad \dots$$

根据偏导数的定义, 在对某个变量求导时, 可暂时将其余变量视为常数. 因此, 计算偏导数可以利用一元函数的各种求导方法.

例 12.1.1. 求 $f(x, y) = xy$ 的 1 阶, 2 阶偏导数.

解. $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$, $f_y = x$, $f_{yx} = 1$, $f_{xy} = 1$, $f_{xx} = f_{yy} = 0$.

例 12.1.2. 求 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$ 在 $(x_0, y_0) = (1, 2)$ 处的偏导数.

解. 直接计算表明

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x.$$

因此有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{2}{5}\sqrt{5} + 1.$$

例 12.1.3. 设 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, 求函数

$$f(x, y, z) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

的偏导数.

解. 记 $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - x_0}{r} = -\frac{x - x_0}{r^3}.$$

同理,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y - y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{r^3}.$$

我们知道, 导数是函数的变化率. 对于一元函数来说, 如果导数恒为零, 则该函数无变化 (常值函数). 对于多元函数来说, 我们有

命题 12.1.1. 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的偏导数都恒为零, 则 f 为常值函数.

证明. 以二元函数为例. 设 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 我们有

$$f(x, y) - f(0, 0) = [f(x, y) - f(0, y)] + [f(0, y) - f(0, 0)].$$

对上式右边括号中的项分别关于变量 x 和 y 应用一元函数的微分中值定理, 可得

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, \zeta)(y - 0) = 0,$$

即 $f(x, y) \equiv f(0, 0)$. □

需要注意的是, 一般来说方向导数只反映函数沿特定方向的变化性质, 例如方向导数的存在甚至不能保证多元函数的连续性, 这和一元函数不同.

例 12.1.4. 研究如下函数的方向导数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

因为 f 在两个坐标轴上恒为零, 因此 f 在 $(0, 0)$ 处的偏导数为零. 取单位向量 $u = (u_1, u_2)$, 当 $u_2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2},$$

这说明 f 在 $(0, 0)$ 处方向导数都存在. 但 f 在 $(0, 0)$ 处不连续 (习题). \square

从上例可以看出, 用方向导数来研究多元函数有一定的局限性. 为了克服这种局限性, 我们引进一个整体概念.

定义 12.1.2 (微分). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为多元函数, $x^0 \in D$. 如果存在线性映射 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得在 x^0 附近成立

$$f(x) - f(x^0) = L(x - x^0) + o(\|x - x^0\|), \quad (x \rightarrow x^0)$$

则称 f 在 x^0 处可微, L 称为 f 在 x^0 处的微分, 也记为 $df(x^0)$.

微分也称为函数 f 的线性化. 微分学的基本思想就是对各种研究对象做线性化 (以直代曲). 显然, 当 f 在 x^0 处可微时, f 也在 x^0 处连续. 进一步, 我们有

命题 12.1.2 (可微必可导). 设 f 在 x^0 处可微, 则 f 在 x^0 处的方向导数都存在, 并且有

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^0) = df(x^0)(u). \quad (12.1)$$

证明. 设 u 为单位向量. 根据题设, 有

$$f(x^0 + tu) - f(x^0) = L(tu) + o(\|tu\|) = tL(u) + o(|t|), \quad (t \rightarrow 0).$$

这说明 $\lim_{t \rightarrow 0} [f(x^0 + tu) - f(x^0)]/t = L(u)$, 即 (12.1) 式成立. \square

特别地, 当 f 在 x^0 处可微时, 偏导数 $f_{x_i}(x^0)$ 都存在. 记

$$\nabla f(x^0) = (f_{x_1}(x^0), \dots, f_{x_n}(x^0)), \quad (12.2)$$

称为 f 在 x^0 处的**梯度**. 设 $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i = (u_1, \dots, u_n)$ 为单位向量, 由 (12.1) 式可得

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^0) = L\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i L(e_i) = \sum_{i=1}^n u_i f_{x_i}(x^0).$$

利用 \mathbb{R}^n 中的标准内积, 上式可写为

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^0) = \nabla f(x^0) \cdot u. \quad (12.3)$$

更一般地, 我们有

命题 12.1.3. 设 $\sigma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为向量值函数, 写成分量的形式为

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (a, b).$$

设 $\sigma(t)$ 的每一个分量都在 t^0 处可导, 且多元函数 f 在 $x^0 = \sigma(t^0)$ 处可微, 则复合函数 $f \circ \sigma$ 在 t^0 处可导, 且

$$(f \circ \sigma)'(t^0) = \nabla f(x^0) \cdot \sigma'(t^0), \quad (12.4)$$

其中 $\sigma'(t^0) = (x_1'(t^0), \dots, x_n'(t^0))$.

证明. 由题设可知, 存在常数 C , 使得在 t^0 附近成立 $\|\sigma(t) - \sigma(t^0)\| \leq C|t - t^0|$. 由 f 在 $x^0 = \sigma(t^0)$ 处可微可知

$$\begin{aligned} f \circ \sigma(t) - f \circ \sigma(t^0) &= \nabla f(x^0) \cdot [\sigma(t) - \sigma(t^0)] + o(\|\sigma(t) - \sigma(t^0)\|) \\ &= \nabla f(x^0) \cdot [\sigma(t) - \sigma(t^0)] + o(|t - t^0|). \end{aligned}$$

上式两边除以 $t - t^0$ 并令 $t \rightarrow t^0$ 即得 (12.4) 式. □

作为应用, 我们可得到多元函数的微分中值定理.

定理 12.1.4 (微分中值定理). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的凸域, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 中处处可微. 则任给 $x, y \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$f(x) - f(y) = \nabla f(\xi) \cdot (x - y),$$

其中 $\xi = \theta x + (1 - \theta)y$, $\theta \in (0, 1)$.

证明. 令 $\sigma(t) = tx + (1 - t)y$, 由 D 为凸域可知当 $t \in [0, 1]$ 时 $\sigma(t) \in D$. 对一元函数 $\varphi(t) = f \circ \sigma(t)$ 用微分中值定理可知存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. 由 (12.4) 式可得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \nabla f(\xi) \cdot \sigma'(\theta) = \nabla f(\xi) \cdot (x - y),$$

其中 $\xi = \sigma(\theta) = \theta x + (1 - \theta)y$. 由 $f(x) = \varphi(1)$, $f(y) = \varphi(0)$ 可知欲证结论成立. □

从以上讨论中可以看到微分这个概念的优越性. 下面的结果给出了多元函数可微的充分条件.

命题 12.1.5. 设多元函数 f 在 x^0 附近存在偏导数. 如果每一个偏导数都在 x^0 处连续, 则 f 在 x^0 处可微.

证明. 以二元函数为例, 记 $x^0 = (x_0, y_0)$. 运用命题 12.1.1 中的证明方法, 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, \zeta)(y - y_0) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right] (y - y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), \end{aligned}$$

这说明 f 在 (x_0, y_0) 处可微. \square

偏导数的连续性还可导出求导次序的可交换性.

定理 12.1.6 (求导次序的可交换性). 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为二元函数, $(x_0, y_0) \in D$. 如果二阶偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在 (x_0, y_0) 处连续, 则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

证明. 对于充分小的 $k \neq 0, h \neq 0$ 分别考虑函数

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= f(x_0 + h, y) - f(x_0, y), \\ \psi(x) &= f(x, y_0 + k) - f(x, y_0). \end{aligned}$$

由微分中值定理, 存在 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) &= \varphi_y(y_0 + \theta_1 k)k \\ &= [f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)]k \\ &= f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k)kh. \end{aligned}$$

同理, 存在 $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$, 使得

$$\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)hk.$$

易见,

$$\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = \psi(x_0 + h) - \psi(x_0),$$

这说明

$$f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_1 k) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

令 $k, h \rightarrow 0$, 由 f_{xy}, f_{yx} 在 (x_0, y_0) 处连续即得欲证等式. \square

上述结果对于多元函数当然也成立. 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为多元函数. 如果 f 的直到 k 阶的各种偏导数都存在且连续, 则称 f 为 C^k 函数, 记为 $f \in C^k(D)$. 当 $k \geq 2$ 时, C^k 函数的偏导数与求导次序无关. 如果对任意 $k \geq 1$, f 均为 C^k 函数, 则称 f 为无限次可导函数或光滑函数, 记为 $f \in C^\infty(D)$.

例 12.1.5. 求导次序不可交换的例子.

考虑函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

计算表明 $f_{xy}(0, 0) = 1$, $f_{yx}(0, 0) = -1$. 这说明上述定理中关于偏导数连续性的假设不可全去掉 (但可减弱, 参见本节习题).

习题 12.1

1. 设 f 为多元函数, 证明: 如果 u, v 为单位向量, 且 $u = -v$, 则 $\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial v}$.

2. 计算偏导数:

(1) $f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $f'_x(3, 4), f'_y(0, 1)$,

(2) $f(x, y, z) = (\cos x / \sin y)e^z$, 求 $(\pi, \frac{\pi}{2}, \ln 3)$ 处的一阶偏导数,

(3) $f(x, y) = \sin(x^2y)$, 求 $(1, 1)$ 处的一阶偏导数.

3. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $xy + \frac{x}{y}$; (2) $\tan \frac{x^2}{y}$; (3) $\cos(x^2 + y^2)$;

(4) $\ln(x + \frac{y}{x^2})$; (5) $x^2y^{3/2}$; (6) $e^{xy+yz+zx}$;

(7) $\arctan \frac{y}{x}$; (8) x^y ; (9) $\ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

4. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) x^2y^3 ; (2) $\ln(xy)$; (3) $\arcsin(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$;

(4) e^{x^y} ; (5) $\tan(\arctan x + \arctan y)$; (6) e^{x^2+xyz} .

5. 设多元函数 f 的偏导数都存在且有界, 证明 f 连续.

6. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中区域. 如果多元函数 f 在 D 中的各个偏导数都恒等于零, 证明 f 为常值函数.

7. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为多元函数. 如果对任意 $t \geq 0$ 均有 $f(tx) = t^m f(x)$, 则称 f 为 m 次齐次函数. 证明: 可微函数 f 为 m 次齐次函数当且仅当 $\sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x) = mf(x)$.

8. 设 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, 证明 $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

9. 记 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 称为平面 \mathbb{R}^2 上的 Laplace 算子, 证明上题中的 u, v 满足方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$.

10. 记 $r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$, 证明 $\Delta r^{-1} = 0$, 其中, Δ 为 \mathbb{R}^3 中的 Laplace 算子, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.
11. (*) 设 $f(x, y)$ 分别关于变量 x, y 为连续函数, 证明, 如果 f 关于其中一个变量是单调函数 (比如偏导数存在且非负), 则 f 为二元连续函数.
12. (*) 证明, 在定理 12.1.6 中, 只要两个混合导数 f_{xy} 和 f_{yx} 之一在 (x_0, y_0) 处连续, 结论同样成立.

§12.2 切线和切面

设 $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续映射, 我们称 σ 为 \mathbb{R}^n 中的连续参数曲线. 记

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

t 称为参数. 如果 $x_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) 在 $t = t_0$ 处均可导, 则称 σ 在 t_0 处可导, 记

$$\sigma'(t_0) = \frac{d\sigma}{dt}(t_0) = \left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{t=t_0} = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)),$$

称 $\sigma'(t_0)$ 为 σ 在 t_0 处的切向量.

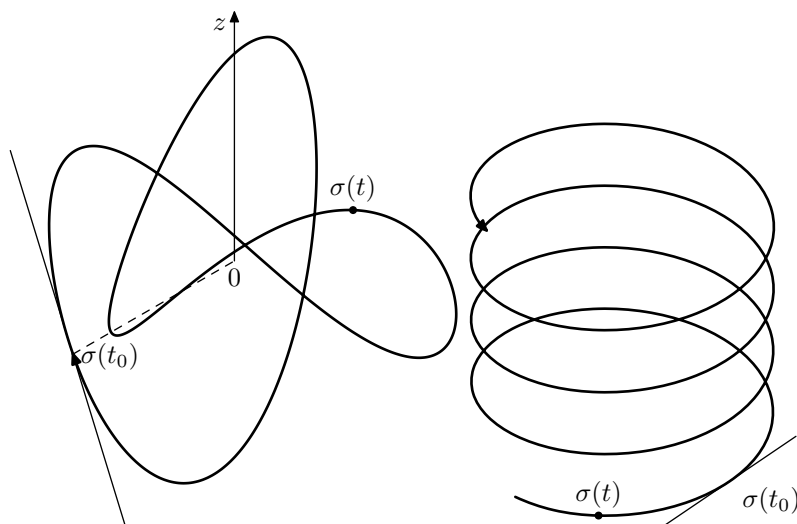


图 12.1 切线

设 $\sigma'(t_0) \neq 0$. 当 $t' \neq t_0$ 时, 记

$$\gamma_{t'}(t) = \sigma(t_0) + (t - t_0) \frac{\sigma(t') - \sigma(t_0)}{t' - t_0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\gamma_{t'}$ 是经过 $\sigma(t'), \sigma(t_0)$ 的直线 (称为 σ 的割线). 当 $t' \rightarrow t_0$ 时, 割线的极限记为 γ_{t_0} , 则有

$$\gamma_{t_0}(t) = \sigma(t_0) + (t - t_0)\sigma'(t_0).$$

γ_{t_0} 称为 σ 在 t_0 处的切线. 在不引起混淆时, 也说 γ_{t_0} 是 $\sigma(t_0)$ 处的切线.

切线可视为参数曲线的线性化, 它也有相应的物理解释: 设质点在空间中运动, 其位置随时间 t 变化, 运动轨迹为曲线 σ . $\sigma'(t_0)$ 表示质点在 t_0 时刻的速度. 在 t_0 附近的非常短的时间段内, 可以近似地认为质点做匀速直线运动, 运动轨迹为切线.

设 $\sigma, \tilde{\sigma}$ 均为参数曲线. 如果 $\sigma(t_0) = \tilde{\sigma}(t_0)$, 且在 t_0 附近成立

$$\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t) = o(|t - t_0|), \quad (t \rightarrow t_0)$$

则称 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 在 t_0 处相切. 容易看出, σ 和其切线 γ_{t_0} 在 t_0 处相切.

切线方程也可写为非参数的形式:

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \frac{x_2 - x_2(t_0)}{x'_2(t_0)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x'_n(t_0)},$$

其中我们规定, 当上式中某个分母为零时分子也为零. 经过 $\sigma(t_0)$ 且与切线正交的超平面称为法面 ($n = 2$ 时称为法线), 其方程为

$$(x - \sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = 0.$$

例 12.2.1. 设 f 为一元可微函数, 令

$$\sigma(t) = (t, f(t)),$$

则 $\sigma'(t_0) = (1, f'(t_0))$, σ 在 t_0 处切线方程为

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - f(t_0)}{f'(t_0)},$$

即 $y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0)$, 这也就是一元函数图像的切线. \square

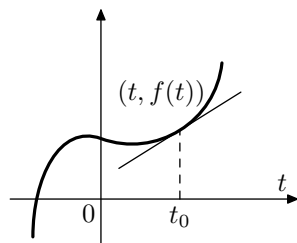


图 12.2 函数图像的切线

例 12.2.2. 设 $a > 0$, 求螺旋线 $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$ 的切线和法面方程.

解. 在 $t = t_0$ 处, $\sigma'(t_0) = (-a \sin t_0, a \cos t_0, 1)$, 故切线方程为

$$\frac{x - a \cos t_0}{-a \sin t_0} = \frac{y - a \sin t_0}{a \cos t_0} = \frac{z - t_0}{1},$$

法面方程化简后为 $-xa \sin t_0 + ya \cos t_0 + z - t_0 = 0$. \square

设 D 为 \mathbb{R}^2 中开集, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为连续映射. 我们称 φ 为 \mathbb{R}^3 中的连续参数曲面. 记

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

假定 φ 的三个分量都在 (u_0, v_0) 处可微, 则在 (u_0, v_0) 附近, 成立

$$\varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + (u - u_0)\varphi_u(u_0, v_0) + (v - v_0)\varphi_v(u_0, v_0) + o(\|(u - u_0, v - v_0)\|),$$

其中 $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$. $\varphi_u(u_0, v_0)$ 是曲线 $\varphi(u, v_0)$ (u -曲线) 在 $u = u_0$ 处的切向量, $\varphi_v(u_0, v_0)$ 是曲线 $\varphi(u_0, v)$ (v -曲线) 在 $v = v_0$ 处的切向量. 记

$$\varphi_*(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + (u - u_0)\varphi_u(u_0, v_0) + (v - v_0)\varphi_v(u_0, v_0), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

当 $\varphi_u(u_0, v_0)$ 与 $\varphi_v(u_0, v_0)$ 线性无关时, φ_* 的像是经过 $\varphi(u_0, v_0)$ 的平面, 称为 φ 在 (u_0, v_0) 处的切面. 切面中的向量称为切向量.

切面也有相应的物理解释. 例如, 地球表面可近似地认为是球面. 进一步, 当人们在小范围活动时, 可以假定地面是平的. 这实际上是用切面代替了原来的球面.

记 $\vec{N} = \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$. 利用 \mathbb{R}^3 中叉乘运算的性质可知 \vec{N} 与切面正交, 为法向量. $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$ 为单位法向量. 切面方程可以写成非参数形式

$$((x, y, z) - \varphi(u_0, v_0)) \cdot \vec{N} = 0,$$

或改写为

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

例 12.2.3. 求球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的切面.

解. 球面可写成参数曲面

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta,$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 其法向量为

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \times (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ &= \sin \theta \cdot (x, y, z), \end{aligned}$$

$\vec{n} = (x, y, z)$ 为单位法向量. 因此球面在 (x_0, y_0, z_0) 处切面方程为

$$(x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 + (z - z_0)z_0 = 0.$$

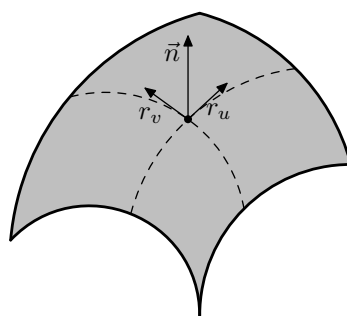


图 12.3 切向量与法向量

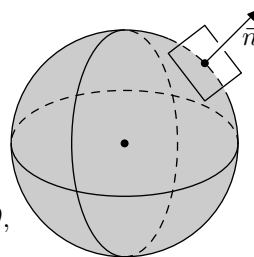


图 12.4 球面的切面

更一般地, 设 D 为 \mathbb{R}^m 中的开集, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m < n$) 为连续映射. 我们称 φ 为 \mathbb{R}^n 中的连续参数曲面. 记

$$\varphi(u) = (x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in D.$$

假定 φ 的每一个分量都在 u^0 处可微, 则在 u^0 附近成立

$$\varphi(u) = \varphi(u^0) + \sum_{i=1}^m (u_i - u_i^0) \varphi_{u_i}(u^0) + o(\|u - u^0\|),$$

其中 $\varphi_{u_i} = (\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_i})$, $i = 1, \dots, m$. 记

$$\varphi_*(u) = \varphi(u^0) + \sum_{i=1}^m (u_i - u_i^0) \varphi_{u_i}(u^0), \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

当 $\{\varphi_{u_i}(u^0)\}_{i=1}^m$ 线性无关时, φ_* 的像是经过 $\varphi(u^0)$ 的 m 维子空间, 称为 φ 在 u^0 处的切空间. 切空间中的向量称为切向量. 切空间的正交补称为法空间, 法空间中的向量称为法向量.

当 $m = n - 1$ 时, φ 称为 \mathbb{R}^n 中的参数超曲面. 利用 \mathbb{R}^n 中的叉乘运算 (见本章最后一节补充材料), 记

$$\vec{N} = \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}},$$

则 \vec{N} 为法向量. 此时切空间方程的非参数形式可写为 $(x - \varphi(u^0)) \cdot \vec{N} = 0$.

为了写出 \vec{N} 的分量, 我们来引进一个方便的记号. 设 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 是依赖于变量 $\{u_j\}_{j=1}^m$ 的函数, 记

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{m \times m}. \quad (12.5)$$

利用此记号和叉乘运算的性质可以将 \vec{N} 写为 (N_1, \dots, N_n) , 其中

$$N_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}.$$

最后, 切空间的方程可写为

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(u^0) & \cdots & x_n - x_n(u^0) \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(u^0) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1}(u^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}}(u^0) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}}(u^0) \end{vmatrix} = 0.$$

习题 12.2

1. 求下列曲线在指定点的切线和法面方程:

(1) $\sigma(t) = (a \cos t \sin t, b \sin^2 t, c \cos t)$, $t = \frac{\pi}{4}$,

(2) $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t = t_0$,

(3) $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t = t_0$.

2. 求下列曲面在指定点的切面和法线:

(1) $r(u, v) = (u, a \cos v, a \sin v)$, $(u, v) = (u_0, v_0)$,

(2) $z = x^2 + y^2$, $(x, y, z) = (1, 2, 5)$,

(3) $r(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, $(u, v) = (u_0, v_0)$.

3. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 具有连续的偏导数. f 的图像 $\text{graph}(f)$ 是 \mathbb{R}^{n+1} 中的超曲面, 其中

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

求此超曲面在任何一点的法向量和切空间方程.

4. 求三维球面 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ 在任意一点的法向量和切空间方程.

§12.3 复合函数和链式法则

我们线性化的方法来研究向量值的多元函数.

定义 12.3.1 (微分). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为向量值的多元函数, $x^0 \in D$. 如果存在线性映射 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得在 x^0 附近成立

$$f(x) - f(x^0) = L(x - x^0) + o(\|x - x^0\|), \quad (x \rightarrow x^0)$$

则称 f 在 x^0 处可微, L 称为 f 在 x^0 处的微分, 也记为 $df(x^0)$.

$f(x)$ 的第 i ($1 \leq i \leq m$) 个分量记为 $f_i(x)$. 从定义不难看出, f 可微时它的每一个分量均可微, 反之亦然. 此时, 利用欧氏空间的标准基, 线性映射 L 可表示为 $m \times n$ 型矩阵, 记为 $Jf(x^0)$. $Jf(x^0)$ 称为 f 在 x^0 处的 Jacobi 矩阵, 其行列式称为 Jacobi 行列式. 注意到 $Jf(x^0)$ 的第 i 行就是 f_i 在 x^0 处的梯度 $\nabla f_i(x^0)$, 因此

$$Jf(x^0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{m \times n}. \quad (12.6)$$

我们想将微分中值定理推广到向量值函数. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中凸域, $x, y \in D$. 根据微分中值定理, 对 f 的每一个分量 f_i 均存在 $\xi_i \in D$, 使得

$$f_i(x) - f_i(y) = \nabla f_i(\xi_i) \cdot (x - y).$$

但下面的例子说明这些 ξ_i 未必相同.

例 12.3.1. 考虑函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$.

取 $x = 1, y = 0$, 简单的计算表明 $\xi_1 = 1/2, \xi_2 = \pm 1/\sqrt{3}$, 因此 $\xi_1 \neq \xi_2$. 此例表明, 一般地我们不能指望 $f(x) - f(y) = Jf(\xi)(x - y)$ 对某个 ξ 成立. 不过, 我们有

定理 12.3.1 (拟微分中值定理). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中凸域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 D 中处处可微. 则任给 $x, y \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|x - y\|.$$

证明. 基本的想法是对 f 各分量的线性组合应用微分中值定理. 为此, 不妨设 $f(x) \neq f(y)$. 任意取定 \mathbb{R}^m 中的单位向量 $u = (u_1, \dots, u_m)$, 记

$$g = u \cdot f = \sum_{i=1}^m u_i f_i,$$

则 g 为 D 中可微函数. 根据微分中值定理, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$g(x) - g(y) = \nabla g(\xi) \cdot (x - y).$$

注意到 $\nabla g(\xi) = \sum_{i=1}^m u_i \nabla f_i(\xi)$. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} \|\nabla g(\xi)\| &\leq \sum_{i=1}^m |u_i| \cdot \|\nabla f_i(\xi)\| \\ &\leq \|u\| \cdot \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\xi)\|^2 \right)^{1/2} = \|Jf(\xi)\|. \end{aligned}$$

由 $g(x) - g(y) = u \cdot [f(x) - f(y)]$ 可得

$$|u \cdot [f(x) - f(y)]| \leq \|\nabla g(\xi)\| \cdot \|x - y\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|x - y\|.$$

在上式中取 $u = [f(x) - f(y)] / \|f(x) - f(y)\|$ 就完成了定理的证明. \square

下面我们研究向量值函数的复合求导.

定理 12.3.2 (复合求导). 设 D 和 Δ 分别为 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 中的开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^l$ 为向量值函数, 且 $f(D) \subset \Delta$. 如果 f 在 $x^0 \in D$ 处可微, g 在 $y^0 = f(x^0)$ 处可微, 则复合函数 $h = g \circ f$ 在 x^0 处可微, 且

$$Jh(x^0) = Jg(y^0) \cdot Jf(x^0). \quad (12.7)$$

证明. 由 f 在 x^0 处可微可知, 在 x^0 附近成立

$$f(x) - f(x^0) = Jf(x^0)(x - x^0) + o(\|x - x^0\|). \quad (12.8)$$

这说明存在常数 C , 使得 $\|f(x) - f(x^0)\| \leq C\|x - x^0\|$. 特别地, 当 $x \rightarrow x^0$ 时 $f(x) \rightarrow f(x^0)$. 同理, g 在 y^0 处可微, 故

$$g(y) - g(y^0) = Jg(y^0)(y - y^0) + o(\|y - y^0\|). \quad (12.9)$$

在上式中代入 $y = f(x)$ 可得

$$\begin{aligned} h(x) - h(x^0) &= Jg(y^0)[f(x) - f(x^0)] + o(\|f(x) - f(x^0)\|) \\ &= [Jg(y^0) \cdot Jf(x^0)](x - x^0) + Jg(y^0)o(\|x - x^0\|) + o(\|x - x^0\|) \\ &= [Jg(y^0) \cdot Jf(x^0)](x - x^0) + o(\|x - x^0\|), \end{aligned}$$

这说明 h 在 x^0 处可微, 且 (12.7) 式成立. □

(12.7) 式可以写成分量的形式

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y^0) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0), \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12.10)$$

这也就是所谓的链式法则.

例 12.3.2. 设 $f(x, y)$ 可微, $\varphi(x)$ 可微, 求 $u = f(x, \varphi(x))$ 关于 x 的导数.

解. 由链式法则,

$$\begin{aligned} u_x &= f_x(x, \varphi(x)) \cdot x_x + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi(x) \\ &= f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi(x). \end{aligned}$$

例 12.3.3. 设 $u = f(x, y)$ 可微, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

证明. 由链式法则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

例 12.3.4. 设 $z = f(u, v, w)$, $v = \varphi(u, s)$, $s = \psi(u, w)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$.

解. 按照定义,

$$z = f(u, v, w) = f(u, \varphi(u, s), w) = f(u, \varphi(u, \psi(u, w)), w).$$

由链式法则,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial w} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w}.\end{aligned}$$

最后, 我们简单地介绍全微分 (形式微分) 的概念. 从场论的观点出发比较自然. 场的观念起源于物理学. 在物理学中, 有所谓的标量 (数量) 场和矢量 (向量) 场. 例如, 密度和势能为标量场, 引力场和电磁场为矢量场. 从数学上看, 标量场就是对空间中每一点都指定一个标量 (有大小而无方向的量), 也就是定义在空间中的函数; 矢量场就是对空间中每一点都指定一个矢量 (向量), 也就是定义在空间中的向量值函数.

例 12.3.5. 梯度场.

设 D 为 \mathbb{R}^n 中的开集, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 中处处可微. 我们在 D 中定义向量场 ∇f , 使得它在 x 处的值为 f 在 x 处的梯度 $\nabla f(x)$. ∇f 称为 f 的梯度场.

利用 \mathbb{R}^n 中的标准基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 梯度场可以表示为

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i. \quad (12.11)$$

现在我们考虑 \mathbb{R}^n 的对偶空间 $(\mathbb{R}^n)^*$, 它由所有从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的线性映射所构成. $(\mathbb{R}^n)^*$ 也是 n 维向量空间, 它有一组对偶基 $\{e^j\}_{j=1}^n$, 其中

$$e^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad e^j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = \lambda_j, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

例 12.3.6. 1-形式.

设 D 为 \mathbb{R}^n 中的开集. 如果对 D 中每一点 x 都指定 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的一个向量 $\omega(x)$, 则称 ω 为 D 中的 1-形式. 利用对偶基, ω 可以表示为

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) e^j, \quad x \in D, \quad (12.12)$$

其中 $\omega_j(x)$ 为 D 中的函数.

特别地, 当函数 f 在 D 中处处可微时, 它在 $x \in D$ 处的微分 $df(x)$ 属于 $(\mathbb{R}^n)^*$, 这样我们就得到一个 1-形式, 记为 df , 称为 f 的全微分.

断言. $df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^j$.

事实上, 由 (12.1), (12.3) 式可得 $df(x)(e_j) = \nabla f(x) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, 这说明上式成立. 特别地, 当 f 为坐标函数 x_i 时, 等式成为 $dx_i = e^i$. 因此我们常用下式表示全微分:

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \quad (12.13)$$

一般地, 设 ϕ 为 D 中定义的函数, ω 为 1-形式, 则 $\phi\omega$ 也为 1-形式, 它在 x 处的值为 $\phi(x)\omega(x)$. 类似地, 可以定义 1-形式之间的加法运算.

命题 12.3.3. 设 f, g 为可微函数, 则 $d(f+g) = df + dg$, $d(fg) = gdf + fdg$. 如果 g 处处非零, 则 $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$.

证明. 留作练习. □

利用全微分, 链式法则可写为

$$dh_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f) df_k, \quad (12.14)$$

这也称为全微分的形式不变性.

例 12.3.7. 设 $h = \ln \frac{z^2}{x^2 + y^2}$, 求 dh 及 h 的一阶偏导数.

解. 根据刚才的讨论, 我们有

$$\begin{aligned} dh &= d \ln \frac{z^2}{x^2 + y^2} = d(\ln z^2 - \ln(x^2 + y^2)) \\ &= \frac{2}{z} dz - \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) \\ &= \frac{-2x}{x^2 + y^2} dx - \frac{2y}{x^2 + y^2} dy + \frac{2}{z} dz. \end{aligned}$$

这说明

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{2}{z}.$$

习题 12.3

1. 研究下列函数在原点的可微性:

(1) $f(x, y) = |xy|$; (2) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$; (3) $f(x, y) = \sqrt{x} \cos y$;

(4) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(5) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

2. 计算下列函数在指定点的微分:

(1) $f(x, y) = (xy^2 - 3x^2, 3x - 5y^2)$, $(x, y) = (1, -1)$;

(2) $f(x, y, z) = (xyz^2 - 4y^2, 3xy^2 - y^2z)$, $(x, y) = (1, -2, 3)$;

(3) $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $(r, \theta) = (r_0, \theta_0)$;

(4) $f(x, y) = (\sin x + \cos y, \cos(x + y))$, $(x, y) = (0, 0)$.

3. 求复合函数 $f \circ g$ 在指定点的 Jacobi 矩阵:

(1) $f(x, y) = (xy, x^2y)$, $g(s, t) = (s + t, s^2 - t^2)$, $(s, t) = (2, 1)$;

(2) $f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x))$, $g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)$,

$(u, v, w) = (1, -1, 1)$;

(3) $f(x, y, z) = (x + y + z, xy, x^2 + y^2 + z^2)$, $g(u, v, w) = (e^{v^2+w^2}, \sin(uw), \sqrt{uw})$,

$(u, v, w) = (2, 1, 3)$.

4. 求复合偏导数:

(1) $z = h(u, x, y)$, $y = g(u, v, x)$, $x = f(u, v)$, 求 z_u, z_v ;

(2) $z = f(u, x, y)$, $x = g(v, w)$, $y = h(u, v)$, 求 z_u, z_v, z_w .

5. 计算下列函数的全微分:

(1) $z = x^y$; (2) $z = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$; (3) $z = x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4$;

(4) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; (5) $z = \cos(x + \ln y)$; (6) $z = \arctan(x + y)$;

(7) $z = \frac{x-y}{x+y}$; (8) $z = \ln(x^4 - y^3)$; (9) $z = e^{x+2y} + \sin(y + 2x)$.

6. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的区域, f 在 D 中处处可微. 如果 $df = 0$, 则 f 为常值函数.

7. 证明, 如果 $u(x, y)$ 满足方程 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 $v(x, y) = u(x^2 - y^2, 2xy)$ 和 $w(x, y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ 也满足此方程.

8. 证明, 函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

满足如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. 设 f 为多元函数, 其偏导数均连续, 求在给定的任何一点处方向导数的最大值和最小值.

10. (*) 设 f 为二元函数, $f_x(x_0, y_0)$ 存在, $f_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近连续, 证明 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

11. (*) 设 f_x 和 f_y 在 (x_0, y_0) 处可微, 证明 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

§12.4 Taylor 公式及其应用

根据定义, 如果一个多元函数可微, 则它可以用线性函数逼近, 利用这一点我们可以做近似计算.

例 12.4.1. 求 $\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}$ 的近似值.

解. 考虑函数 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$, $x_0 = (1, 1, 1)$, $h = (0.03, -0.02, 0.06)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}} &= f(1.03, 0.98, 1.06) \\ &= f(x_0 + h) \approx f(x_0) + Jf(x_0) \cdot h \\ &= 1 + \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.06 \end{pmatrix} = 1.05. \end{aligned}$$

利用微分作近似计算只考虑了函数的线性部分而已, 为了更好地求近似值, 我们要考虑高阶逼近. 跟一元函数类似, 可以用多元多项式来逼近多元函数. 为此先引进一些记号. 设 $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ($1 \leq i \leq n$), 记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 称为多重指标. 记

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

如果 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

对于多元函数 f , 还用下面的记号表示 $|\alpha|$ 阶偏导数:

$$D^\alpha f(x^0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x^0).$$

定理 12.4.1 (Taylor 公式). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中凸域, $f \in C^{m+1}(D)$, $a \in D$. 则任给 $x \in D$, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

证明. 考虑一元函数 $\varphi(t) = f(a + t(x-a))$, $t \in [0, 1]$. φ 具有 $m+1$ 阶连续导数, 故由一元函数的 Taylor 公式, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta). \quad (12.15)$$

利用归纳法不难证明

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x-a))(x-a)^\alpha.$$

特别地, $t = 0$ 时, 有

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha,$$

将上式代入 (12.15) 式即得欲证公式. □

记

$$R_m = f(x) - \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

由 Taylor 公式, 当 $f \in C^{m+1}(D)$ 时

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha. \quad (\text{Lagrange 余项})$$

推论 12.4.2. 在定理的条件下, 当 $\|x-a\|$ 充分小时, $R_m = O(\|x-a\|^{m+1})$.

证明. 取 $\delta > 0$, 使得 $\bar{B}_\delta(a) \subset D$. 由于 $f \in C^{m+1}(D)$, $\bar{B}_\delta(a)$ 紧致, 故存在 $M > 0$ 使得

$$|D^\alpha f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{B}_\delta(a), \quad |\alpha| \leq m+1.$$

因此

$$\begin{aligned} |R_m| &\leq M \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} |(x-a)^\alpha| \\ &\leq M \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \|x-a\|^{|\alpha|} = C \|x-a\|^{m+1}. \end{aligned}$$

推论得证. □

注. (1) 如果 $f \in C^m(D)$, 则 Taylor 公式可写为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + R_m, \end{aligned}$$

其中

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha f(a + \theta(x-a)) - D^\alpha f(a)] (x-a)^\alpha.$$

用推论的证明方法可得如下估计:

$$R_m = o(\|x - a\|^m), \quad (x \rightarrow a). \quad (\text{Peano 余项})$$

(2) 多元函数 Taylor 公式的前三项为

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)\nabla^2 f(a)(x - a)^\top + \cdots,$$

其中

$$\nabla^2 f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n},$$

称为 f 的 Hessian 矩阵, 也记为 $\text{Hess}(f)$. 记 $\Delta f = \text{tr} \nabla^2 f$, Δ 称为 Laplace 算子.

(3) Taylor 公式中的系数由 f 惟一确定.

下面我们讨论 Taylor 公式的简单应用, 先将凸函数的概念推广到多元函数.

定义 12.4.1 (凸函数). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的凸域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为多元函数. 如果任给 $x \neq y \in D$, 均有

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall t \in (0, 1),$$

则称 f 为 D 中的凸函数. 上式中 “ \leq ” 换成 “ $<$ ” 时, 称为严格凸函数.

命题 12.4.3. 设函数 f 在凸域 D 中处处可微.

(i) f 为凸函数 \iff

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x), \quad \forall x, y \in D. \quad (12.16)$$

(ii) 当 $f \in C^2(D)$ 时, f 为凸函数 $\iff \nabla^2 f \geq 0$ (半正定).

证明. (i) “ \implies ” 任给 $x, y \in D, t \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} t[f(y) - f(x)] &\geq f(x + t(y - x)) - f(x) \\ &= \nabla f(x) \cdot t(y - x) + o(t\|y - x\|), \end{aligned}$$

上式两边除以 t , 然后令 $t \rightarrow 0^+$ 即得 (12.16) 式.

“ \impliedby ” 任给 $x, y \in D, t \in (0, 1)$, 记 $z = tx + (1-t)y$, 则

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z) \cdot (x - z), \quad f(y) \geq f(z) + \nabla f(z) \cdot (y - z).$$

这说明

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(z) + \nabla f(z) \cdot [t(x - z) + (1-t)(y - z)] = f(z).$$

(ii) “ \Leftarrow ” 设 $f \in C^2(D)$, 由 Taylor 公式, 任给 $x, y \in D$, 存在 $\xi \in D$ 使得

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)\nabla^2 f(\xi)(y - x)^\top.$$

由 $\nabla^2 f \geq 0$ 知 (12.16) 式成立, 再由 (i) 知 f 为凸函数.

“ \Rightarrow ” (反证法). 如果 $\nabla^2 f(x)$ 不是半正定的, 则存在 \mathbb{R}^n 中的单位向量 h , 使得 $h\nabla^2 f(x)h^\top < 0$. 由 Taylor 公式及其注记, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon h) &= f(x) + \nabla f(x) \cdot \varepsilon h + \frac{1}{2}\varepsilon^2 h\nabla^2 f(x)h^\top + o(\|\varepsilon h\|^2) \\ &= f(x) + \nabla f(x) \cdot \varepsilon h + \frac{1}{2}\varepsilon^2 [h\nabla^2 f(x)h^\top + o(1)]. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 充分小时, 上式右端第三项小于零, 这与 (12.16) 式相矛盾. \square

与一元函数类似, Taylor 公式还可以用来研究多元函数的极值.

定义 12.4.2 (极值). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为多元函数, $x^0 \in D$. 如果存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x^0) \geq f(x) \quad (\text{或 } f(x^0) \leq f(x)), \quad \forall x \in D \cap B_\delta(x^0) \setminus \{x^0\},$$

则称 x^0 为 f 的极大 (小) 值点, $f(x^0)$ 为 f 的极大 (小) 值. 当上式中 “ \geq ” (“ \leq ”) 换成 “ $>$ ” (“ $<$ ”) 时, 相应地把 x^0 称为严格极值点, $f(x^0)$ 为严格极值.

命题 12.4.4 (达到极值的必要条件). 设 x^0 为 f 的极值点, 如果 x^0 为 D 的内点, 且 f 在 x^0 处可微, 则 $\nabla f(x^0) = 0$.

证明. 任取单位向量 $u \in \mathbb{R}^n$, 考虑一元函数 $\varphi(t) = f(x^0 + tu)$. 因为 x^0 为内点, 当 $|t|$ 充分小时 $x^0 + tu \in D$. 于是 $t = 0$ 为 φ 的极值点. 由 (12.4) 式和一元函数的 Fermat 定理可得

$$0 = \varphi'(0) = \nabla f(x^0) \cdot u,$$

由 u 的任意性可知 $\nabla f(x^0) = 0$. \square

梯度为零的点称为函数的驻点或临界点. 求函数极值时, 一般先找出它的驻点, 再判断驻点是否为极值点.

命题 12.4.5. 设 $D \in \mathbb{R}^n$ 为开集, $f \in C^2(D)$, x^0 为 f 的驻点. 则

- (i) 如果 x^0 为 f 的极小 (大) 值点, 则 $\nabla^2 f(x^0)$ 为半正 (负) 定方阵;
- (ii) 如果 $\nabla^2 f(x^0)$ 为正 (负) 定方阵, 则 x^0 为 f 的严格极小 (大) 值点;
- (iii) 如果 $\nabla^2 f(x^0)$ 为不定方阵, 则 x^0 不是 f 的极值点.

证明. 证明与命题 12.4.3 完全类似, 略. \square

例 12.4.2. 求 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ 的极值.

解. 先求驻点. 在驻点处

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y.$$

上式有三个解

$$m_0 = (0, 0), \quad m_1 = (1, 1), \quad m_2 = (-1, -1).$$

为了判断极值, 再在驻点处求 Hessian 矩阵:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

在 m_1, m_2 处, $\nabla^2 f$ 正定, 从而 m_1, m_2 为极小值点. 此时 $f(m_1) = f(m_2) = -2$. 在 m_0 处 $\nabla^2 f$ 退化, 用上面的命题无法判别 m_0 是否为极值点. 不过我们可以直接做: 对于 $0 < x < 1$, 分别令 $y = x, -x$, 则

$$f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 < 0, \quad f(x, -x) = 2x^4 > 0,$$

这说明 m_0 不是极值点.

例 12.4.3. 求 $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$ 的极值.

解. 容易算出驻点为 $(0, 1), (0, -1)$. 再计算 Hessian 矩阵:

$$\nabla^2 f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

这说明 $(0, -1)$ 不是极值点, $(0, 1)$ 为极小值点, $f(0, 1) = -2$.

例 12.4.4. 研究函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ 的极值.

解. 容易算出 $(0, 0)$ 是惟一的驻点. 在每一条经过 $(0, 0)$ 的直线上, $(0, 0)$ 都是极小值点, 但它不是 f 在平面上的极值点.

例 12.4.5. 求 $f(x, y) = x^2 + y^2(1 + x)^3$ 的极值.

解. 易见 $(0, 0)$ 为 f 的惟一驻点, 且为极小值点, 但 $f(-2, 3) = -5 < f(0, 0) = 0$, 因此 $(0, 0)$ 不是最小值点. 这和一元函数不同: 一元函数的惟一极值点必为最值点.

例 12.4.6. 设 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 如果 $\nabla^2 f \geq I_n$ 总成立, 其中 I_n 为 n 阶单位方阵, 则 f 有惟一的最小值点.

证明. 根据 Taylor 公式, f 可在原点处展开为

$$f(x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot x + \frac{1}{2} x \nabla^2 f(\xi) x^\top.$$

由已知条件得

$$f(x) \geq f(0) + \nabla f(0) \cdot x + \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

特别地, 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$, 这说明 f 的最小值存在. 设 x^0 为最小值点. 在 x^0 处, $\nabla f(x^0) = 0$, 且 f 的 Taylor 公式形如

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0) \nabla^2 f(\zeta)(x - x^0)^\top,$$

由已知条件得

$$f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2,$$

这说明 x^0 为惟一的最小值点.

例 12.4.7 (最小二乘法). 设 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 为平面 \mathbb{R}^2 上 n 个点, 求一条直线 $y = ax + b$, 使得 $F(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ 最小.

解. $F(a, b)$ 是关于 (a, b) 的光滑函数. 不妨设 $\{x_i\}$ 不全相等. 此时, F 的惟一驻点为

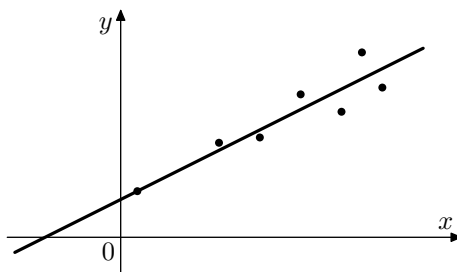


图 12.5 最小二乘法

$$(a, b) = c^{-1} \left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i \right),$$

其中 $c = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 > 0$. 由于当 $\|(a, b)\| \rightarrow \infty$ 时 $F(a, b) \rightarrow \infty$, F 有最小值, 从而求出的惟一驻点必为最小值点. 此时, 欲求的直线方程可写为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \end{vmatrix} = 0.$$

最后, 我们考虑一个在有界区域上求最值的例子.

例 12.4.8. 求 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y$ 在三角型区域 D 上的最值, 其中

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}.$$

解. 本例须考虑 f 在 D 上的边界上的值. 先求出 f 在 D 内驻点为 $(1, 1/2)$, $f(1, 1/2) = 5/4$. 再看边界:

(1) $y = 0, 0 \leq x \leq 2$: $f(x, 0) = x^2 - 2x$, 其驻点为 $(1, 0)$, $f(1, 0) = -1$.

(2) $x = 0, 0 \leq y \leq 4$: $f(0, y) = y^2 - y$, 驻点为 $(0, 1/2)$, $f(0, 1/2) = -1/4$;

(3) $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y = 4: f(x, y) = 5x^2 - 16x + 12$, 驻点为 $(8/5, 4/5)$, $f(8/5, 4/5) = -4/5$.

最后, 在三个端点上: $f(0, 0) = 0, f(2, 0) = 0, f(0, 4) = 12$, 因此经过比较以后得知 f 的最大值为 12, 最小值为 $-5/4$.

习题 12.4

1. 利用微分作近似计算: (1) $1.002^2 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$, (2) $0.97^{1.05}$.
2. 设 k 为非负整数, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 证明

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

3. 设 f 为 C^k 函数, 记 $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$, 利用归纳法证明

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x - a))(x - a)^\alpha.$$

4. 对下列函数在指定点作 Taylor 展开:

- (1) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, (x, y) = (1, -2)$;
- (2) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, (x, y, z) = (1, 1, 1)$;
- (3) $f(x, y) = (1 + x)^m(1 + y)^n, m, n$ 为正整数, $(x, y) = (0, 0)$;
- (4) $f(x, y) = e^{x+y}, (x, y) = (0, 0)$.

5. 设函数 f 的直到 m 阶的各种偏导数都在 a 处连续, 且在 a 附近, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha (x - a)^\alpha + o(\|x - a\|^m),$$

证明 $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a), \forall |\alpha| \leq m$.

6. 对下列函数作 Taylor 展开到指定项:

- (1) $f(x, y) = x^y$, 在 $(1, 1)$ 处展开到二次项;
- (2) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, 在 $(0, 0)$ 处展开到二次项;
- (3) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, 在 $(0, 0)$ 处展开到六次项;
- (4) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{1+x^2}$, 在 $(0, 0)$ 处展开到四次项.

7. 设 x^1, \dots, x^k 为 \mathbb{R}^n 中的有限个点. 记 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \|x - x^i\|, \psi(x) = \sum_{i=1}^k \|x - x^i\|^2$.

证明 φ, ψ 为凸函数, 并求 ψ 的最小值点.

8. 设 f 为凸域 D 中的可微函数. 证明: f 为凸函数当且仅当

$$[\nabla f(x) - \nabla f(y)] \cdot (x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in D.$$

9. 求下列函数的驻点, 并判断是否为极值点, 是什么类型的极值点:

$$\begin{aligned} (1) f(x, y) &= y^2(\sin x - x/2); & (2) f(x, y) &= \cos(x + y) + \sin(x - y); \\ (3) f(x, y) &= y^x; & (4) f(x, y) &= x/y - xy; \\ (5) f(x, y) &= (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}; & (6) f(x, y) &= ye^{-x^2}. \end{aligned}$$

10. 求下列函数的极值:

$$\begin{aligned} (1) f(x, y) &= 4(x - y) - x^2 - y^2; & (2) f(x, y) &= x^2 + (y - 1)^2; \\ (3) f(x, y) &= x^2 + xy + y^2 + x - y + 1; & (4) f(x, y) &= x^3 + y^3 - 3xy. \end{aligned}$$

11. 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

12. (*) 设 $0 < a < b$, $n \geq 1$. 试在 (a, b) 中选取 n 个点 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得

$$u = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$

取最大值.

13. (*) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域, $f \in C^2(D)$. 如果 $\Delta f \geq 0$, 则 f 在 D 内无极大值点, 除非 f 为常值函数.

§12.5 逆映射定理和隐映射定理

回忆一下: 对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微. 下面我们考虑多元向量值函数类似的问题.

例 12.5.1. 设 A 为 n 阶方阵, 如果 $\|A\| < 1$, 则 $I_n - A$ 可逆.

设 $u \in \mathbb{R}^n$, 如果 $(I_n - A)u = 0$, 则 $\|u\| = \|Au\| \leq \|A\| \cdot \|u\|$, 由 $\|A\| < 1$ 可知 $u = 0$. 根据线性代数可知 A 可逆. 我们也可从分析学观点来看. 给定 $v \in \mathbb{R}^n$, 我们解方程

$$(I_n - A)x = v, \quad \text{即} \quad x = Ax + v.$$

考虑映射 $\varphi(x) = Ax + v$, 当 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 时

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|,$$

这说明 φ 是 \mathbb{R}^n 到自身的压缩映射. 根据压缩映像原理, φ 有唯一的不动点, 即 $(I_n - A)$ 可逆.

这个例子意味着, 恒同映射这样一个可逆映射作一个小的扰动以后仍然为可逆映射. 一般地, 任何可逆线性映射在微扰下仍为可逆映射. 对于向量值函数来说,

要知道它在某一点附近是否可逆, 只要在这一点将它线性化, 看看其微分是否可逆. 这里我们需要对函数加一定的可微性条件. 一个向量值函数是 C^k 的是指它的每一个分量都是 C^k 函数. 下面的重要结果也称为向量值函数的反函数定理.

定理 12.5.1 (逆映射定理). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $C^k(k \geq 1)$ 映射, $x^0 \in D$. 如果 $\det Jf(x^0) \neq 0$, 则存在 x^0 的开邻域 $U \subset D$ 以及 $y^0 = f(x^0)$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f|_U: U \rightarrow V$ 是可逆映射, 且其逆仍为 C^k 映射.

证明. 不失一般性, 可设 $x^0 = 0, y^0 = 0$. 以 L 记 f 在 $x^0 = 0$ 处的微分, 则 L 可逆, 且 $L^{-1} \circ f$ 在 x^0 处的微分为恒同映射. 如果欲证结论对 $L^{-1} \circ f$ 成立, 则对 f 也成立. 因此, 不妨从一开始就假设 $Jf(x^0) = I_n$.

在 $x^0 = 0$ 附近, f 是恒同映射的小扰动:

$$f(x) = x + g(x), \quad Jg(0) = 0.$$

扰动项 $g(x) = f(x) - x$ 为 C^k 映射. 因此, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|Jg(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(0)} \subset D.$$

由拟微分中值定理可知

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(0)}.$$

给定 $y \in B_{\delta/2}(0)$, 我们在 $B_\delta(0)$ 中解方程

$$f(x) = y, \quad \text{即} \quad x = y - g(x). \quad (12.17)$$

记 $\varphi(x) = y - g(x)$. 当 $x \in \overline{B_\delta(0)}$ 时

$$\|\varphi(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leq \delta. \quad (12.18)$$

这说明 $\varphi(\overline{B_\delta(0)}) \subset B_\delta(0)$. 当 $x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(0)}$ 时

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

根据压缩映像原理, 方程 (12.17) 在 $\overline{B_\delta(0)}$ 中有惟一解, 记为 x_y . 由 (12.18) 式可知 $x_y \in B_\delta(0)$. 令

$$U = f^{-1}(B_{\delta/2}(0)) \cap B_\delta(0), \quad V = B_{\delta/2}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U: U \rightarrow V$ 是一一映射, 其逆映射 $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \quad (12.19)$$

(1) $h: V \rightarrow U$ 是连续映射: 当 $y_1, y_2 \in V$ 时

$$\begin{aligned}\|h(y_1) - h(y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|h(y_1) - h(y_2)\|,\end{aligned}$$

这说明 $\|h(y_1) - h(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|, \forall y_1, y_2 \in V$.

(2) $h: V \rightarrow U$ 是可微映射: 设 $y_0 \in V$, 则对 $y \in V$, 有

$$\begin{aligned}h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|).\end{aligned}$$

利用 $Jf = I_n + Jg$ 和 (1), 上式可改写为

$$Jf(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) = (y - y_0) + o(\|y - y_0\|),$$

因而

$$h(y) - h(y_0) = [Jf(h(y_0))]^{-1} \cdot (y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

这说明 h 在 y_0 处可微.

(3) $h: V \rightarrow U$ 为 C^k 映射: 由 (2) 可知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall y \in V. \quad (12.20)$$

由 $f \in C^k$ 知 $Jf \in C^{k-1}$. 由 (2) 及 (12.20) 可推出 Jh 连续, 即 $h \in C^1$. 再由 $Jf \in C^{k-1}, h \in C^1$ 及 (12.20) 可推出 $Jh \in C^1$ 即 $h \in C^2$. 依次类推, 最后我们就得到 $h \in C^k$. \square

需要指出的是, 多元函数的反函数定理中逆映射只有局部存在性, 这与一元函数不同.

例 12.5.2. 研究 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ 的逆映射.

注意到

$$\det Jf(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0,$$

这说明 f 局部可逆. 但 f 不是单射, 因此整体不可逆.

另一方面, 当映射的 Jacobi 矩阵退化时, 映射本身也可能可逆.

例 12.5.3. 研究 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^3, y^3)$ 的逆映射.

显然, f 为光滑映射, 它也是可逆映射. 注意到 f 的逆映射在 $(0, 0)$ 处不可微, 这是由 Jf 在 $(0, 0)$ 处的退化性所造成的.

例 12.5.4. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $C^k(k \geq 1)$ 函数, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$, 在 (x^0, y^0) 附近解方程

$$f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

解. 显然, (x_0, y_0) 是方程的解. 利用反函数定理, 我们可以在 (x_0, y_0) 附近找到别的解. 为此, 令

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

在 (x_0, y_0) 处, 有

$$\det JF(x^0, y^0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0.$$

由反函数定理, 在 (x^0, y^0) 附近 F 为可逆映射. 于是当 x 在 x^0 附近时, 记

$$F^{-1}(x, f(x^0, y^0)) = (\varphi(x), \psi(x)),$$

$\varphi(x), \psi(x)$ 均为 C^k 函数. 根据 F 的定义可得

$$(\varphi(x), f(\varphi(x), \psi(x))) = (x, f(x^0, y^0)),$$

这说明

$$\varphi(x) = x, \quad f(x, \psi(x)) = f(x^0, y^0).$$

对 x 求导还可得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \psi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0,$$

从而有

$$\psi'(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi(x)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \psi(x)).$$

$y = \psi(x)$ 称为由 $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 所决定的隐函数. □

上例可推广到一般维数, 所得结果称为隐映射 (隐函数) 定理.

定理 12.5.2 (隐映射定理). 设 $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 为开集, W 中的点用 (x, y) 表示, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$. $f: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^k 映射, 用分量表示为

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y)).$$

设 $(x^0, y^0) \in W$, 且 $\det J_y f(x^0, y^0) \neq 0$, 其中 $J_y f(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right)_{m \times m}$. 则存在 x^0 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$ 以及惟一的 C^k 映射 $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得

$$(1) \quad y^0 = \psi(x^0), \quad f(x, \psi(x)) = f(x_0, y_0), \quad \forall x \in V.$$

$$(2) \quad J\psi(x) = - [J_y f(x, \psi(x))]^{-1} J_x f(x, \psi(x)), \quad \text{其中 } J_x f(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) \right)_{m \times n}.$$

证明. 定义 $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ 为 $F(x, y) = (x, f(x, y))$, 在 (x^0, y^0) 处对 F 利用逆映射定理即可, 因为证明和例 12.5.4 类似, 故略. \square

注. $y = \psi(x)$ 称为由 $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 所决定的隐映射 (隐函数).

例 12.5.5. 设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, 求 $x = 1, y = -2, z = 1$ 时 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 的值.

解. 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9$, 则

$$F(1, -2, 1) = 0, \quad F_z(1, -2, 1) = (6z - 1)|_{z=1} = 5 \neq 0,$$

故 z 可局部地表示为 x, y 的函数, 记为 $z = z(x, y)$. 由定理 12.5.2, 在 $(1, -2, 1)$ 处, 有

$$\begin{aligned} (z_x, z_y) &= -F_z^{-1} \cdot (F_x, F_y) \\ &= -\frac{1}{5}(2x + y, 4y + x)|_{(x,y,z)=(1,-2,1)} = (0, 7/5). \end{aligned}$$

又因为

$$z_y = -F_z^{-1} \cdot F_y = -\frac{1}{6z - 1}(4y + x),$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6}{(6z - 1)^2} \cdot z_x(4y + x) - \frac{1}{6z - 1},$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2, 1) = -\frac{1}{5}.$$

例 12.5.6. 平面上直角坐标 (x, y) 和极坐标 (r, θ) 之间的转换公式为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

求 r 和 θ 关于 x, y 的偏导数.

解. 由反函数定理,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

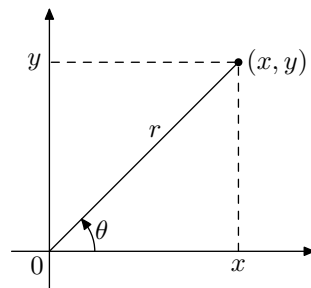


图 12.6 极坐标

例 12.5.7. 隐式曲面.

设 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $C^k (k \geq 1)$ 函数. 当 $c \in \mathbb{R}$ 时, 记

$$S = F^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = c\},$$

S 称为 F 的等值面. 如果对于任意 $(x, y, z) \in S$ 均有 $\nabla F(x, y, z) \neq 0$, 则称 S 为由 F 决定的隐式曲面.

设 $(x_0, y_0, z_0) \in S$, 不妨设 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 由隐函数定理, 在 (x_0, y_0, z_0) 附近, S 可用参数曲面 $z = z(x, y)$ 表示:

$$F(x, y, z(x, y)) = F(x_0, y_0, z_0) = c.$$

在 (x_0, y_0, z_0) 处曲面的法向量为

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (1, 0, z_x(x_0, y_0)) \times (0, 1, z_y(x_0, y_0)) \\ &= (-z_x(x_0, y_0), -z_y(x_0, y_0), 1) \\ &= \frac{1}{F_z} (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)). \end{aligned}$$

因此 F 在 (x_0, y_0, z_0) 处的梯度为 F 在 (x_0, y_0, z_0) 处等值面的法向. S 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

S 在 (x_0, y_0, z_0) 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

例 12.5.8. 隐式曲线.

设 $F, G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $C^k (k \geq 1)$ 的映射, $c \in \mathbb{R}$. 令

$$\ell = F^{-1}(c) \cap G^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = G(x, y, z) = c\}.$$

如果对任意的 $(x, y, z) \in \ell$, 均有

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \det \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0,$$

则称 ℓ 为由 F, G 决定的隐式曲线.

设 $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \ell$, 由隐映射定理, 在 m_0 附近 ℓ 可由参数曲线

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

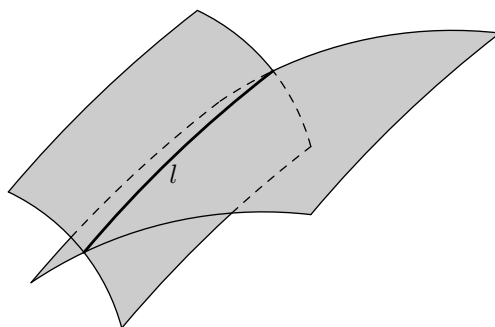


图 12.7 隐式曲线

表示, 其中

$$F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = c,$$

且

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix},$$

或写为

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot y' + F_z \cdot z' = 0, \\ G_x + G_y \cdot y' + G_z \cdot z' = 0. \end{cases}$$

这说明切向量 $(1, y', z')$ 与 ∇F 和 ∇G 均正交. 因而 m_0 处 ℓ 的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}},$$

法面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = 0.$$

以上两例可以推广到一般维数. 为此, 设 $W \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^k ($k \geq 1$) 映射, $n > m$. 固定 $c \in \mathbb{R}^m$, 考虑 Φ 的水平集 (level set)

$$\Sigma = \Phi^{-1}(c) = \{x \in W \mid \Phi(x) = c\}.$$

如果对 Σ 中的每一点 x , $J\Phi(x)$ 的秩均为 m , 则 Σ 是 $n - m$ 维的隐式曲面.

事实上, 设 $x^0 \in \Sigma$, 利用隐函数定理可以说明, 在 x^0 附近 S 总可以用 $n - m$ 个独立参数表示. 为此, 记 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. 不妨设

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})}(x^0) \neq 0.$$

根据隐函数定理, 在 x^0 附近 Σ 有如下参数表示

$$\Psi(x_1, \dots, \widehat{x_{j_1}}, \dots, \widehat{x_{j_m}}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, \dots, x_n),$$

其中 $x_{j_i} = \psi_i(x_1, \dots, \widehat{x_{j_1}}, \dots, \widehat{x_{j_m}}, \dots, x_n)$ ($1 \leq i \leq m$) 均为 C^k 函数, 满足等式

$$\Phi \circ \Psi(x_1, \dots, \widehat{x_{j_1}}, \dots, \widehat{x_{j_m}}, \dots, x_n) = \Phi(x_1, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m, \dots, x_n) = c.$$

在 x^0 处对上式关于 x_i 求导可得

$$J\Phi(x^0)\Psi_{x_i}(x^0) = 0, \quad i \neq j_1, \dots, j_m.$$

这说明 S 在 x^0 处的法空间由 $\nabla\varphi_1(x^0), \dots, \nabla\varphi_m(x^0)$ 张成.

习题 12.5

1. 设 A 为 n 阶方阵, $\|A\| < 1$. 证明 $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.
2. 设 A 为 n 阶可逆方阵, 证明, 存在 $\epsilon(A) > 0$, 使得当 $\|B\| < \epsilon(A)$ 时, $A + B$ 也是可逆方阵.
3. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^k ($k \geq 1$) 映射. 如果 $\det Jf$ 在 D 中处处非零, 则 $f(D)$ 为 \mathbb{R}^n 中开集.
4. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可微映射, 且 $\|Jf(x)\| \leq q < 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 证明 f 存在唯一的不动点.
5. 用本节中证明方法重新证明一元函数的反函数定理, 并说明为什么一元函数有整体的反函数定理.
6. 给出隐函数定理的详细证明.
7. 研究下列函数在指定点的邻域内是否可以将 y 解为 x 的函数:
 - (1) $f(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) = (0, 0)$;
 - (2) $f(x, y) = \sin[\pi(x + y)] - 1, (x, y) = (1/4, 1/4)$;
 - (3) $f(x, y) = xy + \ln(xy) - 1, (x, y) = (1, 1)$;
 - (4) $f(x, y) = x^5 + y^5 + xy - 3, (x, y) = (1, 1)$.
8. 计算指点点处的偏导数:
 - (1) $y^z - xz^3 - 1 = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2, 1)$;
 - (2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -2, 1)$.
9. 方程组 $xv - 4y + 2e^u + 3 = 0, 2x - z - 6u + v \cos u = 0$ 在点 $x = -1, y = 1, z = -1, u = 0, v = 1$ 处确定了隐函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$. 求 u, v 在该点处的 Jacobi 矩阵.

10. 求下列曲面在指定点的切面:

(1) $x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$;

(2) $(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z = 14$, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$;

(3) $\sin^2 x + \cos(y + z) = \frac{3}{4}$, $(x, y, z) = (\pi/6, \pi/3, 0)$;

(4) $x^2 + y^2 = z^2 + \sin z$, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

11. 求下列曲线在指定点的切线:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3x$, $2x - 3y + 5z = 4$, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$;

(2) $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$, $(x, y, z) = (1, 1, 3)$;

(3) $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 32$, $x^2 + y^2 = z^2$, $(x, y, z) = (\sqrt{7}, 3, 4)$;

(4) $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$, $(x, y) = (1, 1)$.

12. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^k ($k \geq 1$) 函数. 如果 ∇f 在 f 的等值面 (水平集) $f^{-1}(c)$ 上处处非零, 证明 ∇f 在超曲面 $f^{-1}(c)$ 上为法向量.

13. 设 U, V 为 \mathbb{R}^n 中的开集, $f: U \rightarrow V$ 为可微映射, 且 $\det Jf(x) \neq 0, \forall x \in U$. 如果 f 的逆映射存在且连续, 则其逆映射一定也是可微的.

14. (*) 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续可微的映射, 且

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

证明 f 可逆, 且其逆映射也是连续可微的.

§12.6 Lagrange 乘数法

我们考虑如下极值问题: 设 A, B 为平面上两个不同的点, σ 为平面 C^1 曲线, 它将平面分为两个不相交的区域. 假定连接 A, B 的直线段完全包含于其中一个区域, 请在 σ 上确定一点 C , 使得 C 到 A 和 B 的距离之和 $|CA| + |CB|$ 最小.

如果不要求 C 落在 σ 上, 则由三角不等式可知, 当 C 落在连接 A, B 的直线段上时, 距离之和 $|CA| + |CB| = |AB|$ 最小. 当 $c > |AB|$ 时, 考虑水平集 $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PA| + |PB| = c\}$, 这是以 A, B 为焦点的椭圆. 当 c 逐渐增大时, 这些椭圆逐渐靠近 σ . 当椭圆首次与 σ 在 C 处相切时, C 就是我们要找的点. 此时, 函数 $|PA| + |PB|$ 在 C 处的梯度为椭圆的法向量, 因此也是 σ 在 C 处的法向量.

一般地, 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 为可微函数, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n > m$) 为 C^k ($k \geq 1$) 映射. 记

$$\Sigma = \Phi^{-1}(0) = \{x \in U \mid \Phi(x) = 0\},$$

f 在 Σ 上的极值称为条件极值, 方程 $\Phi(x) = 0$ 称为约束条件.

如果对任意 $x \in \Sigma$, 矩阵 $J\Phi(x)$ 的秩均为 m , 则称 Σ 上的点满足 m 个独立的约束条件. 此时, 利用隐函数定理 (参见前节末尾的讨论) 可知 Σ 为 \mathbb{R}^n 中 $n - m$ 维隐式曲面, 且 Σ 在 x 处的法空间由 $\{\nabla\varphi_1(x), \dots, \nabla\varphi_m(x)\}$ 张成, 其中 φ_i 是 Φ 的第 i 个分量. 如果 $x^0 \in \Sigma$ 为 f 的极值点, 则 $\nabla f(x^0)$ 必为 Σ 在 x^0 处的法向量. 事实上, 设 $\gamma(t)$ 是 Σ 上的可微参数曲线, $\gamma(0) = x^0$. 则 $t = 0$ 是 $f \circ \gamma(t)$ 的极值点, 从而是驻点:

$$(f \circ \gamma)'(0) = 0, \quad \text{即} \quad \nabla f(x^0) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

注意到 $\gamma'(0)$ 为 Σ 在 x^0 处的切向量. 由 γ 的任意性即知 $\nabla f(x^0)$ 为 Σ 在 x^0 处的法向量. 因此, 存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, 使得

$$\nabla f(x^0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \varphi_i(x^0). \quad (12.21)$$

$\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ 称为 Lagrange 乘数.

我们可以用微分学的语言将上述讨论重新总结为下面的结果.

定理 12.6.1 (Lagrange 乘数法). 设 f, Φ 如上, $x^0 \in \Sigma$ 为 f 的条件极值点. 如果 $J\Phi(x^0)$ 的秩为 m , 则存在 $\lambda \in \mathbb{R}^m$, 使得

$$\nabla f(x^0) - \lambda \cdot J\Phi(x^0) = 0. \quad (12.22)$$

证明. 不妨设

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x^0) \neq 0.$$

由隐映射定理, 存在点 $z^0 = (x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ 的开邻域 V 以及 C^k 映射 $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得

$$y^0 = \psi(z^0), \quad \Phi(\psi(z), z) = 0, \quad \forall z \in V.$$

其中 $y^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, $y = (x_1, \dots, x_m)$, $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $x = (y, z) \in U$. 在 $x^0 = (y^0, z^0)$ 处求导, 有

$$J\psi(z^0) = -(J_y \Phi)^{-1}(x^0) \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.23)$$

由于 x^0 为 f 的条件极值点, 故 z^0 为 $f(\psi(z), z)$ 的极值点 (驻点), 在 z^0 处求导, 得

$$J_y f(x^0) \cdot J\psi(z^0) + J_z f(x^0) = 0. \quad (12.24)$$

将 (12.23) 式代入上式, 得

$$J_z f(x^0) = J_y f(x^0) \cdot (J_y \Phi)^{-1}(x^0) \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.25)$$

记 $\lambda = J_y f(x^0) \cdot (J_y \Phi)^{-1}(x^0)$, 即

$$J_y f(x^0) = \lambda \cdot J_y \Phi(x^0). \quad (12.26)$$

(12.25) 式可用 λ 改写为

$$J_z f(x^0) = \lambda \cdot J_z \Phi(x^0). \quad (12.27)$$

(12.26) 式和 (12.27) 式结合起来就得到 (12.22) 式. \square

在实际应用中, (12.22) 式通常解释为: 如果 x^0 为条件极值点, 则 (x^0, λ) 为辅助函数

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \varphi_i(x)$$

的驻点.

例 12.6.1. 求圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上的点与固定点 $(0, 1)$ 的距离的最大值, 最小值.

解. 在约束条件 $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ 下求距离函数 $d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ 的最大值和最小值. 考虑辅助函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + (y-1)^2 - \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1],$$

求其驻点:

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0 \iff \begin{cases} x - \lambda(x-1) = 0 \\ y - 1 - \lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{-\lambda}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \\ \lambda = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

在驻点处

$$d^2 = \lambda^2, \text{ 即 } d = |\lambda|,$$

由于 d 在圆周上达到最大, 最小值, 故其最大值必为 $\sqrt{2} + 1$, 最小值必为 $\sqrt{2} - 1$. \square

例 12.6.2. 体积为 V 的长方体面积最小值为多少?

解. 设长方体长, 宽, 高分别为 x, y, z , 则面积为

$$A = 2(xy + yz + zx),$$

体积为 $V = xyz$. 在约束条件 $xyz - V = 0$ 之下求 A 的最小值.

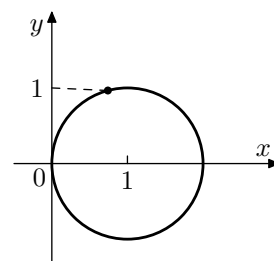


图 12.8 约束距离

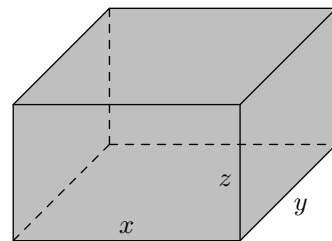


图 12.9 长方体表面

令

$$F(x, y, \lambda) = 2(xy + yz + zx) - \lambda(xyz - V),$$

求驻点:

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0 \implies \begin{cases} 2(y+z) - \lambda yz = 0 \\ 2(z+x) - \lambda zx = 0 \\ 2(x+y) - \lambda xy = 0 \\ xyz - V = 0 \end{cases} \implies x = y = z = V^{\frac{1}{3}}.$$

因为当 x, y 或 $z \rightarrow 0$ 时, $A \rightarrow +\infty$, 故 A 的最小值存在, 从而等于 $6V^{\frac{2}{3}}$. \square

例 12.6.3. 设 $\alpha_i > 0, x_i > 0, i = 1, \dots, n$. 证明

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n},$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

解. 考虑函数

$$f(x_1, \dots, x_n) = \ln(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$$

在约束条件 $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$ ($c > 0$) 下的条件极值. 令

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c \right),$$

求驻点:

$$\begin{aligned} F_{x_i} = F_\lambda = 0 &\implies \frac{\alpha_i}{x_i} = \lambda \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c = 0, \\ &\implies x_i = \frac{c}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

因为在集合

$$D: x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$$

的边界上, f 取值为 $-\infty$, 因此 f 在 D 的内部取到最大值, 上述惟一驻点必为最大值点, 从而

$$\ln(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln \frac{c}{\sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

即

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

习题 12.6

1. 求下列函数在指定约束条件下的最值 ($a, b, c > 0$):

- (1) $f(x, y) = xy, x + y = 1$;
- (2) $f(x, y) = x/a + y/b, x^2 + y^2 = 1$;
- (3) $f(x, y) = x^2 + y^2, x/a + y/b = 1$;
- (4) $f(x, y) = \cos \pi(x + y), x^2 + y^2 = 1$;
- (5) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (6) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2, x + y + z = 1$;
- (7) $f(x, y, z) = x^a y^b z^c, x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$.

2. 求周长为 $2l$ 的平面三角形的最大面积.

3. 求包含在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内各边与坐标轴平行的矩形的最大周长.

4. 求包含在椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 内各面与坐标面平行的长方体的最大体积.

5. 求原点到直线 $2x + 2y + z + 9 = 0, 2x - y - 2z - 18 = 0$ 的距离.

6. 求椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 到直线 $x + y = 4$ 的距离.

7. 求圆内接三角形中面积最大者.

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$, 求 $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ 在高维球面 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$ 上的最大值和最小值.

9. 设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 用求条件极值的办法证明 Hölder 不等式


$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n v_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u_i, v_i \geq 0, i = 1, \cdots, n.$$

10. (*) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$f(x) = xAx^\top + bx = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- (1) 分析 f 在 \mathbb{R}^n 上的极值;
- (2) 分析 f 在约束条件 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 下的极值.

§12.7 多元函数微分的补充材料

 本节内容可作为选读材料.

§12.7.1 叉乘运算

在 \mathbb{R}^n 中给定 $n-1$ 个向量 v^1, \dots, v^{n-1} , 我们要构造另一向量 w , 使得 w 与 $v^i = (v_1^i, \dots, v_n^i)$ ($1 \leq i \leq n-1$) 均正交. 为此, 考虑线性函数 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(x) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ v_1^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

线性函数 L 的梯度是常值向量, 记为 $w = (w_1, \dots, w_n)$. 于是

$$L(x) = x \cdot w = \sum_{i=1}^n x_i w_i. \quad (12.28)$$

按照行列式的定义可得

$$w_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & v_{i-1}^1 & v_{i+1}^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-1} & \cdots & v_{i-1}^{n-1} & v_{i+1}^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12.29)$$

由 L 的定义易见 $L(v^i) = 0$ ($1 \leq i \leq n-1$). 再由 (12.28) 可知 w 的确与 v_i 都正交. 我们称 w 是 v^1, \dots, v^{n-1} 的叉乘, 记为

$$w = v^1 \times \cdots \times v^{n-1}.$$

叉乘还具有下列性质:

- $\{v^i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性相关当且仅当 $v^1 \times \cdots \times v^{n-1} = 0$. 一方面, 如果 $\{v^i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性相关, 则 $L(x) \equiv 0$, 从而 $w = \nabla L = 0$; 另一方面, 如果 $\{v^i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性无关, 则可以将它们扩充为 \mathbb{R}^n 中的一组基 $\{u, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. 此时 $L(u) \neq 0$, 即 $u \cdot w \neq 0$, 特别地 $w \neq 0$.
- 叉乘关于每一个分量 v^i 都是线性的, 即任给 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 以及向量 v^i, \tilde{v}^i , 有 $v^1 \times \cdots \times (\lambda v^i + \mu \tilde{v}^i) \times \cdots \times v^{n-1} = \lambda v^1 \times \cdots \times v^i \times \cdots \times v^{n-1} + \mu v^1 \times \cdots \times \tilde{v}^i \times \cdots \times v^{n-1}$.
- 当 $i < j$ 时, 交换 v^i 和 v^j 的位置以后叉乘变一个符号, 即

$$v^1 \times \cdots \times v^j \times \cdots \times v^i \times \cdots \times v^{n-1} = -v^1 \times \cdots \times v^i \times \cdots \times v^j \times \cdots \times v^{n-1}.$$

一般地, 设 σ 为 $\{1, \dots, n-1\}$ 的置换, 则

$$v^{\sigma(1)} \times \dots \times v^{\sigma(n-1)} = (-1)^\sigma v^1 \times \dots \times v^{n-1},$$

其中 σ 为偶置换时 $(-1)^\sigma = 1$, σ 为奇置换时 $(-1)^\sigma = -1$.

- $\|v^1 \times \dots \times v^{n-1}\| = \left[\det (v^i \cdot v^j)_{(n-1) \times (n-1)} \right]^{1/2}$. 事实上, 当 $\{v^i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性相关时 $w = 0$, $\det (v^i \cdot v^j)_{(n-1) \times (n-1)} = 0$; 当 $\{v^i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性无关时, 利用 $\|w\|^2 = L(w)$ 以及 $v^i \cdot w = 0$ 可得

$$\begin{aligned} \|w\|^4 &= \det \begin{pmatrix} w \\ v^1 \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v^1 \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{pmatrix}^\top = \det \begin{pmatrix} w \cdot w & 0 \\ 0 & (v^i \cdot v^j)_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} \\ &= \|w\|^2 \det (v^i \cdot v^j)_{(n-1) \times (n-1)}, \end{aligned}$$

这说明 $\|w\|^2 = \det (v^i \cdot v^j)_{(n-1) \times (n-1)}$.

- 记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 \mathbb{R}^n 中的标准基, 则 $e_1 \times \dots \times e_{i-1} \times e_{i+1} \times \dots \times e_n = (-1)^{i-1} e_i$.

设 $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为可微函数. 考虑参数超曲面 (f 的图像)

$$\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (x, f(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D.$$

它的切向量为 $v^i = \varphi_{x_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, f_{x_i})$ (第 i 个位置为 1). 利用标准基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, v^i 可写为 $e_i + f_{x_i} e_n$. 于是超曲面的法向量 \vec{N} 可计算如下:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= v^1 \times \dots \times v^{n-1} = (e_1 + f_{x_1} e_n) \times \dots \times (e_{n-1} + f_{x_{n-1}} e_n) \\ &= e_1 \times \dots \times e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} e_1 \times \dots \times f_{x_i} e_n \times \dots \times e_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} e_n + \sum_{i=1}^n (-1)^n f_{x_i} e_i = (-1)^n (f_{x_1}, \dots, f_{x_{n-1}}, -1). \end{aligned}$$

§12.7.2 二次型与极值

在利用 $\nabla^2 f$ 判别极值时, 需要判别其正定或负定性. 我们下面给出判别一个对称方阵为正定阵的方法.

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶对称实方阵, 考虑函数 $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

因为 $n-1$ 维球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ 为有界闭集, 故 Q 在 S^{n-1} 可以取到最小值和最大值.

引理 12.7.1. $Q(x)$ 在 S^{n-1} 上的最小值必为矩阵 A 的特征值.

证明. 记 $\lambda_0 = \min_{S^{n-1}} \{Q(x)\}$, 则存在 $x^0 \in S^{n-1}$, 使得 $\lambda_0 = Q(x^0)$. 此时 $Q(x) \geq \lambda_0 \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 特别地, 对任意 $y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, 有

$$\varphi(t) = Q(x^0 + ty) - \lambda_0 \|x^0 + ty\|^2 \geq 0.$$

$\varphi(t)$ 关于 t 为光滑函数, $t=0$ 时取到最小值 0, 故 $\varphi'(0) = 0$. 简单的计算表明

$$\langle y, Ax^0 \rangle + \langle x^0, Ay \rangle - \lambda_0 (\langle x^0, y \rangle + \langle y, x^0 \rangle) = 0.$$

由 A 为对称方阵得 $\langle y, Ax^0 - \lambda_0 x^0 \rangle = 0$. 取 $y = Ax^0 - \lambda_0 x^0$, 由内积的正定性可得 $Ax^0 - \lambda_0 x^0 = 0$. 这说明 λ_0 为 A 的特征值. \square

这个引理的证明可以推广如下: 设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 为子向量空间, 如果 $AV \subset V$, 则称 V 为 A 的一个不变子空间. 令

$$\mu = \inf\{Q(x) \mid x \in V, \|x\| = 1\},$$

则完全类似的证明可以推出 μ 为 A 的特征值.

如果 V 为不变子空间, 则其正交补

$$V^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle = 0, \forall x \in V\}$$

也是 A 的不变子空间; 而如果 μ 为特征值, 则特征子空间

$$V(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mu x\}$$

是不变子空间. 因此, 如果重复上面的证明过程, 我们就可以得到 A 的所有特征值

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r, \quad r \leq n.$$

其中

$$\lambda_i = \min\{Q(x) \mid x \perp V(\lambda_0) \oplus V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_{i-1}), \|x\| = 1\}, \quad i \geq 1.$$

从而有

引理 12.7.2. 设 A 为 n 阶实对称方阵, 则

- (1) A 的特征值全为实数;
- (2) A 为正定矩阵 \iff 其特征值都是正实数.

证明. (1) 以及 (2) 的 “ \implies ” 部分已证.

(2) 的“ \Leftarrow ”: 如果 A 的特征值 $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ 均为正数, 则 \mathbb{R}^n 有正交分解

$$\mathbb{R}^n = V(\lambda_0) \oplus V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r).$$

任给 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x$ 有正交分解

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_r, \quad x_i \in V(\lambda_i),$$

从而

$$Q(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \|x_i\|^2 > 0.$$

即 A 是正定方阵. 或者这样证: 由于特征值都大于零, 因而最小特征值也大于零, 由引理 12.7.1 的证明即知 A 是正定的. \square

引理 12.7.3. 设 A 为 n 阶实对称方阵, 其正特征值个数 (含重数) 为 k , 如果 V 为 \mathbb{R}^n 的子向量空间, 且对任意 $x \in V (x \neq 0)$, 均有 $Q(x) > 0$, 则 $\dim V \leq k$.

证明. (反证法) 设 $\dim V > k$, 记 A 的正特征值对应的特征子空间的直和为 V_0 , 则 $\dim V_0 = k$. 考虑正交投影 $P: V \rightarrow V_0$, 因为 $\dim V > \dim V_0$, 故 $\ker P \neq \{0\}$. 从而存在 $x \in V (x \neq 0)$ 使得 $x \perp V_0$. 由引理 12.7.2 的证明易见, 此时必有 $Q(x) \leq 0$, 这就导出了矛盾. \square

现在我们就得到了矩阵正定性的如下判别法:

定理 12.7.4. $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为正定方阵 $\iff \det (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} > 0, \forall 1 \leq k \leq n$.

证明. “ \implies ” 如果 A 正定, 则显然 $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$ 正定, 其特征值全为正实数, 故行列式为正 (行列式为特征值之积).

“ \impliedby ” 对 n 用归纳法. $n=1$ 显然. 设命题对 $n-1$ 成立, 则对于 n 阶方阵, 由归纳假设, $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$ 正定, 这说明 A 在子向量空间 $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ 上正定. 由引理 12.7.3, A 至少有 $n-1$ 个正的特征值. 又因为 $\det A > 0$, 故所有特征值均为正数, 由引理 12.7.2 即知 A 是正定的. \square

§12.7.3 函数的相关性和独立性

在线性代数中, 向量空间中的一组向量有线性相关或线性独立的说法. 我们现在考虑多元函数的类似概念. 设 $f_i: U \rightarrow \mathbb{R} (1 \leq i \leq m)$ 是定义在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的一组连续可微函数. 这一组函数也可以看成向量值函数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的分量, 其中

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U.$$

如果存在开集 $V \supset F(U)$ 上定义连续可微函数 $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\Phi(F) = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_m) \equiv 0, \quad \text{且} \quad \nabla \Phi(y) \neq 0, \quad \forall y \in V,$$

则称 $\{f_i\}$ 在 U 上函数相关.

注. 如果 $\{f_i\}$ 函数相关, 则根据隐函数定理, 存在局部定义的连续可微函数 Ψ , 使得 $\{f_i\}$ 中的某一个函数, 比如 f_j , 可以表示为

$$f_j = \Psi(f_1, f_2, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_m),$$

这种等式也可以用来给出函数相关性的定义.

例 12.7.1. 考察 f_1, f_2, f_3 的函数相关性, 其中

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n x_k, \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad f_3(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

解. 直接的计算表明

$$f_1(x)^2 = f_2(x) + 2f_3(x),$$

因此 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 是函数相关的 (取 $\Phi(y) = y_1^2 - y_2 - 2y_3$).

如果在任意点 $x^0 \in U$ 附近, $\{f_i\}$ 均不是函数相关的, 则称 $\{f_i\}$ 是一组彼此独立的函数. 如何判断函数的相关性或独立性呢? 我们仍然用微分学的基本手段, 即作线性化来研究这一问题. 如果 $\{f_i\}$ 是函数相关的, 则对等式 $\Phi(F) = 0$ 求导, 得到下面的 Jacobi 矩阵之间的等式

$$J\Phi \cdot JF(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

因为 $J\Phi = \nabla\Phi \neq 0$, 上式表明 $\text{Rank} JF(x) < m, \forall x \in U$, 其中 Rank 表示矩阵的秩. 特别地, 我们就得到如下函数独立性的一个判别方法.

定理 12.7.5. 设 $m \leq n$, $\{f_i\}$ 如上. 如果 $\text{Rank} JF(x) = m, \forall x \in U$, 则 $\{f_i\}$ 彼此独立; 特别地, 当 $m = n$ 且 $\det JF(x) \neq 0 \forall x \in U$ 时, $\{f_i\}$ 彼此独立.

注. $\text{Rank} JF(x) = m$ 等价于说向量 $\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$ 线性无关.

例 12.7.2. 设 $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ($1 \leq i \leq n$) 为 \mathbb{R}^n 上的一组线性函数, 则当 $\det A = 0$ 时 $\{f_i\}$ 函数相关; 当 $\det A \neq 0$ 时 $\{f_i\}$ 彼此独立, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

现在我们注意如下事实: 如果作变量替换 $x = \varphi(u)$, 则 $\{f_i(x)\}$ 的函数相关性和独立性与 $\{f_i(\varphi(u))\}$ 的函数相关性和独立性是一样的. 利用这件事实, 我们考虑这样一个特殊情形, 即假设 JF 的秩满足条件

$$\text{Rank} JF(x) \equiv l < m, \quad \forall x \in U.$$

我们来说明在这种情形下, $\{f_i\}$ 在任一点 $x^0 \in U$ 附近都是函数相关的. 事实上, 由于 $JF(x^0) = l$, 不妨设

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq l}}(x^0) \neq 0.$$

考虑函数

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x), x_{l+1}, \dots, x_n),$$

易见 $\det JG(x^0) \neq 0$, 因此, 根据逆映射定理, G 在 x^0 附近可逆, 其逆映射 $\varphi = G^{-1}$ 也是连续可微的, $x = \varphi(u)$ 可视为变量替换. 在这个变量替换下, F 可写为

$$F \circ \varphi(u) = (u_1, u_2, \dots, u_l, F^{l+1}(u), \dots, F^n(u)).$$

因为 $\text{Rank}J(F \circ \varphi) = \text{Rank}JF = l$, 从上式可知

$$\frac{\partial F^i}{\partial u_j} \equiv 0, \quad \forall l+1 \leq i, j \leq n.$$

这说明, 在 $u^0 = G(x^0)$ 附近, F^i ($l+1 \leq i \leq n$) 只依赖于变量 u_1, \dots, u_l . 特别地, 映射 $F \circ \varphi$ 的分量在 $u^0 = G(x^0)$ 附近是函数相关的, 因此 F 的分量在 x^0 附近函数相关.

令

$$\text{Rank}JF = \max_{x \in U} \text{Rank}JF(x),$$

称 $\text{Rank}JF$ 为 F 在 U 上的秩. 如果 JF 在 $x^0 \in U$ 处达到此秩, 则在 x^0 附近 JF 的秩也是 $\text{Rank}JF$. 利用上述讨论, 我们立即得到如下推论

推论 12.7.6. 设 $\{f_i\}$ 以及 F 如上. 如果 JF 在 $x^0 \in U$ 达到最大秩 l , 则它的 l 个分量在 x^0 附近是彼此独立的, 而其余的分量均和这 l 个分量函数相关.

第十三章 多元函数的积分

本章讨论多元函数的积分问题. 我们遵循的理论框架和第六章类似, 主要的困难是, 一元函数的积分区域是区间, 而多元函数的积分区域就要复杂得多. 由于两个变量的函数和更多变量的函数的积分理论并无本质差别, 因此我们从 \mathbb{R}^2 中的积分开始讨论. 多元函数的积分和一元函数的积分之间的差别还有: 多元函数的积分有积分次序的交换问题, 多元函数的积分变量替换公式的证明比一元函数积分的变量替换公式的证明要困难一些.

§13.1 二重 Riemann 积分

设 $[a, b], [c, d]$ 分别为 \mathbb{R} 中的区间, 则 $I = [a, b] \times [c, d]$ 为 \mathbb{R}^2 中的矩形, 其直径 $d(I)$ 和面积 $\sigma(I)$ 分别为

$$d(I) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}, \quad \sigma(I) = (b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

则直线 $x = x_i$ ($0 \leq i \leq m$) 和 $y = y_j$ ($0 \leq j \leq n$) 将 I 分成 mn 个小矩形

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

这些区间的分点连同小矩形称为 I 的一个分割, 记为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2$. 分割 π 的模定义为 $\|\pi\| = \max_{i,j} d(I_{ij})$.

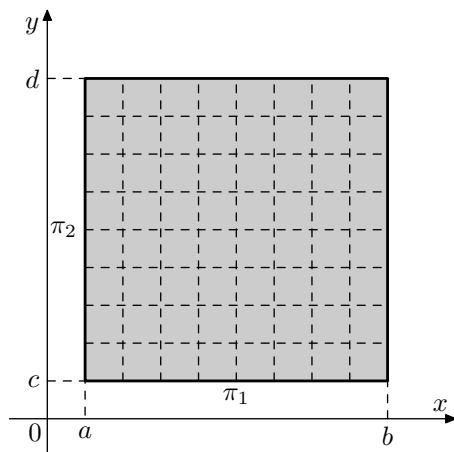


图 13.1 矩形的分割

定义 13.1.1 (矩形中的 Riemann 积分). 假设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为矩形 I 中定义的函数, 如果存在实数 A , 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\sigma(I_{ij}) - A \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} \in I_{ij},$$

则称 f 在 I 中 Riemann 可积或简称可积, A 为 f 在 I 中的积分, 记为

$$A = \int_I f = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

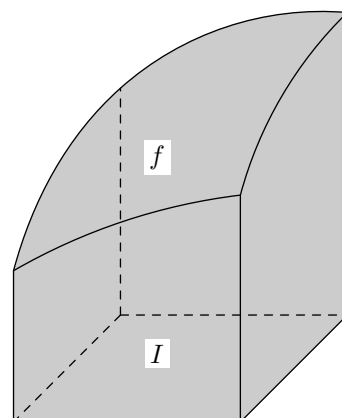


图 13.2 二重积分

注. (1) 我们将 $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\sigma(I_{ij})$ 称为 f 关于分割 π 的一个 Riemann 和, 也记为 $S(f, \pi, \xi)$. 如果 f 可积, 则积分可用极限表示

$$\int_I f = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \pi, \xi).$$

(2) 与一元函数类似, f 在 I 上 Riemann 可积的必要条件是 f 为有界函数.

下面假设 f 为 I 中定义的有界函数. 我们象对一元函数所做过的那样来讨论 f 可积的充分必要条件. 记 $M_{ij} = \sup_{p \in I_{ij}} f(p)$, $m_{ij} = \inf_{p \in I_{ij}} f(p)$, 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij}\sigma(I_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij}\sigma(I_{ij}),$$

$S(\pi)$ 和 $s(\pi)$ 分别是 f 关于分割 π 的 Darboux 上和与 Darboux 下和. 与一元函数一样, 称

$$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij} = \sup_{p \in I_{ij}} f(p) - \inf_{p \in I_{ij}} f(p)$$

为 f 在小矩形 I_{ij} 中的振幅. f 的上和与下和之差可以表示为

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij}\sigma(I_{ij}).$$

如果 $[a, b]$ 的分割 π'_1 是由 π_1 通过添加分点得到, $[c, d]$ 的分割 π'_2 是由 π_2 通过添加分点得到, 则称 $[a, b] \times [c, d]$ 的分割 $\pi' = \pi'_1 \times \pi'_2$ 是 $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ 的一个加细. 对于加细分割, 下面的命题的证明和一元函数完全类似.

命题 13.1.1. 如果 π' 是 π 的加细, 则

$$s(\pi) \leq s(\pi') \leq S(\pi') \leq S(\pi),$$

即分割加细后下和不减, 上和不增.

推论 13.1.2. 对于 I 的任何两个分割 π^1, π^2 , 均有 $s(\pi^1) \leq S(\pi^2)$.

证明. 设 $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2, \pi^2 = \pi'_1 \times \pi'_2$, 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi'_1) \times (\pi_2 \cup \pi'_2),$$

则 π 既是 π^1 的加细, 又是 π^2 的加细, 因此

$$s(\pi^1) \leq s(\pi) \leq S(\pi) \leq S(\pi^2),$$

这说明下和总是不超过上和. □

对于有界函数, 它的上和与下和也都是有界的. 因此可以考虑

$$S(f) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad s(f) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

分别称 $S(f), s(f)$ 为 f 在 I 中的上积分与下积分.

例 13.1.1. 如果 $f(x) = k$ 为常值函数, 则它在 I 上的任何 Riemann 和均为 $k\sigma(I)$, 因此常值函数可积. 同时, 常值函数的上积分和下积分与其积分也相等.

如果 k 为常数, 则易见 $f + k$ 可积当且仅当 f 可积, 且

$$S(f + k) = S(f) + k\sigma(I), \quad s(f + k) = s(f) + k\sigma(I).$$

我们有

定理 13.1.3 (Darboux). 设 f 为 I 中的有界函数, 则

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = S(f), \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = s(f).$$

证明. 我们以上和为例证明第一个等式. 因为 f 有界, 根据刚才的讨论, 不妨设 $0 \leq f \leq M$. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π' , 使得

$$S(\pi') < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $\delta > 0$ 为充分小的正数, 如果 $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 为分割 π' 的一个小矩形, 则将它沿每一条边向其内部平行地内缩 δ 距离, 得 (开) 矩形

$$I_{ij}^{\delta} = (x_{i-1} + \delta, x_i - \delta) \times (y_{j-1} + \delta, y_j - \delta),$$

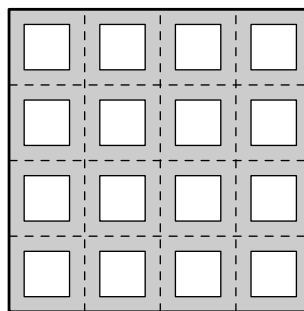


图 13.3 矩形的内缩

记

$$J_\delta = I - \bigcup_{i,j} I_{ij}^\delta,$$

则 J_δ 是一些 (闭) 矩形之并, 其面积 $\sigma(J_\delta)$ 可以定义, 且当 δ 趋于零时, 该面积趋于零. 我们固定一个充分小的 δ , 使得

$$\sigma(J_\delta) < \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

现在设 $\|\pi\| < \delta$, 对于分割 π 中的每一个小矩形来说, 不难看出, 要么它完全含于 J_δ , 要么它完全含于分割 π' 的某个 (开) 矩形之内, 二者必居其一 (也可同时成立). 因此, π 的上和有下面的估计:

$$\begin{aligned} S(f) &\leq S(\pi) \leq M\sigma(J_\delta) + S(\pi') \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2M+1} + S(f) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< S(f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明 $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = S(f)$. □

注. 读者可以思考一下, 这里的证明和一元函数相应的证明有何不同?

有了 Darboux 定理, 下面判断可积性定理的证明和一元函数就没什么不同了.

定理 13.1.4 (可积的充要条件). 设 f 为 I 中的有界函数, 则下列条件等价:

- (1) f 在 I 中 Riemann 可积.
- (2) f 在 I 中的上积分和下积分相等.
- (3) $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \omega_{ij} \sigma(I_{ij}) = 0$.
- (4) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的某个分割 π , 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij} \sigma(I_{ij}) < \varepsilon.$$

对于二元函数, 下面的结果也是成立的.

定理 13.1.5 (Riemann). 设 f 为 I 中定义的有界函数, 则 f 可积当且仅当任给 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 I 的分割 π , 使得

$$\sum_{\{I_{ij} \in \pi | \omega_{ij} \geq \eta\}} \sigma(I_{ij}) < \varepsilon.$$

因为闭矩形中的连续函数一定一致连续, 我们立即得到

推论 13.1.6. 设 f 为矩形 I 中的连续函数, 则 f 是 Riemann 可积的.

和一元函数一样, 我们引入零测集的概念来刻画可积函数.

定义 13.1.2 (零测集). 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个闭矩形 $\{I_i\}$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geq 1} \sigma(I_i) < \varepsilon,$$

则称 A 为零测集.

和一维的情形类似, 我们有

命题 13.1.7. (1) 有限点集均为零测集; (2) 零测集的子集仍为零测集; (3) 可数个零测集之并仍为零测集; (4) 矩形的边界是零测集; (5) 设 ϕ 为 $[a, b]$ 中的一元可积函数, 则其图像 $\text{graph}(\phi) = \{(x, \phi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ 为零测集.

证明. 前三条的证明和一维的情形完全类似, 我们略去.

(4) 设 $\delta > 0$ 为充分小的正数, 将矩形分别内缩 δ 距离和外展 δ 距离, 得到两个矩形, 原矩形的边界包含于这两个矩形之差, 这两个矩形之差可以分为若干小矩形之并. 当 δ 趋于零时, 它们的面积之和趋于零, 因此原矩形的边界为零测集.

(5) 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 ϕ 为一元可积函数, 故可取 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, 其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 ϕ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的振幅, M_i 和 m_i 分别是 ϕ 在该小区间中的上确界与下确界. 因此

$$\{(x, \phi(x)) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \subset [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i] = I_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

这说明

$$\text{graph}(\phi) \subset \bigcup_{i=1}^n I_i.$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \sigma(I_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明 $\text{graph}(\phi)$ 为零测集. □

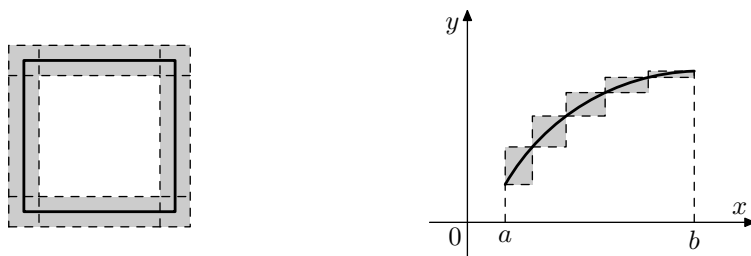


图 13.4 矩形的边界和可积函数的图像

注. 从命题的证明还可以看出, 因为矩形的边界为零测集, 在零测集定义中将“闭矩形”换成“开矩形”也是可以的.

设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 为有界函数, $x \in A$. f 在 x 处的振幅定义为

$$\omega(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in B_r(x) \cap A\}.$$

易见, f 在 x 处连续当且仅当 $\omega(f, x) = 0$. 设 $\delta > 0$, 记

$$D_\delta = \{x \in A \mid \omega(f, x) \geq \delta\},$$

则 f 的间断点 (不连续点) 全体为 $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$.

定理 13.1.8 (Lebesgue). 设 f 为矩形 I 中定义的有界函数. 则 f 可积当且仅当 f 的间断点集 D_f 为零测集.

证明. 这个定理的证明和一元函数相应的 Lebesgue 定理的证明没有本质不同, 只要注意使用本节 Darboux 定理证明中矩形内缩的技巧即可, 留作练习. \square

下面的推论是显然的.

推论 13.1.9. (1) 设 f 是矩形 I 中定义的可积函数, 矩形 J 包含于 I , 则 f 也是 J 中的可积函数; (2) 如果矩形 I 被有限个矩形 $\{J_i\}$ 所覆盖, 且 f 在每个 J_i 中都是可积的, 则 f 在 I 中也是可积的.

为了研究函数在一般集合 (不必为矩形) 中的可积性问题, 我们先引进可求面积集的概念. 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集, 回忆特征函数 $\chi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 的定义:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

定义 13.1.3 (可求面积集). 设 A 为有界集合, I 为包含 A 的矩形. 如果 A 的特征函数 χ_A 在 I 中可积, 则称 A 为可求面积集, 其面积 $\sigma(A)$ 定义为 χ_A 在 I 中的积分.

有界集合 A 是否可求面积以及面积的大小与定义中矩形 I 的选取无关. 如果 A 本身就是一个矩形, 则按此定义给出的面积和矩形的面积公式给出的面积相同.

命题 13.1.10. 设 A 为有界集合, 则 A 可求面积当且仅当其边界 ∂A 为零测集. 特别地, 当 A 可求面积时, 其闭包 \bar{A} 也可求面积.

证明. 取矩形 $I \supset \bar{A}$, 且 \bar{A} 与 I 的边界不相交. 易见, 特征函数 χ_A 在 I 中的间断点集恰为 ∂A . 由 Lebesgue 定理可知 A 为可求面积集当且仅当 ∂A 为零测集. 由 $\partial \bar{A} \subset \partial A$ 可知, 当 A 可求面积时 \bar{A} 也可求面积. \square

有了这些预备, 我们可以考虑函数在一般集合中的积分了. 为了简单起见, 我们只考虑函数在可求面积集中的积分. 设 A 是可求面积的有界集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 为 A 中定义的有界函数, 将 f 零延拓为 \mathbb{R}^2 中的函数 f_A 如下:

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

定义 13.1.4. 设 A 和 f 如上, I 为包含 A 的矩形. 如果 f_A 在 I 中可积, 则称 f 在 A 中可积, 其积分定义为 f_A 在 I 中的积分, 即

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

这个定义也和矩形 I 的选取无关. 当 A 本身就是矩形时, 这个定义和矩形中积分的定义是一致的. 下面的定理给出了函数在可求面积的集合中可积的判别条件.

定理 13.1.11. 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是可求面积集合 A 中定义的有界函数. 则 f 可积当且仅当 f 在 A 中的间断点集为零测集.

证明. 取矩形 $I \supset \bar{A}$, 且 \bar{A} 与 I 的边界不相交. 由定义, f 在 A 中可积当且仅当 f_A 在 I 中可积. 根据 Lebesgue 定理, f_A 可积当且仅当其间断点集为零测集. 因为在 $I \setminus \bar{A}$ 中 f_A 为零, 因此 f_A 的间断点都在 \bar{A} 中. 又由于 ∂A 为零测集, 故 f_A 可积当且仅当 f_A 在 $A \setminus \partial A$ 中的间断点集为零测集. 在 $A \setminus \partial A$ 中 $f_A = f$, 因此 f_A 可积当且仅当 f 在 $A \setminus \partial A$ 中的间断点集是零测集, 也就是说当且仅当 f 在 A 中的间断点集为零测集. \square

习题 13.1

1. 证明, 如果 f, g 均为矩形 I 中的可积函数, 则 fg 也是 I 中的可积函数.
2. 证明, 如果 f, g 分别是 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 中的一元可积函数, 则 $f(x)g(y)$ 是矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 中的可积函数.
3. 直接证明只有有限个间断点的有界函数是 Riemann 可积的.
4. 设函数 $f(x, y)$ 定义在矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 中, 且对于每一个固定的 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 是关于 y 的单调递增函数, 而对于每一个 $y \in [c, d]$, $f(x, y)$ 是关于 x 的单调递增函数. 证明 f 是可积的.
5. 设非负函数 f 在矩形 I 中可积, 则 \sqrt{f} 在 I 中也可积.
6. 设 f 是 $[a, b]$ 中的一元连续函数, $\varphi: I \rightarrow [a, b]$ 为矩形 I 中的可积函数, 则复合函数 $f \circ \varphi$ 为矩形 I 中的可积函数.

7. 设 f 在矩形 I 中连续, 映射 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : J \rightarrow I$ 的两个分量均为矩形 J 中的可积函数, 则复合函数 $f \circ \varphi$ 为 J 中的可积函数.
8. 设 I, J 为矩形, 且 $I \subset J$. 证明特征函数 χ_I 在 J 中可积, 且其积分为 I 的面积.
9. 设 A 为 \mathbb{R} 中的零测集. 证明 $A \times \mathbb{R}$ 为 \mathbb{R}^2 中的零测集.
10. 设 $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为连续曲线, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. 如果 $x(t)$ 或 $y(t)$ 连续可微, 则 $\gamma((a, b))$ 为 \mathbb{R}^2 中的零面积集.
11. 设 $D(x)$ 是区间 $[a, b]$ 中定义的 Dirichlet 函数, 它的图像是否为零测集?
12. 矩形 $I = [a, b] \times [c, d]$ 中的 Dirichlet 函数 $D(x, y)$ 定义为: 当 x, y 均为有理数时 $D(x, y) = 1$, 否则 $D(x, y) = 0$. 证明 $D(x, y)$ 不可积, 再用 Lebesgue 定理说明矩形不是零测集.

§13.2 多重积分及其基本性质

前面一节关于二元函数积分的理论可以直接推广多元函数. 在 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 中, 称点集

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

为一个 n 维矩形, 其直径 $d(I)$ 和体积 $v(I)$ 分别为

$$d(I) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}, \quad v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

设区间 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 有分割

$$\pi_i : a_i = x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{m_i}^i = b_i,$$

这时超平面 $x_i = x_j^i$ ($i = 1, 2, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m_i$) 将 I 分割成 $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ 个小 n 维矩形

$$I_{i_1 \cdots i_n} = [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times \cdots \times [x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n], \quad 1 \leq i_1 \leq m_1, \cdots, 1 \leq i_n \leq m_n.$$

这些小矩形所形成的分割记为 $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$, 定义

$$\|\pi\| = \max_{i_1 \cdots i_n} d(I_{i_1 \cdots i_n}),$$

称为分割 π 的模.

定义 13.2.1 (n 维矩形上的 Riemann 积分). 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 n 维矩形 I 中定义的函数. 如果存在实数 A , 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$\left| \sum_{i_1 \cdots i_n} f(\xi_{i_1 \cdots i_n}) v(I_{i_1 \cdots i_n}) - A \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{i_1 \cdots i_n} \in I_{i_1 \cdots i_n},$$

则称 f 在 I 中 Riemann 可积或简称可积, A 为 f 在 I 中的积分, 记为

$$A = \int_I f = \int_I f(x) dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

多元函数积分的理论与二元函数积分的理论是完全类似的, 我们不再重复叙述, 只是指出 \mathbb{R}^n 中零测集和可求体积集分别对应于 \mathbb{R}^2 中的零测集和可求面积集, 读者可以自行写出它们的定义.

下面考虑积分的基本性质.

命题 13.2.1. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为可求体积, f, g 在 A 中可积. 则 $fg, |f|, \lambda f + \mu g$ 均可积, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 且

$$\int_A (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_A f + \mu \int_A g.$$

当 $f \geq g$ 时, $\int_A f \geq \int_A g$. 特别地, 有 $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

证明. 只需在矩形中考虑即可, 留作练习. □

命题 13.2.2. 设集合 A 可求体积, $I \supset A$ 为矩形, 则 $I \setminus A$ 可求体积, 且 $v(I \setminus A) = v(I) - v(A)$. 设 A, B 均可求体积, 则 $A \cap B, A \cup B$ 也可求体积, 且 $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$.

证明. 在矩形 I 中, 特征函数 $\chi_{I \setminus A} = 1 - \chi_A$, 这说明 $I \setminus A$ 可求体积, 且

$$v(I \setminus A) = \int_I (1 - \chi_A) = v(I) - v(A).$$

同理, 由 $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ 可知 $A \cap B$ 可求体积. 由

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

可知 $A \cup B$ 可积, 且 $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$. □

推论 13.2.3. 矩形不是零测集.

证明. 设 $\{I_i\}$ 为至多可数个矩形, 它们覆盖了矩形 I . 不妨设 $\{I_i\}$ 均为开矩形. 根据有限覆盖定理, 存在有限个 I_i ($i \leq k$) 使得它们仍然覆盖 I . 这说明

$$v(I) \leq v\left(\bigcup_{i \leq k} I_i\right) \leq \sum_{i \leq k} v(I_i),$$

特别地, I 不可能为零测集. □

命题 13.2.4. A 为可求体积集且体积为零当且仅当任给 $\varepsilon > 0$, 存在有限个矩形 $\{I_i\}$, 使得

$$A \subset \bigcup_i I_i, \quad \sum_i v(I_i) < \varepsilon.$$

证明. 设 A 体积为零, 由刚才的推论可知 A 不含内点, 从而 $A \subset \partial A$. 由 A 可求体积可知 ∂A 为零测集. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个矩形 $\{I_i\}$, 使得

$$\partial A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i, \quad \sum_{i \geq 1} v(I_i) < \varepsilon.$$

因为 ∂A 为有界闭集, 根据有限覆盖定理, 存在 k 使得

$$A \subset \bigcup_{i \leq k} I_i, \quad \sum_{i \leq k} v(I_i) < \varepsilon.$$

反之, 如果上式成立, 则对 \bar{A} 也满足上式, 这说明 \bar{A} 为零测集. 特别地, $\partial A \subset \bar{A}$ 为零测集, 从而 A 可求体积. 此时

$$v(A) \leq v\left(\bigcup_{i \leq k} I_i\right) \leq \sum_{i \leq k} v(I_i) < \varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知 $v(A) = 0$. □

定理 13.2.5 (积分中值定理). 设 A 为可求体积的有界集合, f, g 为 A 中的可积函数. 如果 g 在 A 中不变号, 则存在 $\mu \in \mathbb{R}$, 使得

$$\int_A fg = \mu \int_A g,$$

其中 $\inf_A f \leq \mu \leq \sup_A f$.

证明. 不妨假设 $g \geq 0$, 则

$$(\inf_A f)g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\sup_A f)g(x), \quad \forall x \in A.$$

由 fg 可积可得

$$(\inf_A f) \int_A g \leq \int_A fg \leq (\sup_A f) \int_A g,$$

如果 $\int_A g = 0$, 则上式表明 fg 在 A 上的积分也为零, 此时 μ 可任意取值. 设 $\int_A g > 0$, 则

$$\inf_A f \leq \left[\int_A g \right]^{-1} \int_A fg \leq \sup_A f,$$

令

$$\mu = \left[\int_A g \right]^{-1} \int_A fg,$$

则 μ 满足定理的要求. □

推论 13.2.6. 设 A 为可求体积的连通闭集, f 为 A 中的连续函数. 如果 g 是 A 中不变号的可积函数, 则存在 $\xi \in A$, 使得

$$\int_A fg = f(\xi) \int_A g,$$

证明. 利用积分中值定理和连续函数的介值定理即可. □

习题 13.2

1. 类比于 \mathbb{R}^2 , 试给出 \mathbb{R}^n 中零测集的定义.
2. 证明, n 维矩形的边界是 \mathbb{R}^n 中的零体积集; \mathbb{R}^n 中的超平面是零测集.
3. 设 f 在 n 维矩形 I 中可积, $J \subset I$ 为子矩形. 则 f 在 J 中也可积.
4. 设 A 可求体积且体积为零, 则任何有界函数在 A 中均可积且积分为零.
5. 设 A 可求体积, f, g 在 A 中可积, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 也在 A 中可积.
6. 设 A, B 可求体积且 $A \subset B$, 则 $B \setminus A$ 可求体积, 且 $v(B \setminus A) = v(B) - v(A)$.
7. 设 A 可求体积, 则 \bar{A} 也可求体积且 $v(\bar{A}) = v(A)$.
8. 设 A_1, \dots, A_k 为可求体积的有界集合, 则 $A_1 \cup \dots \cup A_k$ 可求体积, 且

$$v(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} (-1)^{i-1} v(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}).$$

进一步将上式推广到函数积分的情形.

9. 设 f 为矩形 I 上的非负连续函数, 则 $\int_I f \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $f \equiv 0$.
10. 设 $f > 0$ 为矩形 I 上的可积函数, 则积分 $\int_I f > 0$.
11. 利用积分中值定理, 证明

$$1.96 \leq \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} < 2.$$

12. 设 f 为连续函数, 求极限

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dxdy.$$

§13.3 重积分的计算

我们现在讨论重积分的计算问题. 重积分的一个常用的计算方法就是转化为一元函数的积分去处理. 我们先以矩形上的二重积分为例加以说明.

设 $f(x, y)$ 为矩形 $I = [a, b] \times [c, d]$ 中的有界函数. 对于每一个固定的 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 可以看成区间 $[c, d]$ 中关于 y 的函数, 它在 $[c, d]$ 中的下积分和上积分分别记为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 这样我们就得到了定义在 $[a, b]$ 中的两个有界函数.

定理 13.3.1. 设 $f(x, y)$ 在 I 中可积, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 中均可积, 且

$$\int_I f = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx.$$

证明. 用记号 π_1, π_2 分别表示 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 的分割:

$$\pi_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

I 的相应分割记为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2$. 因为 f 在 I 中可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时

$$\int_I f - \varepsilon < \sum_{ij} f(\xi_{ij}) \sigma(I_{ij}) < \int_I f + \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} = (\xi_i, \eta_j) \in I_{ij}.$$

特别地, 当 $\|\pi_1\| < \delta/\sqrt{2}$, $\|\pi_2\| < \delta/\sqrt{2}$ 时, 上式成立. 此时有

$$\begin{aligned} \int_I f - \varepsilon &\leq \sum_{ij} \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq \sum_{ij} \sup_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \leq \int_I f + \varepsilon, \end{aligned}$$

因为 $\sum_{j=1}^n \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j$ 是函数 $f(\xi_i, y)$ 在 $[c, d]$ 上的 Darboux 下和, 故

$$\sum_{j=1}^n \inf_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \leq \varphi(\xi_i).$$

同理

$$\sum_{j=1}^n \sup_{\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \geq \psi(\xi_i).$$

因此我们得到

$$\int_I f - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \varphi(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m \psi(\xi_i) \Delta x_i \leq \int_I f + \varepsilon.$$

这说明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 中均可积, 且积分等于 f 在 I 中的积分. \square

推论 13.3.2. 设 $f(x, y)$ 在矩形 I 中可积. 如果对于每一个 $x \in [a, b]$, 变量 y 的函数 $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 中可积, 则

$$\int_I f = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

同理, 如果对于每一个 $y \in [c, d]$, 变量 x 的函数 $f(x, y)$ 在 $[a, b]$ 中可积, 则

$$\int_I f = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

推论 13.3.3. 设 $f(x, y)$ 为矩形 I 中的连续函数, 则有

$$\int_I f = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

上式最左边为重积分, 右边称为累次积分.

对于多重积分, 类似的结果也成立. 例如, 三重积分在一定条件下可以化为二重积分和一重积分.

例 13.3.1. 设 $I = [0, 1] \times [0, 1]$, 计算积分

$$\iint_I \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

解. 被积函数是连续函数, 因此

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

例 13.3.2. 设 $I = [0, 1] \times [0, 1]$, 计算积分 $\int_I f$, 其中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & x + y \leq 1, \\ 0, & x + y > 1. \end{cases}$$

解. 函数 f 为连续函数, 故

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 13.3.3. 设 $I = [0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, 计算积分

$$\int_I \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}.$$

解. 被积函数是连续函数, 因此

$$\begin{aligned} \int_I \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{(2+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) - \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} (5 \ln 2 - 3 \ln 3). \end{aligned}$$

现在我们讨论一般区域上重积分化累次积分的问题, 这往往可以通过考虑矩形上的积分予以解决.

定理 13.3.4. 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为可求面积的有界集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 为有界连续函数. 记 A 在 x 轴上的垂直投影为

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } (x, y) \in A\}.$$

如果对于每一点 $x \in I$, $A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ 是区间 (可退化为一点), 则

$$\int_A f = \int_I dx \int_{A_x} f(x, y) dy.$$

同理, 记 A 在 y 轴上的垂直投影为

$$J = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } (x, y) \in A\}.$$

如果对于每一点 $y \in J$, $A^y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ 是区间 (可退化为一点), 则

$$\int_A f = \int_J dy \int_{A^y} f(x, y) dx.$$

证明. 因为 A 可求面积, f 有界连续, 故 f 可积. 取包含 A 的矩形 $[a, b] \times [c, d]$, 则 f_A 在 $[a, b] \times [c, d]$ 中可积. 当 $x \in I$ 时, $f_A(x, y)$ 关于 y 在 $[c, d]$ 中的积分等于连续函数 $f(x, y)$ 关于 y 在区间 A_x 中的积分. 当 $x \in [a, b] \cap I^c$ 时 $f_A(x, y) = 0$. 因此, 对于每一个 $x \in [a, b]$, $f_A(x, y)$ 关于 y 在 $[c, d]$ 中均可积, 从而有

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_{[a, b] \times [c, d]} f_A = \int_a^b dx \int_c^d f_A(x, y) dy \\ &= \int_I dx \int_c^d f_A(x, y) dy = \int_I dx \int_{A_x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

关于 y 轴投影的结果完全类似. □

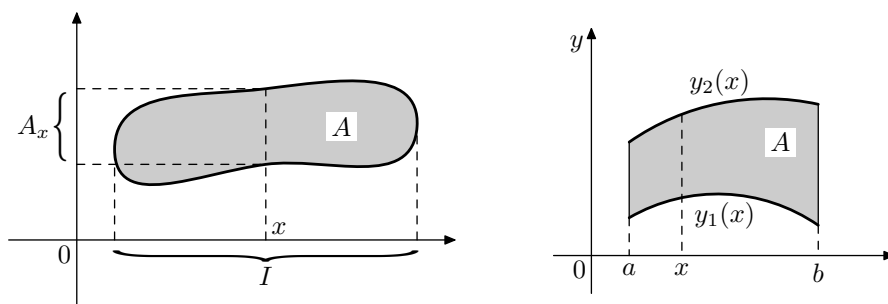


图 13.5 多重积分的投影法

注. 只要 f 在 A 中可积, 且 $f(x, y)$ 关于 y 在每一个区间 A_x 中可积, 则定理的第一个结论仍然成立, 第二个结论类似. 定理中的这种计算重积分的方法称为“投影法”.

设 $y_1(x) \leq y_2(x)$ 为 $[a, b]$ 中定义连续函数, 考虑有界集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\},$$

其边界为零测集, 因此 A 可求面积. A 和与 x 轴垂直的直线的交要么为空集, 要么为区间, 因此得到

定理 13.3.5. 设 y_1, y_2 和 A 如上. 函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 可积, 且对于每一个 $x \in [a, b]$, 关于 y 的积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

存在, 则

$$\int_A f = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

证明. 证明和上一定理类似, 略. □

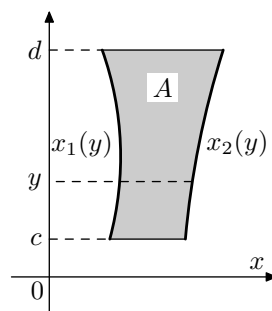
同样, 如果 A 形如

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\},$$

在类似条件下就有

$$\int_A f = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

对于一般的 n 重积分, 类似的结果也成立 (把区间换成矩形), 我们仅举例说明.

图 13.6 向 y 轴的投影

例 13.3.4. 计算积分

$$I = \int_A x^2 y^2 dx dy,$$

其中 A 是由直线 $y = 0$, $x = 1$ 和 $y = x$ 围成的三角形区域.

解. 利用向 x 轴作投影, 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3} x^5 dx = \frac{1}{18}.$$

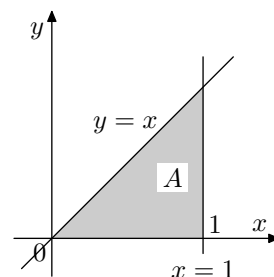


图 13.7 三角区域投影

例 13.3.5. 计算积分

$$I = \int_A y^2 dx dy,$$

其中 A 是由直线 $2x - y - 1 = 0$ 与抛物线 $x = y^2$ 所围成的区域.

解. 直线 $2x - y - 1 = 0$ 与抛物线 $x = y^2$ 的交点为 $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 和 $(1, 1)$. 利用向 y 轴作投影, 得

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y^2}^{\frac{y+1}{2}} y^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [\frac{1}{2} y^2 (y+1) - y^4] dy = \frac{63}{640}.$$

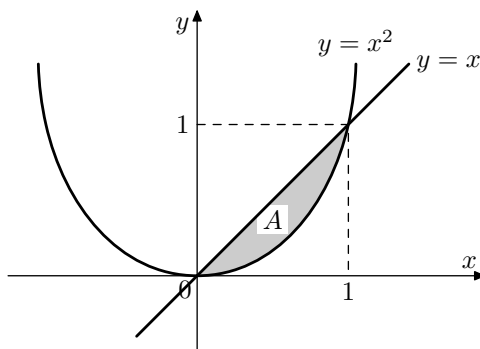
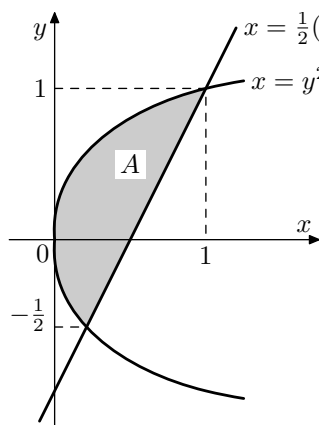


图 13.8 直线和抛物线相交区域的投影

例 13.3.6. 计算积分

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解. 这个积分必须交换次序才行. 它可以看成连续函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在由直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域上的积分, 因而

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx = 1 - \sin 1.$$

例 13.3.7. 用投影法求平面中圆的面积.

解. 设 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ 为平面上圆心在 (x_0, y_0) , 半径为 r 的圆. 向 x 轴做投影得区间 $I = [x_0 - r, x_0 + r]$, 任给 $x \in I$, 圆所截出的区间长度为 $2\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$, 因此圆的面积为

$$\begin{aligned} v &= \int_{x_0-r}^{x_0+r} 2\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi r^2. \end{aligned}$$

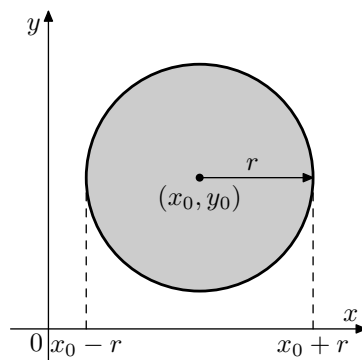


图 13.9 圆盘的投影

例 13.3.8. 在区域 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq a\}$ ($a > 0$) 上计算积分 $\int_A xy dx dy$.

解. 被积函数是连续函数, 因此

$$\int_A xy dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} xy dy = \int_0^a \frac{1}{2} x(a-x)^2 dx = \frac{a^4}{24}.$$

例 13.3.9. 在如下区域 ($a > 0$)

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq a\}$$

上计算积分 $\int_A xyz dx dy dz$.

解. 利用上例, 有

$$\begin{aligned} \int_A xyz dx dy dz &= \int_0^a dx \iint_{\substack{y, z \geq 0, \\ y+z \leq a-x}} xyz dy dz \\ &= \int_0^a \frac{1}{24} x(a-x)^4 dx = \frac{1}{720} a^6. \end{aligned}$$

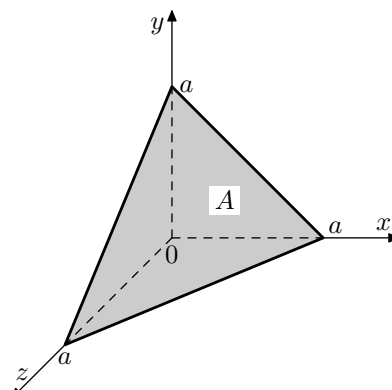


图 13.10 三角面的投影

例 13.3.10. 求 n 维单形 $\Delta_n(a)$ ($a > 0$) 的体积, 其中

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\}.$$

解. 被积区域 $\Delta_n(a)$ 可以表示为

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a - x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq a - x_1 - \dots - x_{n-1}\},$$

因此

$$v(\Delta_n(a)) = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n.$$

在上式右端中对各个一元积分依次做变量替换

$$y_n = x_1 + \cdots + x_n, \cdots, y_2 = x_1 + x_2, y_1 = x_1,$$

得

$$\begin{aligned} v(\Delta_n(a)) &= \int_0^a dy_1 \int_{y_1}^a dy_2 \cdots \int_{y_{n-1}}^a dy_n \\ &= \int_0^a dy_1 \int_{y_1}^a dy_2 \cdots \int_{y_{n-2}}^a (a - y_{n-1}) dy_{n-1} \\ &= \cdots = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a (a - y_1)^{n-1} dy_1 \\ &= \frac{a^n}{n!}. \end{aligned}$$

习题 13.3

1. 计算下列积分:

(1) $\int_I \frac{x^2}{2-y^2} dx dy, I = [0, 1] \times [0, 1];$

(2) $\int_I \sin(x+y) dx dy, I = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2];$

(3) $\int_A \sin^2 x dx dy, A$ 是由 $y=0, x=\sqrt{\pi/2}, y=x$ 所围成的区域;

(4) $\int_A \frac{x^2}{y^2} dx dy, A$ 是由 $x=2, y=x$ 和 $xy=1$ 所围成的区域;

(5) $\int_A xy^2 dx dy, A$ 是由 $y^2=2px, x=p/2 (p>0)$ 所围成的区域.

2. 求由平面 $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0$ 与 $z=xy^2$ 所围区域的体积.

3. 求由平面 $x=-1, x=1, y=-1, y=2, z=0$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积.

4. 计算曲面 $|x|+|y|+|z|=a (a>0)$ 所围成的区域的体积.

5. 求曲面 $z=xy$, 平面 $z=x+y, x+y=1, x=0, y=0$ 所围成区域的体积.

6. 设 $A = \{(x, y, z, w) | x, y, z, w \geq 0, x+y+z+w \leq a\}$, 计算积分

$$\int_A xyzw dx dy dz dw.$$

7. 如果一元函数 f, g 分别在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 中可积, 证明

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_c^d g(y) dy \right].$$

8. 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times [a, b]$ 中的连续函数, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

9. 设 f 为 $[a, b]$ 中的可积函数, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y)(b-y) dy.$$

10. 设 f 为 $[a, b]$ 中的可积函数, 证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^x f(y) dy = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

11. 设 f 为 $[a, b]$ 中的可积函数, 证明

$$\int_a^b f(x_1) dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_a^b f(x) dx \right]^n.$$

12. 计算下列 n 重积分:

$$(1) \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n; \quad (2) \int_{[0,1]^n} (x_1 + \cdots + x_n)^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

13. 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中定义函数 $f(x, y)$ 如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数,} \\ 3y^2, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

证明 f 不可积, 但累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ 存在.

14. 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中定义函数 $f(x, y)$ 如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \text{ 都是或都不是无理数,} \\ \frac{1}{p}, & x = \frac{r}{p} \text{ 为既约分数, } y \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{q}, & x \text{ 为无理数, } y = \frac{s}{q} \text{ 为既约分数.} \end{cases}$$

证明 f 可积, 但它的累次积分不存在.

15. 设 f 为 $[a, b]$ 中的非负函数, 记

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

证明, A_f 可求面积当且仅当 f 可积, 此时 A_f 的面积为 f 在 $[a, b]$ 上的积分.

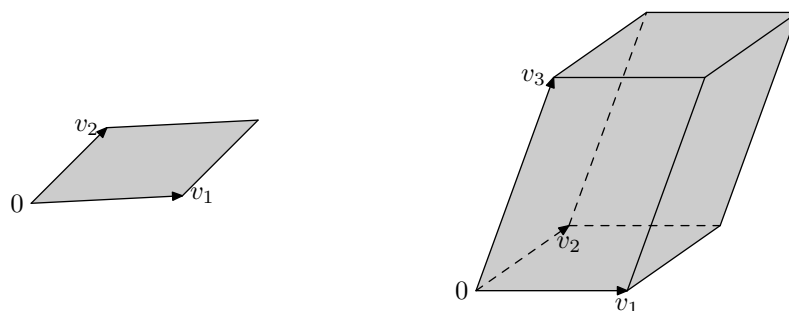


图 13.11 平行多面体的体积

§13.4 重积分的变量替换

在前一节, 我们介绍了计算重积分的“投影法”, 这个方法可以计算很多重积分. 不过, 这个投影法也有局限性: 只能向坐标轴或坐标面做投影. 一个自然的问题就是能否向任意方向做投影得到计算公式? 比如, 考虑下面的简单图形:

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \quad (13.1)$$

其中 v_i ($1 \leq i \leq n$) 为 \mathbb{R}^n 中的向量. 当 $n = 2$ 且 v_1, v_2 线性无关时, $P(v_1, v_2)$ 为平面上的平行四边形. 如果这个平行四边形有一条边和坐标轴平行, 则用投影法可以得出其面积公式. 一般的情形如何处理? 这是我们在本节要讨论的问题.

§13.4.1 仿射变换

(1) 平移变换. 设 $v_0 \in \mathbb{R}^n$ 为固定的向量, 考虑仿射线性变换 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = x + v_0$. 根据矩形体积的平移不变性容易知道, 如果 $A \subset \mathbb{R}^n$ 可求体积, 则 $\varphi(A)$ 也是可求体积的, 并且体积不变, 这可称为体积的平移不变性.

(2) 伸缩变换. 设 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

矩形 $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ 在 φ 下的像仍为矩形 (可以退化), 其体积为

$$v(\varphi(I)) = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| v(I) = |\det(\varphi)| v(I).$$

将矩形 I 换成一般的可求体积的图形, 上述公式仍然成立, 这可从下面的覆盖引理看出.

引理 13.4.1 (覆盖引理之一). 设 A 为 \mathbb{R}^n 中可求体积的有界集合, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在有限个矩形 $\{I_i\}$ 与 $\{J_j\}$, 使得

$$\bigcup_i I_i \subset A, \quad \sum_i v(I_i) > v(A) - \varepsilon; \quad \bigcup_j J_j \supset A, \quad \sum_j v(J_j) < v(A) + \varepsilon,$$

其中 $\{I_i\}$ 的内部互不相交.

证明. 取包含 A 的矩形 I , 由体积的定义, 有

$$\int_I \chi_A = v(A).$$

因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的分割 $\pi = \{I_{ij}\}$, 使得

$$\left| \sum_{ij} \chi_A(\xi_{ij})v(I_{ij}) - v(A) \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_{ij} \in I_{ij}.$$

根据特征函数的定义, 显然有

$$\sum_{ij} \inf_{\xi_{ij} \in I_{ij}} \chi_A(\xi_{ij})v(I_{ij}) = \sum_{I_{ij} \subset A} v(I_{ij}),$$

因此, 对于分割 π 就有

$$v(A) - \varepsilon < \sum_{I_{ij} \subset A} v(I_{ij}) \leq v(A).$$

同理

$$\sum_{ij} \sup_{\xi_{ij} \in I_{ij}} \chi_A(\xi_{ij})v(I_{ij}) = \sum_{I_{ij} \cap A \neq \emptyset} v(I_{ij}),$$

此时有

$$v(A) \leq \sum_{I_{ij} \cap A \neq \emptyset} v(I_{ij}) < v(A) + \varepsilon.$$

这就证明了引理. □

注. 从证明可以看出, 那些内部与 ∂A 有非空交的矩形的体积之和不超过 2ε . 同时, 也可以看出伸缩变换将可求体积的集合变为可求体积的集合.

例 13.4.1. 设 $a > 0$, 求 n 维单形 $\Delta_n(a)$ 体积, 其中

$$\Delta_n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\}.$$

解. 这个例子我们在前节算过, 现在用递推的办法再算一次. 利用伸缩变换 $\varphi(x) = ax$ 易见

$$v(\Delta_n(a)) = v(\Delta_n(1))a^n.$$

为了简单起见, 记 $v(\Delta_n(1)) = v_n$, 我们只要求出 v_n 就可以了. 利用投影法, 有

$$v_{n+1} = \int_0^1 v(\Delta_n(1-x_1)) dx_1 = v_n \int_0^1 (1-x_1)^n dx_1 = \frac{1}{n+1} v_n.$$

由 $v_1 = 1$ 以及上述递推式即得 $v_n = \frac{1}{n!}$, 因此 $v(\Delta_n(a)) = \frac{1}{n!} a^n$, 这和上节的计算结果一致. □

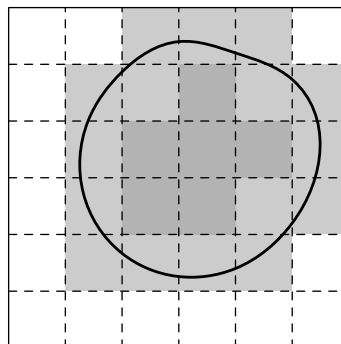


图 13.12 覆盖引理之一

例 13.4.2. 求中心在 $x^0 \in \mathbb{R}^n$, 半径为 r 的 n 维球体 $\overline{B_r(x^0)}$ 的体积, 其中

$$\overline{B_r(x^0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x^0) \cdot (x - x^0) \leq r^2\}$$

解. 根据体积的平移不变性, 不妨设 x_0 为原点. 半径为 r 的 n 维球体的体积记为 $\omega_n(r)$. 利用伸缩变换可知 $\omega_n(r) = \omega_n(1)r^n$, 为了简单起见, 记 $\omega_n = \omega_n(1)$. 利用投影法, 得

$$\begin{aligned}\omega_{n+1} &= \int_{-1}^1 \omega_n(\sqrt{1-x_1^2}) dx_1 \\ &= \omega_n \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{n/2} dx_1 \\ &= 2\omega_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt = 2\omega_n J_{n+1}.\end{aligned}$$

其中, J_{n+1} 在 §6.3 节中已经计算过:

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad \forall k \geq 0.$$

根据 $\omega_1 = 2$ 以及上述递推公式可得

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_{n+2} = \omega_n \frac{2\pi}{n+2}, \quad n \geq 1.$$

由此进一步得到

$$\omega_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \omega_{2k-1} = \frac{2^k \pi^{k-1}}{(2k-1)!!}, \quad k \geq 1. \quad (13.2)$$

我们有如下简单估计:

$$2^n n^{-n/2} \leq \omega_n \leq 2^n. \quad (13.3)$$

事实上, 矩形 $[-r, r]^n$ 的外接球半径为 \sqrt{nr} , 因此 $(2r)^n \leq \omega_n(\sqrt{nr})^n$; 同理, 矩形 $[-r, r]^n$ 的内接球半径为 r , 因此 $\omega_n r^n \leq (2r)^n$.

例 13.4.3. 设 a_i ($1 \leq i \leq n$) 为正实数, 求如下椭球的体积

$$E(a_1, \dots, a_n) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}.$$

解. 利用伸缩变换 $x_i = a_i t_i$ ($1 \leq i \leq n$) 可得椭球体积为 $(a_1 a_2 \cdots a_n) \omega_n$, 其中 ω_n 是上例中的 n 维单位球的体积. \square

(3) 正交变换. 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正交变换, 在 \mathbb{R}^n 的标准基 $\{e_i\}$ 下 φ 表示为

$$\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)O,$$

其中 O 为正交矩阵, 即 $OO^T = O^T O = I_n$ 其中 I_n 为单位方阵. 我们将说明正交变换保持体积不变.

引理 13.4.2 (覆盖引理之二). 设 A 为 \mathbb{R}^n 中可求体积的有界集合, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在有限个 n 维球体 $\{B_i\}$ 与 $\{B^j\}$, 使得

$$\bigcup_i B_i \subset A, \quad \sum_i v(B_i) > v(A) - \varepsilon; \quad \bigcup_j B^j \supset A, \quad \sum_j v(B^j) < v(A) + \varepsilon,$$

其中 $\{B_i\}$ 的内部互不相交.

证明. 先设 $v(A) > 0$. 与引理 13.4.1 的证明类似, 先取矩形 $I = [a, b]^n$ 使得 $A \subset I$. 将 I 作 m^n 等分, 当 m 充分大时, 完全包含于 A 的小矩形 $\{I_i^1\}$ 的体积之和满足条件

$$\sum_i v(I_i^1) > \frac{1}{2}v(A).$$

矩形 I_i^1 的内接球记为 B_i^1 , 则根据前面例子中球体的体积公式, 有

$$\sum_i v(B_i^1) = \frac{\omega_n}{2^n} \sum_i v(I_i^1) > \frac{\omega_n}{2^{n+1}} v(A).$$

记

$$q = 1 - \frac{\omega_n}{2^{n+1}},$$

则 $0 < q < 1$, 且

$$0 < v\left(A \setminus \bigcup_i B_i^1\right) < qv(A).$$

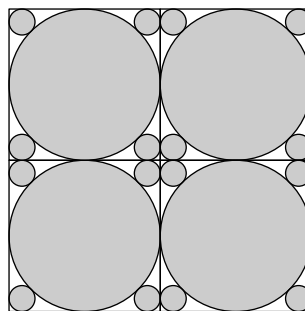


图 13.13 覆盖引理之二

对 $A \setminus \bigcup_i B_i^1$ 重复上述过程, 可得包含于 $A \setminus \bigcup_i B_i^1$ 的有限个球体 $\{B_{i'}^2\}$, 使得

$$0 < v\left(A \setminus \bigcup_i B_i^1 \setminus \bigcup_{i'} B_{i'}^2\right) < qv\left(A \setminus \bigcup_i B_i^1\right) < q^2v(A).$$

这一过程可继续重复. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由于 $q^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 当 k 充分大时, 就得到内部互不相交的有限个 n 维球体 $\{B_i\}$, 使得

$$0 < v\left(A \setminus \bigcup_i B_i\right) < q^k v(A) < n^{-n/2} \varepsilon / 2.$$

现在, 对于 $\tilde{A} = A \setminus \bigcup_i B_i$, 仍然考虑矩形 I 的 m^n 等分, 当 m 充分大时, 存在覆盖 \tilde{A} 的小矩形 $\{I^j\}$, 使得

$$\sum_j v(I^j) < v(\tilde{A}) + n^{-n/2} \varepsilon / 2 < n^{-n/2} \varepsilon.$$

矩形 I^j 的外接球记为 B_2^j , 则

$$\sum_j v(B_2^j) = \frac{\omega_n n^{n/2}}{2^n} \sum_j v(I^j) < \frac{\omega_n n^{n/2}}{2^n} n^{-n/2} \varepsilon \leq \varepsilon.$$

这说明 $\{B_i, B_2^j\}$ 是覆盖 A 的 n 维球, 它们的体积之和满足引理的要求.

最后一段的证明对于 $v(A) = 0$ 的情形也适用, 这样就完全证明了引理. \square

推论 13.4.3. 正交变换保持体积不变.

证明. 注意到正交变换将 n 维球映为 n 维球, 且球的半径不变 (从而体积不变). 特别地, 根据覆盖引理, 正交变换将零体积集映为零体积集. 再注意到正交变换将集合的边界点映为边界点, 内点映为内点, 因此将可求体积的集合映为可求体积的集合. 再由覆盖引理以及正交变换保持球体体积不变即知正交变换保持可求体积集合的体积不变. \square

例 13.4.4. 设 P 为 n 阶正定对称实方阵, 求椭球

$$E(P) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid xPx^T \leq 1\}$$

的体积.

解. 我们知道, 正定对称方阵可以对角化, 即存在正交方阵 O , 使得

$$P = O \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) O^T, \text{ 其中 } \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq n.$$

利用正交变换 $y = xO$, 椭球 $E(P)$ 的体积与下面的标准椭球

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = y \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) y^T \leq 1\}$$

体积相同, 根据前面的例子即知它的体积为

$$v(E(P)) = \omega_n (\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \dots (\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = \omega_n (\det P)^{-\frac{1}{2}}.$$

一般地, 如果 P 为正定对称矩阵, 作为线性变换, 它把可求体积的集合 A 映为可求体积的集合 $P(A)$, 且

$$v(P(A)) = (\det P)v(A),$$

这个等式的证明和上例类似, 结合正交变换以及伸缩变换的结果即可.

(4) 一般的线性变换. 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性映射, 在 \mathbb{R}^n 的标准基下可表示为 n 阶方阵, 为了简单起见仍记为 φ . 设 A 为 \mathbb{R}^n 中可求体积的有界集合, 我们考虑集合 $\varphi(A)$. 首先, 如果 φ 退化, 则 $\varphi(A)$ 含于 \mathbb{R}^n 的某个超平面中, 从而必为零体积集. 因此下面假设 $\det \varphi \neq 0$, 此时 $\varphi\varphi^T$ 为正定对称方阵, 从而可以对角化, 且其特征值均大于零, 这说明 $\varphi\varphi^T$ 可以写为

$$\varphi\varphi^T = P^2,$$

其中 P 也是正定对称方阵, $\det P = |\det \varphi|$. 记 $O = P^{-1}\varphi$, 则上式表明 O 是正交矩阵, 特别地, $\varphi(A) = P(O(A))$ 可求体积, 且

$$v(\varphi(A)) = v(P(O(A))) = (\det P)v(O(A)) = (\det P)v(A),$$

即

$$v(\varphi(A)) = |\det \varphi|v(A). \quad (13.4)$$

现在我们可以解决本节开头所提出的问题了.

例 13.4.5. 设 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 为 \mathbb{R}^n 中的向量, 求平行多面体

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

的体积.

解. 记 \mathbb{R}^n 的标准基为 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(e_i) = v_i$. 则显然有

$$\begin{aligned} P(v_1, \dots, v_n) &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \\ &= \left\{ \varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \right\} \\ &= \varphi(P(e_1, \dots, e_n)). \end{aligned}$$

而 $P(e_1, \dots, e_n) = [0, 1]^n$, 因此, 由 (13.4) 式得

$$v(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det \varphi|v([0, 1]^n) = |\det \varphi|.$$

例如, 当 $n = 2$, $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$ 时,

$$v(P(v_1, v_2)) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|,$$

这是平行四边形的面积公式. □

例 13.4.6. 设 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 为 \mathbb{R}^n 中的向量, 求单形

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 (1 \leq i \leq n), x_1 + \dots + x_n \leq 1 \right\}$$

的体积.

解. 与上例类似, 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(e_i) = v_i$, 则

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \varphi(\Delta_n(1)),$$

其中 $\Delta_n(1)$ 是标准单形. 因此由 (13.4) 式以及前面的例子得

$$v(\Delta(v_1, \dots, v_n)) = |\det \varphi|v(\Delta_n(1)) = \frac{1}{n!} |\det \varphi|.$$

例 13.4.7. 设 $r > 0$, 求椭球

$$E_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq r^2\}$$

的体积.

解. 我们可以改写 E_r 为

$$E_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 2r^2\},$$

考虑线性变换 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x, y, z) = (x+y, y+z, z+x),$$

则 $\varphi(E_r)$ 是半径为 $\sqrt{2}r$ 的三维球, 故

$$v(E_r) = |\det \varphi|^{-1} \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2}r)^3 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi r^3.$$

§13.4.2 一般的变量替换

现在我们考虑比仿射线性变换更一般的映射, 看看可求体积的集合在这些映射下如何变化. 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 Lipschitz 映射, 即存在常数 ρ , 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

我们有

引理 13.4.4. 设 φ 为如上的 Lipschitz 映射, $A \subset \mathbb{R}^n$. 如果 A 为零测集, 则 $\varphi(A)$ 也为零测集. 如果 $A, \varphi(A)$ 均为可求体积的集合, 则

$$v(\varphi(A)) \leq \rho^n v(A).$$

证明. 设 A 为零测集. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个球体 $B_i = B_{r_i}(x^i)$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} B_i, \quad \sum_{i \geq 1} v(B_i) = \sum_{i \geq 1} \omega_n r_i^n < \varepsilon.$$

由 φ 满足 Lipschitz 条件可知 $\varphi(B_i) \subset B_{\rho r_i}(\varphi(x^i))$, 并且

$$\sum_{i \geq 1} v(B_{\rho r_i}(\varphi(x^i))) = \sum_{i \geq 1} \omega_n (\rho r_i)^n < \rho^n \varepsilon,$$

这说明 $\varphi(A)$ 为零测集.

一般地, 设 $A, \varphi(A)$ 都可求体积. 根据覆盖引理 13.4.2, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在有限个覆盖 A 的 n 维球体 $\{B_{r_j}^j\}$, 使得

$$\sum_j \omega_n r_j^n < v(A) + \varepsilon.$$

此时 $\varphi(A)$ 被 $\{B_{\rho r_j}^i\}$ 所覆盖, 因此

$$v(\varphi(A)) \leq \sum_j \omega_n(\rho r_j)^n = \rho^n v(A) + \rho^n \varepsilon,$$

由 ε 的任意性即知 $v(\varphi(A)) \leq \rho^n v(A)$. \square

注. 从证明可以看出, 对于局部的 Lipschitz 映射也有类似的结果.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射. 根据拟微分中值定理, φ 为局部 Lipschitz 映射, 因此将零测集映为零测集. 假设 $J\varphi$ 处处非退化, 则由逆映射定理可知 φ 将内点映为内点. 这说明如果 A 可求体积且 $\bar{A} \subset D$, 则 $\varphi(A)$ 也可求体积. 事实上, 此时有

$$\partial\varphi(A) = \overline{\varphi(A)} \setminus \text{int}[\varphi(A)] \subset \varphi(\bar{A}) \setminus \varphi(\text{int}A) \subset \varphi(\partial A).$$

由 A 可求体积可知 ∂A 为零测集, 从而 $\varphi(\partial A)$ 也为零测集, $\partial\varphi(A)$ 仍为零测集, 即 $\varphi(A)$ 可求体积.

设 φ 如上, $x^0 \in D$. 由 $J\varphi$ 连续可知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x - x^0\| < \delta$ 时 $\|J\varphi(x) - J\varphi(x^0)\| < \varepsilon$. 记

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad L(x) = \varphi(x^0) + J\varphi(x^0)(x - x^0),$$

L 为仿射线性变换. 记 $R(x) = \varphi(x) - L(x)$, 则当 $\|x - x^0\| < \delta$ 时

$$\|JR(x)\| = \|J\varphi(x) - J\varphi(x^0)\| < \varepsilon.$$

根据拟微分中值定理,

$$\|R(x) - R(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B_\delta(x^0).$$

于是, 当 $x, y \in B_\delta(x^0)$ 时

$$\begin{aligned} \|L^{-1} \circ \varphi(x) - L^{-1} \circ \varphi(y)\| &= \|(x - y) - (J\varphi)^{-1}(x^0)[R(x) - R(y)]\| \\ &\leq \|x - y\| + \|(J\varphi)^{-1}(x^0)\| \|R(x) - R(y)\| \\ &\leq (1 + \|(J\varphi)^{-1}(x^0)\| \varepsilon) \|x - y\|. \end{aligned}$$

当 $A \subset B_\delta(x^0)$ 为可求体积集时, 利用引理 13.4.4 可得

$$v(L^{-1} \circ \varphi(A)) \leq (1 + \|(J\varphi)^{-1}(x^0)\| \varepsilon)^n v(A).$$

由 (13.4) 式可得

$$\begin{aligned} v(\varphi(A)) &= |\det J\varphi(x^0)| v(L^{-1} \circ \varphi(A)) \\ &\leq |\det J\varphi(x^0)| v(A) + O(\varepsilon) v(A). \end{aligned}$$

由此可将 (13.4) 式推广为非线性形式.

引理 13.4.5. 设 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 单射, 且 $J\varphi$ 处处非退化. 设 A 可求体积, $\bar{A} \subset D$, 则 $\varphi(A)$ 也是可求体积的, 且

$$v(\varphi(A)) = \int_A |\det J\varphi|.$$

证明. 根据逆映射定理可知 $\varphi^{-1}: \varphi(D) \rightarrow D$ 存在且为 C^1 映射. 先假设 A 包含于小球内. 对 φ^{-1} 应用前面的讨论可得

$$\begin{aligned} v(A) &= v(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq |\det(J\varphi)^{-1}(x^0)|v(\varphi(A)) + O(\varepsilon)v(\varphi(A)) \\ &\leq |\det(J\varphi)^{-1}(x^0)|v(\varphi(A)) + O(\varepsilon)v(A), \end{aligned}$$

这说明

$$v(\varphi(A)) \geq |\det J\varphi(x^0)|v(A) + O(\varepsilon)v(A).$$

最后得到

$$v(\varphi(A)) = |\det J\varphi(x_0)|v(A) + O(\varepsilon)v(A). \quad (13.5)$$

对一般的可求体积集 A , 可将它分割为若干部分, 对每一部分应用 (13.5), 最后令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得欲证结论, 细节略. \square

定理 13.4.6 (重积分的变量替换). 设 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 单射, 且 $J\varphi$ 处处非退化. 设 A 可求体积, $\bar{A} \subset D$, $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi |\det J\varphi|. \quad (13.6)$$

证明. 根据前面的讨论, $\varphi(A)$ 可求体积, (13.6) 式两边积分有意义.

根据覆盖引理, 为了简单起见, 不妨设 A 是一个矩形. 任给 A 的分割 $\pi = \{A_{ij}\}$, 由积分中值定理可得

$$\int_A f \circ \varphi |\det J\varphi| = \sum_{ij} \int_{A_{ij}} f \circ \varphi |\det J\varphi| = \sum_{ij} f \circ \varphi(\xi_{ij}) \int_{A_{ij}} |\det J\varphi|.$$

由引理 13.4.5 可得

$$\begin{aligned} \int_A f \circ \varphi |\det J\varphi| &= \sum_{ij} f \circ \varphi(\xi_{ij})v(\varphi(A_{ij})) \\ &= \int_{\varphi(A)} f + \sum_{ij} \int_{\varphi(A_{ij})} [f(\varphi(\xi_{ij})) - f]. \end{aligned}$$

根据 f 在 $\varphi(A)$ 上的 (一致) 连续性, 当 $\|\pi\| \rightarrow 0$ 时上式最后一项趋于零, 从而 (13.6) 式得证. \square

注. 当 f 在 $\varphi(A)$ 上 Riemann 可积时定理也成立, 读者可与一元函数积分的变量替换公式相比较.

例 13.4.8. 设 A 是由 $x = 0$, $y = 0$ 以及 $x + y = 1$ 围成的区域, 计算积分

$$I = \int_A e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy.$$

解. 积分区域是一个三角形, 被积函数在 $A - \{(0,0)\}$ 上连续, 在 A 上有界. 我们用线性变换简化被积函数, 令 $x - y = u$, $x + y = v$, 解出

$$x = (u + v)/2, \quad y = (v - u)/2,$$

(x, y) 关于 (u, v) 的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2.$$

在这个线性变换下, 被积区域变为如下三角形区域

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \geq 0, v - u \geq 0, v \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_D e^{\frac{u}{v}} |1/2| du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

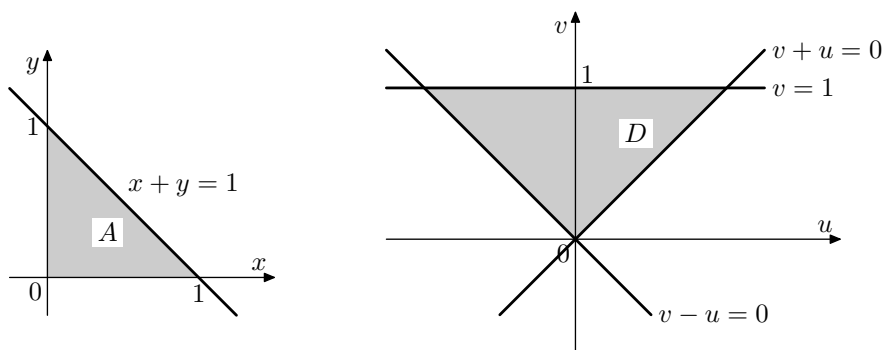


图 13.14 线性变换

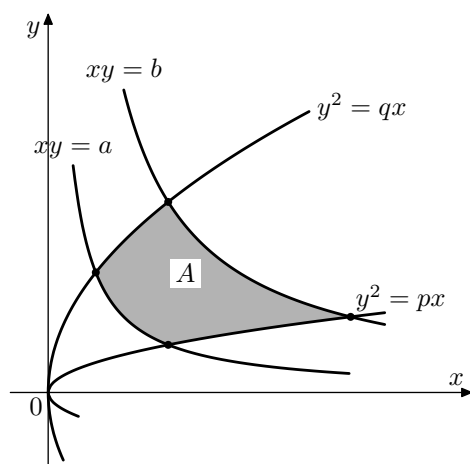


图 13.15 曲边四边形

例 13.4.9. 设 $0 < p < q$, $0 < a < b$. 抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ 以及双曲线 $xy = a$, $xy = b$ 围成的区域记为 A . 计算积分

$$I = \int_A xy \, dx dy.$$

解. 积分区域是一个曲边的四边形, 为了简化, 我们令 $y^2/x = u$, $xy = v$, 则 (u, v) 关于 (x, y) 的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x \\ y & x \end{vmatrix} = -3y^2/x = -3u,$$

因此 (x, y) 关于 (u, v) 的 Jacobi 行列式为 $-(3u)^{-1}$. 在这个变换下, 积分区域变为矩形 $[p, q] \times [a, b]$, 因此

$$I = \int_p^q du \int_a^b v |-(3u)^{-1}| dv = \frac{1}{6}(b^2 - a^2) \ln \frac{q}{p}.$$

§13.4.3 极坐标变换

我们知道, 在平面 \mathbb{R}^2 上有直角坐标 (x, y) 和极坐标 (r, θ) , 其变换关系为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

这个变换称为极坐标变换, 其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

这个变换将 (r, θ) 平面上的矩形 $[0, R] \times [0, 2\pi]$ 变为 (x, y) 平面上的圆 $x^2 + y^2 \leq R^2$. 不过, 这个变换不是一一的, 且在 $r = 0$ 处退化. 尽管如此, 由于此变换在

$(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ 上是一一的且非退化, 因此将定理 13.4.6 的证明略作改动即知, 积分的变量替换公式对这个变换仍然成立.

例 13.4.10. 在圆 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上计算积分

$$I = \int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

解. 这个积分用直角坐标是不好计算的. 我们用极坐标变换, 则有

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

例 13.4.11. 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所截, 求截出部分的体积.

解. 根据截出图形的对称性, 只要考虑第一象限部分 $(0, 0, a)$ 的体积即可, 这一部分的体积是函数 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在半圆

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ax\}$$

上的积分, 因此体积 V 可以用极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 计算如下

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

有时, 伸缩变换和极坐标变换可以结合起来使用.

例 13.4.12. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 所包围的面积.

解. 作所谓的广义极坐标变换

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr,$$

因此所求面积为

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} abr d\theta = \pi ab.$$

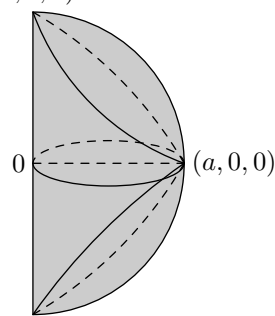


图 13.16 球体与柱面

下面考虑 \mathbb{R}^3 中的一些特殊的坐标变换. 首先有如下的柱面坐标变换:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

其 Jacobi 行列式也是 r .

例 13.4.13. 设 D 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的区域. 计算积分

$$I = \int_D z \, dx dy dz.$$

解. 用柱面坐标变换, 区域 D 变为

$$A = \{(r, \theta, z) \mid r^2 + z^2 \leq 4, \quad r^2 \leq 3z\},$$

A 在 (r, θ) 平面上的投影为区域 $\{0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 固定 (r, θ) , z 的变化范围为区间 $[r^2/3, \sqrt{4-r^2}]$, 因此所求积分为

$$I = \int_A r z \, dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \, dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz = \frac{13}{4}\pi.$$

与极坐标变换类似, \mathbb{R}^3 中也有所谓的球面坐标变换:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

这个变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

球面坐标和伸缩变换结合起来称为广义球面坐标变换.

例 13.4.14. 设 D 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和锥面 $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ 围成的区域, 计算积分

$$I = \int_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz.$$

解. 用球面坐标变换, 区域 D 变为

$$A = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4\},$$

因此

$$I = \int_A r^2 |r^2 \sin \theta| \, dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{5} (2 - \sqrt{2}) R^5.$$

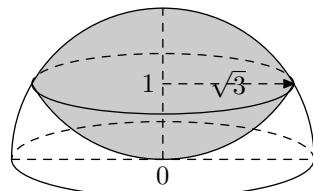


图 13.17 球体与抛物面

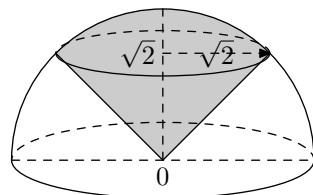


图 13.18 球体与锥面

例 13.4.15. 计算椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a, b, c > 0$) 的体积.

解. 用广义球面坐标变换:

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta,$$

此变换的 Jacobi 行列式为 $abc r^2 \sin \theta$, 积分区域变为

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

因此椭球体积为

$$V = \int_0^1 dr \int_0^\pi abc r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi abc.$$

这几个利用极坐标或球面坐标计算的例子与前面的计算结果是一致的.

一般地, 在 \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) 中也有球面坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{cases}$$

此变换将矩形

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi,$$

变为半径为 R 的 n 维 (闭) 球. 此变换的 Jacobi 矩阵有一个特点: 其不同的两列之间互相正交. 利用这一特点容易算出此变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

如果用球面坐标计算 n 维单位球的体积, 则有

$$\omega_n = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{A_n} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1},$$

其中

$$A_n = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mid 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi\},$$

因此有

$$\int_{A_n} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} = n\omega_n, \quad (13.7)$$

此等式在用球面坐标算积分时有用. 以后我们将知道 $n\omega_n$ 是 $n-1$ 维球面的面积.

例 13.4.16. 在四维球体 $B: x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1$ 内计算函数 x^2 的积分.

解. 根据对称性, 有

$$\int_B x^2 dx dy dz dw = \frac{1}{4} \int_B (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) dx dy dz dw,$$

再利用四维的球面坐标以及 (13.7) 式, 得

$$\int_B x^2 dx dy dz dw = \frac{1}{4} \int_0^1 r^5 4\omega_4 dr = \frac{1}{6} \omega_4 = \frac{1}{12} \pi^2.$$

习题 13.4

1. 证明伸缩变换将可求体积的有界集合变为可求体积的有界集合.
2. 试说明: 定义 \mathbb{R}^n 中的零测集时, 可以用 n 维开球或闭球代替矩形.
3. 设 A 为可求体积的有界集合. 如果 $v(A) > 0$, 则存在内部互不相交的一列 n 维球 $\{B_i\}$, 使得 $v(A) = \sum_{i \geq 1} v(B_i)$.
4. 设 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, 求曲线

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$$

在平面上所围区域面积.

5. 设 $0 < p < q, 0 < a < b$, 求直线 $x + y = p, x + y = q$ 和 $y = ax, y = bx$ 所围区域的面积.
6. 计算积分 $\int_{\Delta_n(a)} x_1 x_2 \cdots x_n dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, 其中 $\Delta_n(a)$ 为 n 维单形.
7. 计算下列区域的面积或体积 ($a > 0$):

$$(1) \{|x| + |y| \leq a\}; \quad (2) \{|x| + |y| + |z| \leq a\}, \quad (3) \{|x_1| + \cdots + |x_n| \leq a\}.$$

8. 设 $0 < p < q, 0 < a < b$, 求抛物线 $y^2 = px, y^2 = qx$ 和 $x^2 = ay, x^2 = by$ 所围区域的面积.
9. 计算下列积分:
 - (1) $\int_A (x - y) dx dy$, A 由曲线 $y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12$ 围成;
 - (2) $\int_A (x^2 + y^2) dx dy$, A 由曲线 $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2, xy = 1, xy = 2$ 围成;
 - (3) $\int_A (x - y^2) dx dy$, A 由曲线 $y = 2, y^2 - y - x = 0, y^2 + 2y - x = 0$ 围成.

10. 计算下列积分 ($a, b > 0$):

$$(1) \int_A (x^2 + y^2) dx dy, \quad A = \{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2\};$$

$$(2) \int_A (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad A \text{ 由 } x^2 + y^2 = 2z \text{ 与 } z = 2 \text{ 围成};$$

$$(3) \int_A \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2} dx dy, \quad A = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\};$$

$$(4) \int_A (x+y) dx dy, \quad A = \{x^2 + y^2 \leq x+y\};$$

11. 求下列曲面所围区域的体积 ($a, b, c > 0$):

$$(1) (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2; \quad (2) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az;$$

$$(3) x^2/a^2 + y^2/b^2 + z/c = 1, \quad z = 0; \quad (4) x^2 + z^2 = a^2, \quad |x| + |y| = a.$$

12. 计算下列积分 ($r, R, a, b, c > 0$):

$$(1) \int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad A = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\};$$

$$(2) \int_A (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad A = \{r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0\};$$

$$(3) \int_A \sqrt{1 - (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)} dx dy dz, \quad A = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}.$$

13. 设 $f(u)$ 为连续函数, 证明 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$.

14. 设 $f(u)$ 为连续函数, 证明 $\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(ku) du$, 其中 $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

15. 设 $f(u)$ 连续, a, b, c 为常数, 证明

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(ax+by+cz) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2) f(ku) du,$$

其中 $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

16. 设方阵 A 的 n 个列向量 $\{v^i\}$ 两两之间互相正交, 则 $|\det A| = \|v^1\| \cdots \|v^n\|$. 利用此等式计算 \mathbb{R}^n 中球坐标变换的 Jacobi 行列式.

§13.5 重积分的应用和推广

我们在前面几节所研究的重积分有两个局限: 一是积分区域要是可求体积的有界集合, 二是被积函数要有界. 为了克服这两个局限性, 需要对积分做适当的推广.

先考虑积分区域. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为子集 (未必有界), 我们要求它的边界 ∂A 为零测集. 这种集合称为容许集. 此时, 对每一个 $k \geq 1$, 交集 $A \cap [-k, k]^n$ 有界并且可求体积. 事实上, 只要说明其边界为零测集即可, 这可从下式看出:

$$\partial(A \cap [-k, k]^n) \subset \partial A \cup \partial[-k, k]^n.$$

定义

$$v(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A \cap [-k, k]^n),$$

如果 $v(A) < \infty$, 则称 A 是广义可求体积的.

例 13.5.1. 研究平面集合 $A = \{(x, y) \mid |y|(1+x^2) \leq 1\}$ 的面积.

解. 显然, $A \cap [-k, k]^2$ 可求面积, 且根据对称性, 面积为

$$v(A \cap [-k, k]^2) = 2 \int_{-k}^k \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \arctan k.$$

因此

$$v(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A \cap [-k, k]^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 \arctan k = 2\pi.$$

这说明 A 是广义可求面积的. □

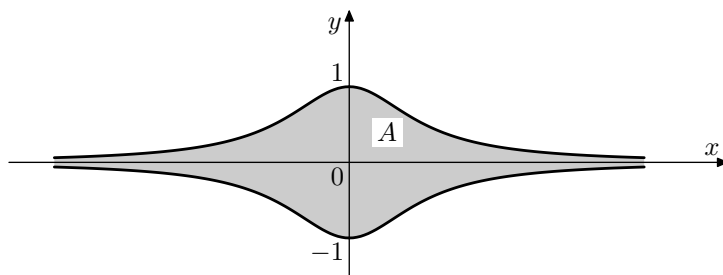


图 13.19 无界区域的面积

注意到 $v(A \cap [-k, k]^n)$ 关于 k 单调递增, 因此有

命题 13.5.1. 设 A 为容许集, 则 A 广义可求体积当且仅当 $v(A \cap [-k, k]^n)$ 关于 k 有上界.

我们再注意到, 如果将定义中的矩形 $[-k, k]^n$ 换成半径为 k 的球体 $B_k(0)$, 则结论不变. 事实上, $A \cap B_k(0)$ 也都是可求体积的, 由

$$A \cap [k/\sqrt{n}, k/\sqrt{n}]^n \subset A \cap B_k(0) \subset A \cap [-k, k]^n$$

以及数列极限的夹逼原理知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(A \cap B_k(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A \cap [-k, k]^n).$$

我们可以将矩形或球体推广为更一般的可求体积集合.

定义 13.5.1 (穷竭). 设 $\{D_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 中一系列可求体积的有界集合, 满足条件

$$(1) \bar{D}_i \subset \text{int} D_{i+1}, \quad \forall i \geq 1; \quad (2) \bigcup_{i \geq 1} D_i = \mathbb{R}^n,$$

则称 $\{D_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 的一个穷竭.

矩形 $\{[-k, k]^n\}$ 和开球体 $\{B_k(0)\}$ 都是 \mathbb{R}^n 的穷竭. 在具体的积分计算中, 往往可以适当地选取穷竭以简化计算, 见本节后面的例子. 现在下面的命题就比较明显了.

命题 13.5.2. 设 $\{D_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 的一个穷竭, A 为容许集. 则 A 广义可求体积当且仅当 $\{v(A \cap D_i)\}$ 关于 i 有上界, 且 $v(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} v(A \cap D_i)$.

类似地, 我们可以把重积分的定义推广到容许集上. 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 定义在容许集 A 中的非负函数. 如果对每一个 $k \geq 1$, f 在 $A \cap [-k, k]^n$ 中均可积, 则定义

$$\int_A f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A \cap [-k, k]^n} f.$$

当上述极限有限时, 称 f 在 A 中广义可积 (或广义积分收敛), 极限称为 f 的广义积分. 如果极限为无穷, 则称 f 在 A 中的广义积分发散. 下面的命题也是可以立即得到的.

命题 13.5.3. 设 A 为容许集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 为非负函数, 则

(1) f 在 A 中广义可积当且仅当积分 $\int_{A \cap [-k, k]^n} f$ 关于 k 有上界;

(2) 设 $\{D_i\}$ 为 \mathbb{R}^n 的一个穷竭, 则 f 在 A 中广义可积当且仅当 f 在 $A \cap D_i$ 中的积分关于 i 有上界, 此时

$$\int_A f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A \cap D_i} f.$$

一般地, 给定容许集上的函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $f = f^+ - f^-$, 其中

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

f^+, f^- 都是非负函数, 当 f^+ 和 f^- 都在 A 中广义可积时, 我们称 f 在 A 中广义可积, 积分定义为

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

注意到 $|f| = f^+ + f^-$, 因此 f 在 A 中广义可积时, $|f|$ 在 A 中也广义可积, 这和一元函数的广义积分不同! 之所以出现这种差别还是因为被积区域在一般维数时可能非常复杂 (因此对被积函数的要求较高).

和普通的重积分一样, 广义重积分也具有线性性, 积分区域的可加性, 保序性以及积分中值定理等, 我们不重复叙述.

下面我们计算几个广义重积分的例子.

例 13.5.2. 计算函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 在 \mathbb{R}^2 中的积分.

解. 在圆 $B_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 中, 根据前一节极坐标变换的例子, 我们曾经算出

$$\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-R^2}),$$

因此

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

如果我们用矩形区域作穷竭, 则有

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right]^2,$$

这就重新得到了概率积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \text{或} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 13.5.3. 计算函数 $e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$ 在 \mathbb{R}^n 中的积分.

解. 利用矩形作穷竭以及重积分化累次积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right]^n = \pi^{n/2}. \end{aligned}$$

如果我们用球 $B_R(0)$ 作穷竭, 利用球面坐标以及前节 (13.7) 式可得

$$\pi^{n/2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-r^2} r^{n-1} (n\omega_n) dr.$$

在上式中作变量替换 $r = \sqrt{t}$, 并记

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

则得到了 n 维单位球体积 ω_n 的另一种表示

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (13.8)$$

这里的 $\Gamma(x)$ 是我们在第十六章中将要进一步讨论的 Gamma 函数.

广义积分的变量替换公式在一定条件下也是成立的, 我们仅举例说明.

例 13.5.4. 设 P 为 n 阶正定对称方阵, 计算函数 e^{-xPx^\top} 在 \mathbb{R}^n 中的积分.

解. 因为 P 为正定对称方阵, 故存在正交方阵 O , 使得

$$P = O \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O^\top, \quad \text{其中 } \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n.$$

利用正交变换 $y = xO$, 积分化为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xPx^\top} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n.$$

再利用伸缩变换 $t_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$ 以及上例, 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xPx^\top} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t_1^2 + \cdots + t_n^2)} (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} dt_1 \cdots dt_n = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det P}}.$$

对于一般的函数, 如何判断其广义积分是收敛还是发散的? 根据命题 13.5.3, 我们有如下比较判别法.

定理 13.5.4. 设 $g(x)$ 为定义在容许集 A 中的非负广义可积函数, f 在每一个 $A \cap [-k, k]^n$ 中可积, 且当 $\|x\|$ 充分大时, $|f(x)| \leq g(x)$, 则 $f(x)$ 在 A 中广义可积.

显然, 定理中的矩形 $[-k, k]^n$ 可以换成球体 $B_k(0)$. 记 $r = \|x\|$, 考虑函数 r^{-p} 在区域 $\{r_0 \leq r \leq R\}$ ($r_0 > 0$) 上的积分, 利用球面坐标以及前节 (13.7) 式可得

$$\int_{r_0 \leq r \leq R} r^{-p} = \int_{r_0}^R r^{n-1-p} (n\omega_n) dr = \frac{1}{n-p} (R^{n-p} - r_0^{n-p}) (n\omega_n),$$

因此当 $p > n$ 时, r^{-p} 在 $\{r \geq r_0\}$ 中广义可积. 根据比较判别法, 可得

推论 13.5.5. 设 f 在每一个 $A \cap B_k(0)$ 中可积. 如果 $p > n$ 为常数, 且当 $\|x\|$ 充分大时, 成立 $|f(x)| \leq \|x\|^{-p}$, 则 f 在 A 中广义可积.

类似地可以得到判断广义积分发散的条件, 我们留给读者完成.

我们将在第十六章中讨论广义重积分化累次积分的问题. 下面研究无界函数的积分. 设 A 为 \mathbb{R}^n 中可求体积的有界集合, $p \in A$. 给定非负函数 $f: A \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 f 在 p 附近无界, 则称 p 为 f 的瑕点. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, f 在 $A \setminus B_\varepsilon(p)$ 中均可积, 则定义极限

$$\int_A f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A \setminus B_\varepsilon(p)} f,$$

如果极限有限, 则称 f 在 A 中的瑕积分收敛, 否则就称瑕积分发散.

如果 f 是一般的函数, 考虑 f^+ 和 f^- , 当 f^+ 和 f^- 在 A 中的瑕积分都收敛时, 称 f 在 A 中的瑕积分收敛, 定义

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

如同广义积分的讨论那样, 瑕积分定义中的球体 $B_\varepsilon(p)$ 可以换成以 p 为内点的其它可求体积的区域. 下面的结果当然也成立.

命题 13.5.6. 设 $f: A \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ 为非负函数, 如果 f 在 $A \setminus B_\varepsilon(p)$ 中均可积, 且积分 $\int_{A \setminus B_\varepsilon(p)} f$ 关于 ε 有界, 则 f 在 A 中的瑕积分收敛; 反之亦然.

例 13.5.5. 研究函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在单位圆 $B_1(0)$ 中的积分.

解. 原点是函数的瑕点, 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, 利用极坐标变换, 有

$$\int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_\varepsilon^1 \frac{r}{\sqrt{r^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi(1-\varepsilon),$$

因此瑕积分存在且等于 2π .

类似地, 研究函数 $\|x\|^p$ 在 n 维球 $B_1(0)$ 上的积分时, 利用球面坐标不难看到, 当 $p > -n$ 时, 瑕积分收敛, 当 $p \leq -n$ 时瑕积分发散. 由此可以得到瑕积分的比较判别法, 我们不详述了.

在瑕积分的定义中, 我们也可以考虑不只一个瑕点的情形, 甚至某个子集上的点都可能是 f 的瑕点.

例如, 设 A 为可求体积的有界集合, $S \subset A$, f 是定义在 $A \setminus S$ 中的非负函数. 取一系列包含 S 的可求体积的集合 Δ_i , 使得 $v(\Delta_i) \rightarrow 0$, 定义

$$\int_A f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A \setminus \Delta_i} f.$$

如果极限有限, 则称 f 在 A 中的瑕积分收敛. 此定义不依赖于 Δ_i 的选取.

下面的例子中, 被积函数的瑕点不是孤立点, 但积分仍然有意义.

例 13.5.6. 研究函数 $\frac{y}{\sqrt{x}}$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的积分.

解. $\{0\} \times [0, 1]$ 是函数 $\frac{y}{\sqrt{x}}$ 的瑕点集, 记 $D_\varepsilon = [\varepsilon, 1] \times [0, 1]$, 则

$$\int_{D_\varepsilon} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^1 y dy = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

因此 $\frac{y}{\sqrt{x}}$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的瑕积分收敛于 1. \square

对于最一般的区域和最一般的函数, 我们可能会碰到积分区域无界, 且函数有很多瑕点的情形, 这时就要灵活运用以上知识了. 不过, Riemann 积分能够处理的情形仍然相当有限, 在后续课程中由 Lebesgue 积分来部分地弥补了这一不足.

最后我们举几个重积分在物理中应用的例子.

(1) 物体的质量. 设 A 为空间物体, 其密度函数为 $\rho(x, y, z)$, 则它的质量 m 为

$$m = \int_A \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

类似地, 如果物体是密度函数为 $\rho(x, y)$ 的平面薄板, 则质量可以用二重积分来计算.

(2) 物体的重心. 仍设 A 为空间物体, 其密度函数为 $\rho(x, y, z)$, 则它的质量中心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_A x \rho(x, y, z), \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_A y \rho(x, y, z), \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_A z \rho(x, y, z).$$

(3) 转动惯量. 物体 A 关于 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \int_A (y^2 + z^2) \rho(x, y, z), \quad I_y = \int_A (x^2 + z^2) \rho(x, y, z), \quad I_z = \int_A (x^2 + y^2) \rho(x, y, z).$$

一般地, 如果 ℓ 为空间直线, (x, y, z) 到 ℓ 的距离记为 $r(x, y, z)$, 则物体关于 ℓ 的转动惯量为

$$I_\ell = \int_A r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

(4) 万有引力. 设 A 为如上空间物体, B 为位于 (x_0, y_0, z_0) 处质量为 m_0 的质点, 则由 Newton 万有引力定律, A 对 B 所产生的引力 F 为

$$\vec{F} = G m_0 \int_A \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} \vec{r} dx dy dz,$$

其中, G 为万有引力常数,

$$\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

例 13.5.7. 有一半径为 R 的球体, 设其密度 ρ 为常数, 求其引力场.

解. 所谓引力场就是在每一点 p 处单位质量的质点所受的引力. 设 p 点与球心距离为 l . 不妨设球心在原点, p 点在 z 轴上, 其坐标为 $(0, 0, l)$. 于是 p 处单位质量的质点所受引力为

$$\vec{F}(p) = G \int_{B_R} \frac{\rho(x, y, z-l)}{[x^2 + y^2 + (z-l)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz,$$

利用对称性容易看出, $\vec{F}(p)$ 的 x, y 分量为零. 它的 z 分量 $F(p)_z$ 用球面坐标计算如下:

$$F(p)_z = G\rho \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2(r \cos \theta - l) \sin \theta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{3/2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi G\rho \int_0^R r^2 \varphi(r) dr,$$

其中

$$\varphi(r) = \int_0^\pi \frac{(r \cos \theta - l) \sin \theta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{3/2}} d\theta.$$

对上述积分作换元 $t = (r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{1/2}$, 得

$$\varphi(r) = \frac{1}{2l^2 r} \int_{|r-l|}^{r+l} \left(\frac{r^2 - l^2}{t^2} - 1 \right) dt = \frac{1}{l^2} \left[\frac{r-l}{|r-l|} - 1 \right].$$

当 $r > l$ 时 $\varphi(r) = 0$; 当 $r \leq l$ 时 $\varphi(r) = -2l^{-2}$. 因此, 当 $l \geq R$ 时

$$F(p)_z = 2\pi G\rho \int_0^R r^2 (-2l^{-2}) dr = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3 l^{-2};$$

当 $l \leq R$ 时

$$F(p)_z = 2\pi G\rho \int_0^l r^2 (-2l^{-2}) dr = -\frac{4}{3}\pi G\rho l.$$

注意到半径为 r 的球质量为 $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$. 上述计算结果表明, 当质点位于球外时, 它所受的引力就如同球体的质量完全集中在球心时所受的引力那样; 当质点位于球内时, 位于质点以外的外层球壳对质点的引力抵消了.

习题 13.5

1. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对每一个 $k \geq 1$, $A \cap [-k, k]^n$ 均可求体积, 则其边界 ∂A 为零测集.
2. 设 A 是可求体积的有界集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 为有界函数. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, f 在 $A \setminus B_\varepsilon(p)$ 中可积, 则 f 在 A 中可积, 且

$$\int_A f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A \setminus B_\varepsilon(p)} f.$$

3. 设平面集合 A 含有区域 (在极坐标中) $\{\alpha \leq \theta \leq \beta, r \geq r_0\}$, 如果函数 $f(x, y)$ 在 A 中满足不等式 $f(x, y) \geq cr^p$, 其中 c 为正常数, $p \geq -2$, 则 $f(x, y)$ 在 A 中的广义积分发散.

4. 如果 \mathbb{R}^n 上的函数 $f(x)$ 在 $\{\|x\| \geq r_0\}$ 中满足不等式 $f(x) \geq c\|x\|^p$, 则当 $p \geq -n$ 时 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 中的广义积分发散.
5. 如果 \mathbb{R}^n 上的函数 $f(x)$ 在 $\{\|x\| \leq r_0\}$ 中满足不等式 $f(x) \geq \|x\|^p$, 则当 $p \leq -n$ 时 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 中的瑕积分发散.

6. 讨论下列积分的敛散性:

$$(1) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)};$$

$$(2) \int_A \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}, \quad A = \{|x| + |y| \geq 1\};$$

$$(3) \int_A \frac{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \quad A = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$$

$$(4) \int_A \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad A = \{x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(5) \int_A \frac{dxdy}{x^p y^q}, \quad A = \{xy \geq 1, x \geq 1\}.$$

7. 计算下列积分

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dxdy; \quad (2) \iint_{x \geq 0, y \geq 0} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}; \quad (3) \iint_{x \geq y \geq 0} e^{-(x+y)} dxdy.$$

8. 设 A 为 n 阶正定对称方阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 计算积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xAx^\top + b \cdot x^\top} dx_1 \cdots dx_n.$$

9. 设有半径为 R 的球体, 球心位置为 $(0, 0, R)$, 密度函数为 $\rho(x) = k\|x\|^{-2}$, 求其重心的位置.
10. 设一质量均匀的物体由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 1$ 围成, 求其重心位置.
11. 求质量均匀的球体 $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 关于三个坐标轴的转动惯量.
12. 一圆锥与半球相接围成质量均匀的球锥, 设球的半径为 R , 锥的顶角为 2α , 计算球锥对其顶点的引力.

第十四章 曲线积分与曲面积分

本章讨论欧氏空间 \mathbb{R}^n 中曲线以及曲面上的积分理论, 包括曲线的长度, 曲面的面积, 以及曲线曲面上函数和向量值函数的积分, 并讨论这些积分之间的联系.

§14.1 第一型曲线积分

我们从曲线的长度开始. 在第七章第一节中, 对于平面曲线 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, 如果 $x(t), y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的长度为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

现在考虑一般的情形. 映射 $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为一条参数曲线, 我们仍然用折线逼近曲线的办法定义 σ 的长度. 为此, 任取 $[\alpha, \beta]$ 的分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

相继用直线段连接曲线上的分点 $\sigma(t_{i-1})$ 与 $\sigma(t_i)$ ($1 \leq i \leq m$), 得到的折线的长度为

$$L(\sigma; \pi) = \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

如果这些折线的长度有上界, 即

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| < +\infty,$$

则称 σ 是**可求长曲线**, 其长度定义为

$$L(\sigma) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

利用三角不等式我们知道当区间 $[\alpha, \beta]$ 的分割加细时, 折线的长度单调递增. 如果 $\sigma(t)$ 的每一个分量均为连续可微函数, 则由第七章第一节的推导知 σ 是可求长的, 且长度可以表示为积分

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\sigma'(t)\| dt.$$

注. 如果曲线不连续, 则我们这里给出的曲线长度定义和直观上的长度观念不是一回事. 例如, 考虑这样的曲线: 当 $t = 0$ 时 $(x(0), y(0)) = (0, 0)$; 当 $0 < t \leq 1$ 时, $(x(t), y(t)) = (t, 1)$. 按我们的定义, 此曲线长度为 2!

从定义可以得到可求长曲线的下列性质:



图 14.1 折线逼近

- 如果 σ 为可求长曲线, 则对任意 $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$, $\sigma|_{[\gamma, \delta]}$ 也是可求长的;
- 如果 σ 为可求长曲线, 则对任意 $\gamma \in [\alpha, \beta]$, 有

$$L(\sigma) = L(\sigma|_{[\alpha, \gamma]}) + L(\sigma|_{[\gamma, \beta]}).$$

这是曲线长度的可加性, 其证明仍然是利用三角不等式.

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入有界变差函数的概念.

定义 14.1.1 (有界变差函数). 设 f 为定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的函数. 任给分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

记

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

如果 $\sup_{\pi} v(f; \pi)$ 有限, 则称 f 为 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 它在 $[\alpha, \beta]$ 上的全变差记为

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = \sup_{\pi} v(f; \pi).$$

下列函数都是有界变差函数:

- 单调函数. 如果 f 为 $[\alpha, \beta]$ 上的单调函数, 例如单调递增, 则对任意的分割 π , 有

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(\beta) - f(\alpha),$$

这说明

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = |f(\beta) - f(\alpha)|.$$

- Lipschitz 函数. 设 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 则

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m L(t_i - t_{i-1}) = L(\beta - \alpha),$$

因而 f 是有界变差函数.

- 连续可微函数. 根据微分中值定理可以知道, 闭区间上的连续可微函数都是 Lipschitz 函数, 因而是有界变差函数.

- 如果 $g(x)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x) = \int_{\alpha}^x g(t)dt, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

可以证明, 有界变差函数必为两个单调递增函数的差. 关于有界变差函数的进一步讨论请参见本章附录 (即最后一节).

定理 14.1.1 (Jordan). 曲线 $\sigma(t)$ 可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

证明. 设 $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ 可求长, 则任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π , 有

$$v(x_i; \pi) = \sum_{j=1}^m |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^m \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \leq L(\sigma),$$

这说明 $x_i(t)$ 为有界变差函数.

反之, 如果每一个 $x_i(t)$ 都是有界变差函数, 则

$$\begin{aligned} L(\sigma; \pi) &= \sum_{j=1}^m \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m (|x_1(t_j) - x_1(t_{j-1})| + \dots + |x_n(t_j) - x_n(t_{j-1})|) \\ &= \sum_{i=1}^n v(x_i; \pi) \leq \sum_{i=1}^n \bigvee_{\alpha}^{\beta} (x_i). \end{aligned}$$

因此 $\sigma(t)$ 是可求长的. □

以下总是假设曲线 σ 是可求长的. 对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma|_{[\alpha, t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的弧长函数, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma|_{[t_1, t_2]}), \quad t_1 \leq t_2.$$

因此, 如果 $t_2 > t_1$, $s(t_2) = s(t_1)$, 则 $\sigma(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上取常值. 如果 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值, 则 $s(t)$ 为严格单调递增函数.

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数 (见本章附录). 当 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值时, $s(t)$ 是参数 t 的连续的严格单调递增函数, 从而可逆, 其逆记为 $t = t(s)$:

$$t(s) : [0, L(\sigma)] \rightarrow [\alpha, \beta].$$

这时, $\sigma(t) = \sigma(t(s))$ 又可以看成关于 s 的参数曲线, 我们将 s 称为弧长参数.

当 $\sigma(t)$ 为连续可微曲线, 且 $\|\sigma'(t)\|$ 在任何区间上不恒为零 (例如, 处处非零) 时, 上一段的讨论对 $\sigma(t)$ 完全适用, 此时

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| \quad \text{或} \quad ds = \|\sigma'(t)\| dt.$$

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分. 设 f 是定义在 σ 上的有界函数, 即对任意 $\sigma(t)$, $f(\sigma(t))$ 是定义好的实数. 任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π , 取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($1 \leq i \leq m$), 考虑和

$$\sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i,$$

其中 $\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$. 如果极限

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i$$

存在且与 $\{\xi_i\}$ 的选取无关, 则称此极限为 f 在 σ 上的**第一型曲线积分**, 记为

$$\int_{\sigma} f ds = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\sigma(\xi_i)) \Delta s_i.$$

当 $f = 1$ 时, 第一型曲线积分也就是曲线的长度.

第一型曲线积分的物理意义可如下理解: 已知某线状物质的密度函数 ρ , 则物质的质量就是 ρ 的曲线积分.

当曲线 σ 的弧长参数存在时, 第一型曲线积分可以转化为通常的 Riemann 积分:

$$\int_{\sigma} f ds = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) ds;$$

如果 $\sigma(t)$ 为 (分段) 连续可微曲线, 则 f 在 σ 上的第一型曲线积分可以写为 (例如 f 连续时):

$$\int_{\sigma} f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

一般地, 第一型曲线积分是所谓 Riemann-Stieltjes 积分的一种特殊情形, 请参看本章最后一节.

例 14.1.1. 设曲线 σ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限内的部分, 计算积分 $I = \int_{\sigma} xy ds$.

解. σ 的参数表示为

$$\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

因此

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \cos 2t} dt \\ &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} u} du \\ &= \frac{ab}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

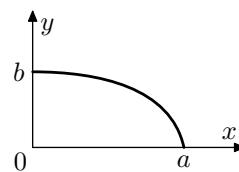


图 14.2 椭圆

例 14.1.2. 设 σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $x + z = a$ 所截出的圆, 计算积分 $\int_{\sigma} xz ds$.

解. 先求 σ 的方程: 以 $z = a - x$ 代入球面方程得

$$x^2 + y^2 + (a - x)^2 = a^2,$$

整理后成为

$$(x - a/2)^2 + y^2/2 = (a/2)^2,$$

用参数表示为

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \quad y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

因此

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{(-a \sin t/2)^2 + (a \cos t/\sqrt{2})^2 + (a \sin t/2)^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

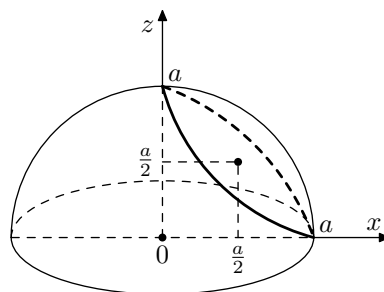


图 14.3 截面圆

从而有

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} xz ds &= \int_0^{2\pi} (a/2)^2 \sin^2 t \cdot (a/\sqrt{2}) dt \\ &= \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

习题 14.1

1. 设 $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可求长参数曲线, $\phi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ 为连续的可逆映射. 证明 $\sigma \circ \phi$ 的长度与 σ 相同.
2. 设 σ 为可求长的连续曲线, 则 $L(\sigma) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} L(\sigma; \pi)$.
3. 证明曲线长度的可加性.
4. 用定义证明, 如果可求长的曲线长度为零, 则必定是常值的.
5. 计算下列空间曲线的弧长:
 - (1) $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = \frac{2}{3}t^3, t \in [0, 1]$;
 - (2) $x + y + z = a$ ($|a| < \sqrt{3}$), $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
6. 计算下列曲线积分:
 - (1) $\int_{\sigma} y ds$, 其中 σ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 从 $(0, 0)$ 到 $(2p, 2p)$ 的部分;
 - (2) $\int_{\sigma} y ds$, 其中 σ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在 x 轴上方的部分;
 - (3) $\int_{\sigma} x^2 ds$, 其中 σ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$;
 - (4) $\int_{\sigma} (x + y) ds$, 其中 σ 是顶点为 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 的三角形.
7. 形状为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的物质在 (x, y) 处的密度为 $\rho(x, y) = |y|$, 求其质量.
8. (*) 定义平面曲线 $\sigma(x) = (x, y(x))$ 为

$$y(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明 σ 不是可求长曲线.

§14.2 第二型曲线积分

现在我们考虑这样一个物理问题: 设质点在力场 F 中沿一条曲线 σ 运动, 求力场 F 对该质点所做的功. 我们可以将这个问题转化为曲线上的一个积分问题.

为此, 设 $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一条参数曲线, f 是定义在 σ 上的取值在 \mathbb{R}^n 中的一个向量值函数, 其分量记为 f_i ($1 \leq i \leq n$). 任取 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

考虑和

$$\sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})), \quad (\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]) \quad (14.1)$$

如果极限

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1}))$$

存在且与 $\{\xi_j\}$ 的选取无关, 则称此极限为 $f_i dx_i$ 沿曲线 σ 的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_{\sigma} f_i dx_i = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f_i(\sigma(\xi_j))(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})).$$

如果每一个 $f_i dx_i$ 沿 σ 的第二型曲线积分都存在, 则记

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + \int_{\sigma} f_n dx_n,$$

这个积分称为形式和 $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ 沿 σ 的第二型曲线积分, 在不引起混淆的情况下也称为 f 沿 σ 的第二型曲线积分.

初看起来第二型曲线积分似乎和第一型曲线积分并无本质不同. 但这两类积分有一个重要的区别, 这个区别和曲线的方向有关. 为了说明这一点, 我们考虑曲线的重新参数化. 设 $\phi: [\gamma, \delta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma \circ \phi: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 这两条参数曲线只是选取了不同的参数而已. 如果 ϕ 是严格单调递增的, 则称这两个参数是同向的; 如果 ϕ 是严格单调递减的, 则称这两个参数是反向的 (不同向).

从 (14.1) 不难看出, 对于同向的两个参数, 第二曲线积分的值不变; 而对于反向的两个参数, 第二型曲线积分的值正好相差一个符号! 这和第一型曲线积分是不同的, 比如曲线的长度就不依赖于参数的选取.

因此, 为了使第二型曲线积分有意义, 我们总是要给曲线指定一个方向, 这个方向是由某个参数决定的. 给定了方向的曲线称为有向曲线. 如果参数反向, 则新的有向曲线记为 $-\sigma$, 这时有

$$\int_{-\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = - \int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

对于可求长曲线来说, 第二型曲线积分也是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形. 对于 (分段) 连续可微曲线, 第二型曲线积分可以转化为 Riemann 积分:

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} f_i(\sigma(t)) x'_i(t) dt.$$

如果记 $\mathbf{F} = (f_1, \cdots, f_n)$, 则上式可写为

$$\int_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\sigma) \cdot \sigma'(t) dt, \quad (14.2)$$

其中 $\sigma'(t) = (x'_1(t), \cdots, x'_n(t))$ 为曲线 σ 的切向量.

例 14.2.1. Riemann 积分作为第二型的曲线积分.

设 f 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 就是 $f(x) dx$ 沿区间 $[a, b]$ 的第二型曲线积分, 其中区间看成一条曲线, 它的方向是参数 x 给出的, 即 x 轴的正向. 我们之所以规定

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

就是因为 $f(x) dx$ 沿 $[a, b]$ 的相反方向的第二型曲线积分要变一个符号. \square

例 14.2.2. 环路积分.

如果 σ 为一条闭曲线 (环路), 即 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, 则选定了方向以后, 不论从曲线上哪一点出发, 沿此闭曲线的第二型曲线积分的值不变, 通常我们将这样的积分记为

$$\oint_{\sigma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

单位圆周 S^1 就是平面上的一条闭曲线, 如果用参数方程

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

表示, 则 S^1 的方向就是所谓逆时针方向. \square

例 14.2.3. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 方向为逆时针方向.

解. 按照给定的方向取 C 的参数方程为

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

此时有

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} [a \sin t (a \cos t)' - a \cos t (a \sin t)'] dt = -2\pi.$$

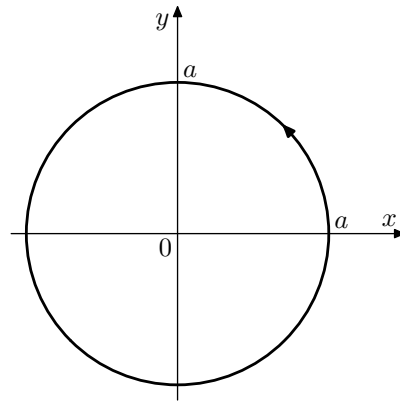


图 14.4 逆时针圆

例 14.2.4. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \tan \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 从 x 的正向看去, C 的方向是逆时针的.

解. 根据方向取 C 的参数方程为

$$x(\theta) = a \cos \theta \cos \alpha, \quad y(\theta) = a \cos \theta \sin \alpha, \quad z(\theta) = a \sin \theta,$$

其中 $\theta \in [0, 2\pi]$. 于是积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (a \cos \theta \sin \alpha - a \sin \theta)(-a \sin \theta \cos \alpha) d\theta + (a \sin \theta - a \cos \theta \cos \alpha) \\ &\quad \times (-a \sin \theta \sin \alpha) d\theta + (a \cos \theta \cos \alpha - a \cos \theta \sin \alpha) a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) d\theta = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

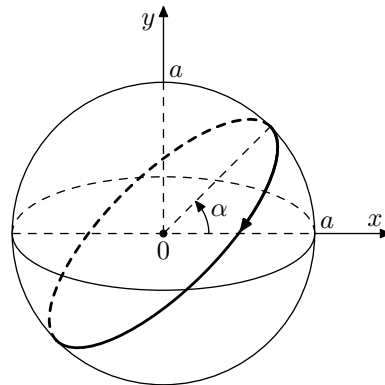


图 14.5 球面圆

例 14.2.5. 考虑位于原点处的电荷 q 产生的静电场, 计算单位正电荷沿连续可微曲线 σ 从点 $A = \sigma(\alpha)$ 到点 $B = \sigma(\beta)$ 电场所作的功 W .

解. 这是一个第二型的曲线积分问题. 根据库仑定律, (x, y, z) 处的单位正电荷在静电场中所受的力为

$$\vec{F} = q \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \phi, \quad \text{其中 } \phi = -\frac{q}{r}.$$

因此 \vec{F} 沿 σ 所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\sigma} \frac{qx}{r^3} dx + \frac{qy}{r^3} dy + \frac{qz}{r^3} dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\sigma) \cdot \sigma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (\phi \circ \sigma)' dt \\ &= \frac{q}{r(\alpha)} - \frac{q}{r(\beta)}. \end{aligned}$$

这说明, 静电场所作的功只与单位电荷的起始位置和终点位置有关, 与具体运动路径无关. \square

习题 14.2

1. 计算下列积分:

(1) $\int_C x dx + y dy + z dz$, C 是从 $(1, 1, 1)$ 到 $(2, 3, 4)$ 的直线段;

(2) $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, C 是以 $(1, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 1)$ 为顶点的正方形, 逆时针方向;

(3) $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, C 是圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向;

(4) $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, C 是抛物线 $y = x^2$ 从 $(-1, 1)$ 到 $(1, 1)$ 的一段.

(5) $\oint_C (x+y) dx + (x-y) dy$, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 逆时针方向.

2. 计算积分

$$\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

其中 C 为椭圆 $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$, 从 x 的正向看去, C 沿顺时针方向.

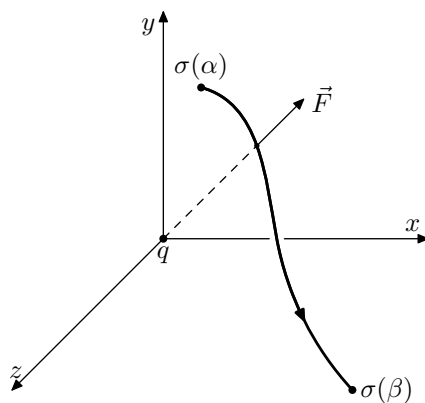


图 14.6 电场做功

3. 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在曲线 σ 上连续, 证明

$$\left| \int_{\sigma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right| \leq L(\sigma)M,$$

其中 $M = \sup_{\sigma} \sqrt{P^2 + Q^2}$.

4. 设 C 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 方向为逆时针. 利用上一题估计积分

$$I_R = \oint_C \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

并证明 $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$.

5. 计算质量为 m 的质点在重力场的作用下沿曲线 σ 从点 $A = \sigma(\alpha)$ 到点 $B = \sigma(\beta)$ 所作的功 W .

§14.3 第一型曲面积分

我们从曲面的面积开始. 设 $m \leq n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 \mathbb{R}^m 中的开集. C^1 映射 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为 \mathbb{R}^n 中的一个参数曲面. 我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始. 设 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $I \subset \mathbb{R}^m$ 为矩形. 如果 φ 是退化的 (秩小于 m), 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 包含在一个维数小于 m 的子向量空间中, 我们自然定义 $\varphi(I)$ 的 m 维体积为零; 如果 φ 非退化, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 维数为 m , $\varphi(I)$ 为 m 维欧氏空间中的可求体积集, 我们来计算它的 m 维体积. 以下为了区分不同维数的体积, 我们将 m 维体积称为面积, 并用记号 σ 来表示它.

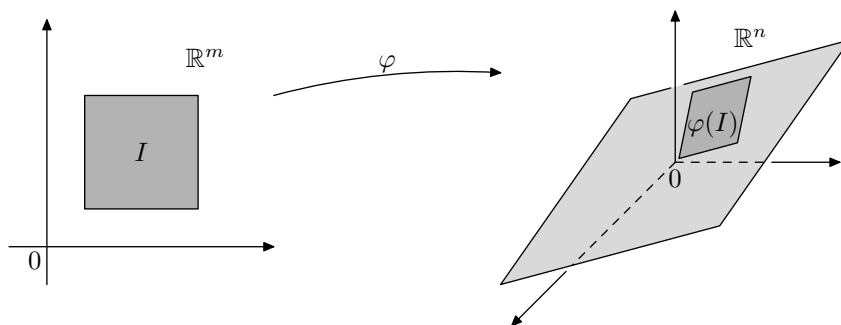


图 14.7 矩形在线性映射下的像

不妨设 $I = [0, 1]^m$. 记 $v_j = \varphi(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 \mathbb{R}^m 的一组标准基. 则

$$\varphi(I) = \left\{ \sum_{j=1}^m x_j v_j \mid 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, m \right\}.$$

我们要计算 $\varphi(I)$ 的面积. 先看 $m = 2$ 的情形. 此时, $\varphi(I)$ 是由 v_1, v_2 张成的平行四边形.

设 v_1, v_2 的夹角为 θ , 则 $\sigma(\varphi(I)) = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sin \theta$, 而 $v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos \theta$. 因此

$$|\sigma(\varphi(I))|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2 = \det(v_i \cdot v_j)_{2 \times 2}.$$

如果 $n = 3$, 利用叉乘上式还可表示为 $\sigma(\varphi(I)) = \|v_1 \times v_2\|$.

一般地, 我们断言 $\sigma(\varphi(I)) = \det(v_i \cdot v_j)_{m \times m}$. 当 $m = n - 1$ 时, 利用 \mathbb{R}^n 中叉乘运算的性质还可得到

$$\sigma(\varphi(I)) = \|v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}\|.$$

事实上, 记 $A = (a_{ij})_{n \times m}$. 如果当 $i > m$ 时 $a_{ij} \equiv 0$, 即

$$\varphi(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} = \{(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n\},$$

则根据第十三章第四节的计算, 特别是 (13.4) 式, $\varphi(I)$ 的面积可表示为

$$\sigma(\varphi(I)) = |\det(a_{ij})_{m \times m}| \sigma(I) = \sqrt{\det[A^\top A]} \sigma(I).$$

一般的情形, 我们总可以选择 \mathbb{R}^n 中的一个正交变换 O , 使得 $O(\varphi(\mathbb{R}^m)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, 因为正交变换保持面积和体积等不变, 故有

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(I)) &= \sigma(O(\varphi(I))) = \sqrt{\det[OA]^\top [OA]} \sigma(I) \\ &= \sqrt{\det[A^\top A]} \sigma(I) = \sqrt{\det(v_i \cdot v_j)_{m \times m}} \sigma(I). \end{aligned}$$

一般地, 如果 Ω 为 \mathbb{R}^m 中可求面积 (体积) 集, 则 $\varphi(\Omega)$ 为 \mathbb{R}^n 中一个 m 维平面中的可求面积集, 且

$$\sigma(\varphi(\Omega)) = \sqrt{\det[A^\top A]} \sigma(\Omega), \quad (14.3)$$

这是 (13.4) 式的推广.

现在考虑一般的参数曲面 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, 假设 φ 是 C^1 映射. 取 $x_0 \in \Omega$, 设 $J\varphi(x_0)$ 非退化 (秩为 m), 定义 $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$L(x) = \varphi(x_0) + J\varphi(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

记 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$ 为正交投影, 则映射

$$\pi \circ \varphi - L: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^m),$$

满足条件 $J(\pi \circ \varphi - L)(x_0) = 0$. 根据第十三章第四节的讨论可知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 A 为包含在 x_0 的 δ 邻域内的可求面积集时, 有

$$|\sigma(\pi(\varphi(A))) - \sigma(L(A))| < \varepsilon \cdot \sigma(A),$$

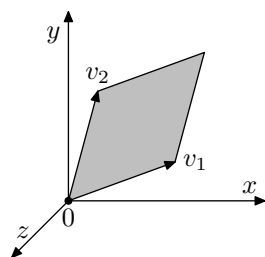


图 14.8 平行四边形

即 (由 (14.3) 式)

$$|\sigma(\pi(\varphi(A))) - \sqrt{\det[(J\varphi)^\top(x_0)J\varphi(x_0)]}\sigma(A)| < \varepsilon \cdot \sigma(A), \quad (14.4)$$

这是 (13.5) 式的推广. 如果将 $\varphi(A)$ 的“面积”近似地用它在 x_0 处参数曲面的切空间 $L(\mathbb{R}^m)$ 上的投影 $\pi(\varphi(A))$ 的面积代替时, 我们就得到了参数曲面面积的如下积分定义:

定义 14.3.1 (面积公式). 设 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非退化的 C^1 映射, Ω 为 \mathbb{R}^m 中可求面积的集合, 则 $\varphi(\Omega)$ 的面积定义为

$$\sigma(\varphi(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det[(J\varphi)^\top J\varphi]}. \quad (14.5)$$

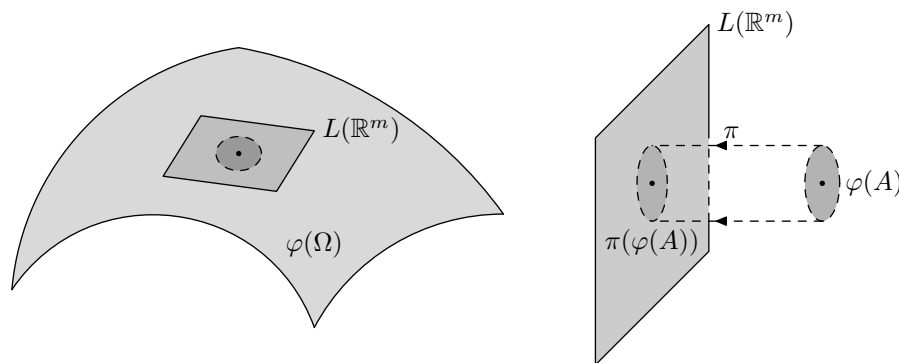


图 14.9 参数曲面面积的定义

注. (1) 如果 $\varphi(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, 则公式 (14.5) 变成了引理 13.4.5 中的等式; 如果 $m = 1$, 则 (14.5) 就是连续可微曲线的弧长公式.

(2) 与曲线一样, 曲面可以选取不同的参数化. 如果 $\phi: \Omega' \rightarrow \Omega$ 是 C^1 的可逆映射, 则 $\varphi \circ \phi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^m$ 也是参数曲面, 它们的面积用 (14.5) 式定义出来是一致的 (习题).

例 14.3.1. \mathbb{R}^3 中参数曲面的面积公式.

设 $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ((u, v) \in D)$ 为参数曲面, 则根据前面的讨论, 其面积为

$$\sigma = \int_D \|r_u \times r_v\| \, dudv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \quad (14.6)$$

其中

$$\begin{aligned} E &= r_u \cdot r_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, & G &= r_v \cdot r_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \\ F &= r_u \cdot r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v. \end{aligned}$$

特别地, 当曲面由方程

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

给出时, $r_x = (1, 0, f_x)$, $r_y = (0, 1, f_y)$, 因此

$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

曲面的面积公式成为

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (14.7)$$

例 14.3.2. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的面积.

解. 二维球面的参数表示为

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

此时

$$r_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi), \quad r_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, a \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

因此

$$EG - F^2 = a^4 \sin^2 \varphi,$$

从而球面面积为

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2.$$

例 14.3.3. 参数超曲面的面积.

设 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为参数超曲面, 其中

$$\varphi(u) = \varphi(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \Omega.$$

超曲面的切向量为 $\varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{n-1}}$. 根据前面的讨论, 超曲面的面积为

$$\sigma = \int_\Omega \|\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}\| du_1 \cdots du_{n-1}. \quad (14.8)$$

例 14.3.4. 设 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续可微函数, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$. 则 $\text{graph}(f)$ 为 \mathbb{R}^n 中的超曲面, 其面积公式为

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}, \quad (14.9)$$

其中 $\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_{n-1}})$ 是 f 的梯度.

这是 (14.7) 式的推广. $\text{graph}(f)$ 的参数表示为

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})), \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D.$$

此时

$$\varphi_{x_1} \times \dots \times \varphi_{x_{n-1}} = (-1)^n (f_{x_1}, \dots, f_{x_{n-1}}, -1).$$

于是 (14.9) 式可从 (14.8) 式导出.

例 14.3.5. 求 $\{x_1 + \dots + x_n = a, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ 的面积, 其中 $a > 0$.

解. 记

$$\Delta_{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 + \dots + x_{n-1} \leq a, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n-1\},$$

则所考虑的曲面有参数表示

$$\varphi: \Delta_{n-1}(a) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (x, f(x)),$$

其中 $f(x) = a - x_1 - \dots - x_{n-1}$. 由 (14.9) 得

$$\sigma = \int_{\Delta_{n-1}(a)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} = \int_{\Delta_{n-1}(a)} \sqrt{n},$$

再根据第十三章中单形的体积公式得

$$\sigma = \sqrt{n} \sigma(\Delta_{n-1}(a)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} a^{n-1}.$$

例 14.3.6. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$ 的面积.

解. 根据对称性, 只要计算上半球面的面积即可. 上半球面的方程为

$$w = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

此时,

$$1 + \|\nabla w\|^2 = 1 + (-x/w)^2 + (-y/w)^2 + (-z/w)^2 = (a/w)^2,$$

根据 (14.9) 式有

$$\sigma = 2 \int_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} dx dy dz,$$

利用 \mathbb{R}^3 中的球面坐标, 有

$$\sigma = 2 \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr,$$

在上式中利用变量代换 $r = a \sin t$, 最后得

$$\sigma = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t dt = 2\pi^2 a^3.$$

这个例题还可以用 \mathbb{R}^4 中的球面坐标来做, 这样可以避免 $w = 0$ 的问题. \square

值得指出的是, 我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的, 这主要是要用到曲面的切平面. 我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积, 求和再取极限以后定义为曲面的面积. 这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近. 那么, 能否象曲线那样, 通过在曲面上取分割, 然后用以分点为顶点的多边形 (比如三角形) 的面积和去逼近曲面的面积呢? Schwarz 曾经举过一个例子 (圆柱面) 说明这样的定义是行不通的. 对于一般的曲面, 定义面积需要引入 Hausdorff 测度的概念, 进一步的讨论超出了本课程的范围, 有兴趣的读者可以参看几何测度论的著作.

有了曲面面积的定义, 我们可以讨论曲面上有界函数的积分, 为了简单起见, 只考虑连续函数的情形.

定义 14.3.2 (第一型曲面积分). 设 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 的参数曲面, f 是定义在此曲面 Σ 上的连续函数, 则 f 在 Σ 上的曲面积分定义为

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_{\Omega} f \sqrt{\det[(J\varphi)^{\top} J\varphi]}.$$

第一型曲面积分的物理含义: 分布在表面上的某种物质, 如果其密度函数为 ρ , 则 ρ 在表面上的积分就是物质的质量.

例 14.3.7. 计算曲面积分 $\int_{\Sigma} \frac{1}{z} d\sigma$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 所截下的顶部, 此处 $0 < h < a$.

解. Σ 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{1}{z} d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq a^2-h^2} \frac{1}{z} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq a^2-h^2} \frac{a}{a^2-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{ar}{a^2-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a \ln\left(\frac{a}{h}\right). \end{aligned}$$

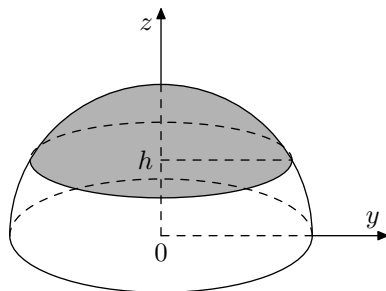


图 14.10 球帽

例 14.3.8. 设抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$ 上分布着密度为 $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ 的物质, 求该物质的质量.

解. 该物质的质量 m 为 $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ 在面上的积分, 即

$$\begin{aligned} m &= \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

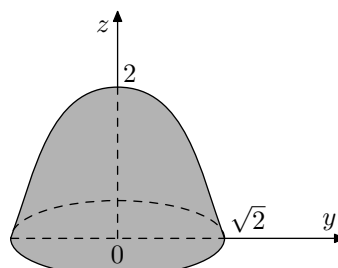


图 14.11 抛物面

习题 14.3

1. 用重积分的变量替换公式证明, 参数曲面的面积与参数的选取无关.
2. 求 $z = axy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内的面积.
3. 求锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 在 $z \geq 0$ 的部分截下的面积.
4. 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所截下的面积.
5. 计算曲面 $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = a$ 的面积.
6. 计算 n 维球面 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$ 的面积.
7. 重新研究第七章第一节中几种曲面的面积公式, 它们和本节中的定义一致吗?
8. 计算下列曲面积分:
 - (1) $\int_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$, Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$;
 - (2) $\int_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$, Σ 为 $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$;
 - (3) $\int_{\Sigma} \sqrt{x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4} d\sigma$, Σ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
 - (4) $\int_{\Sigma} xyz d\sigma$, Σ 为 $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.
9. 设球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上分布着密度为 ρ 的均匀物质, 求该物质的引力场.
10. 用 S^2 表示球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 当 f 连续时, 证明

$$\int_{S^2} f(ax + by + cz) d\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du.$$

§14.4 第二型曲面积分

首先我们考虑一个物理问题: 设空间中有流速为 $\vec{v} = (P, Q, R)$ 的流体, 求单位时间内通过曲面 Σ 的流体的流量. 要计算流量, 必须给曲面指定方向. 我们规定, 曲面在某点的方向是指该点处的一个单位法向量. 指定方向以后, 可用所谓的“微元法”计算流量如下: 任取 Σ 的一小片, 其面积记为 $d\sigma$, 经过这一小片的流体速度为 \vec{v} , 曲面的单位法向量为 \vec{n} , 则单位时间内通过这一小片曲面的流体的流量 $d\Phi$ 为 $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$. 于是单位时间内经过 Σ 的流量 Φ 可写为积分

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (14.10)$$

其中 $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$ 称为有向面积元.

从 (14.10) 式可以看出, 流量与曲面方向的选取有关. 方向的变化可导致流量的数值相差一个正负号. 如果在曲面上存在连续的单位法向量场, 则称该曲面**可定向**, 否则就称该曲面**不可定向**. 本节所涉及的曲面都假定是可定向的. 对于可定向曲面, 其**定向**(方向)是指一个连续的单位法向量场 \vec{n} .

为了计算 (14.10) 式中的积分, 我们通常要给曲面选取适当的参数表示. 设 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 Σ 的参数表示, 其中

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

记 $\vec{N} = \varphi_u \times \varphi_v$, 则

$$\vec{N} = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

\vec{N} 为曲面的法向量. 如果 $\vec{N}/\|\vec{N}\| = \vec{n}$, 则称 φ 是与给定定向相容的参数表示. 我们总是选取与给定定向相容的参数表示. 根据前节中的讨论, 曲面的面积元可写为 $d\sigma = \|\vec{N}\| dudv$. 此时 (14.10) 式可写为

$$\Phi = \int_D \vec{v} \cdot \vec{N} dudv = \int_D \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \quad (14.11)$$

另一方面, 记 $d\vec{\sigma} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$, 其中 $dy \wedge dz$ 是有向面积元 $d\sigma$ 在 yz 平面上的投影, $dz \wedge dx$ 是 $d\vec{\sigma}$ 在 zx 平面上的投影, $dx \wedge dy$ 是 $d\vec{\sigma}$ 在 xy 平面上的投影. 此时 (14.10) 式也可写为

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy. \quad (14.12)$$

由 $d\vec{\sigma} = \vec{N} dudv$ 可见

$$dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv, \quad dz \wedge dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv, \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv.$$

由此也可以看出 (14.11) 式和 (14.12) 式是等价的. 我们规定以下等式成立:

$$dz \wedge dy = -dy \wedge dz, \quad dx \wedge dz = -dz \wedge dx, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy.$$

根据以上讨论, 我们可以提出如下定义:

定义 14.4.1 (第二型曲面积分). 设 Σ 为 \mathbb{R}^3 中的可定向曲面, 与给定定向相容的参数表示为

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

对于定义在 Σ 上的连续向量值函数 (P, Q, R) , 定义其曲面积为

$$\Phi = \int_D \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv,$$

也记为

$$\Phi = \int_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

记 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 其中 α, β, γ 分别是 \vec{n} 与三个坐标轴的夹角. 当 $\cos \gamma \geq 0$, 即 \vec{n} 和 z 轴的夹角不超过 $\pi/2$ 时, \vec{n} 所决定的方向称为参数曲面的上侧方向; 反之, \vec{n} 所决定的方向称为参数曲面的下侧方向. 对于封闭的曲面, 指向曲面所围区域外部的单位法向量所决定的方向称为参数曲面的外侧方向, 指向曲面所围区域内部的单位法向量所决定的方向称为参数曲面的内侧方向.

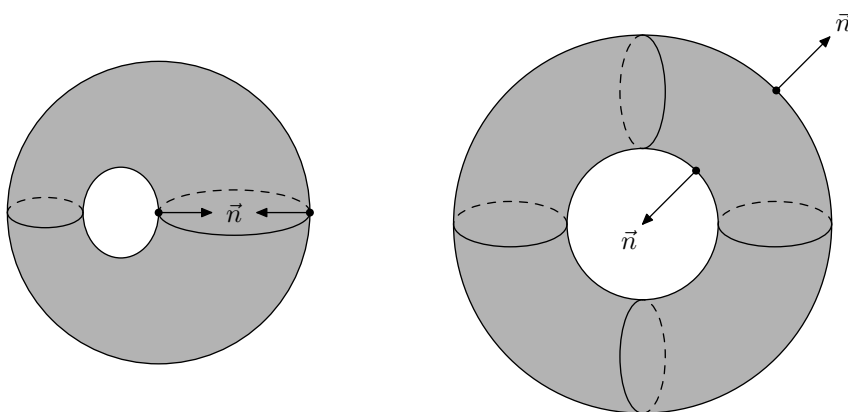


图 14.12 内法向和外法向

例 14.4.1. 计算积分 $\int_{\Sigma} xyz dx \wedge dy$, 其中 $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 方向为外侧.

解. 将曲面分成两部分, 即

$$\Sigma_1: z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad (x, y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\Sigma_2: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad (x, y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

在曲面上, 参数 (x, y) 决定的法向量为 $(-z_x, -z_y, 1)$, 因此, 这个参数在 Σ_1 上决定的方向就是外侧方向, 在 Σ_2 上决定的方向是内侧方向. 按照定义, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} xyz \, dx \wedge dy &= \int_{\Sigma_1} xyz \, dx \wedge dy + \int_{\Sigma_2} xyz \, dx \wedge dy \\ &= \int_D xy\sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy - \int_D xy(-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, dr = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

例 14.4.2. 计算积分 $\Phi = \int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, 其中 Σ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 方向为外侧.

解. 取球面坐标

$$x = a + R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b + R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c + R \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

计算表明

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

因此 (φ, θ) 决定的法向量是外侧的, 由定义, 有

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a + R \sin \varphi \cos \theta)^2 R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta \, d\varphi d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (c + R \cos \varphi)^2 R^2 \cos \varphi \\ &\quad \times \sin \varphi \, d\varphi d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (b + R \sin \varphi \sin \theta)^2 R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} (a + b + c) R^3. \end{aligned}$$

注. 事实上, 球面的单位外法向量为 $R^{-1} \cdot (x-a, y-b, z-c)$, 利用这一点可以将球面上的第二型积分化为第一型积分, 请读者自行验算.

上面的讨论可完全类似地推广到 \mathbb{R}^n 中的超曲面上. 如果存在连续的单位法向量场, 则称超曲面 Σ 可定向, 其定向(方向)是指一个给定的连续单位法向量场 \vec{n} . 设 Σ 的参数表示为

$$\varphi(u) = (x_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, x_n(u_1, \dots, u_{n-1})), \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in D.$$

其法向量为 $\vec{N} = \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{n-1}}$. 如果 $\vec{N}/\|\vec{N}\| = \vec{n}$, 则称 φ 是与给定方向 \vec{n} 相容的参数表示. 此时, 向量场 $\vec{v} = (f_1, \cdots, f_n)$ 在 Σ 上的积分定义为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^n f_i \cdot (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \int_D \vec{v} \cdot \vec{N} du_1 \cdots du_{n-1} \\ &= \int_D \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1})} \right] du_1 \cdots du_{n-1}.\end{aligned}$$

对于一般的 m 维可定向曲面也可以定义第二型的曲面积分, 我们将在下一章中作进一步的讨论.

例 14.4.3. 计算积分 $\Phi = \int_{\Sigma} xyzw dx \wedge dy \wedge dz$, 其中 Σ 为四维单形 $\{x + y + z + w \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, w \geq 0\}$ 的边界, 方向为内侧.

解. Σ 为 \mathbb{R}^4 中的超曲面, 它由五个部分组成, 其中四部分分别位于坐标平面上, 在这四部分上被积函数均为零. 第五部分为

$$\Sigma': w = 1 - x - y - z, \quad (x, y, z) \in D = \{x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

其法向量为 $(w_x, w_y, w_z, -1) = -(1, 1, 1, 1)$, 这是内侧方向, 因此

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\Sigma'} xyzw dx \wedge dy \wedge dz = \int_D xyz(1 - x - y - z) dx dy dz \\ &= \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz \int_0^{1-y-z} x dx dy dz - 3 \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz \int_0^{1-y-z} x^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz(1 - y - z)^2 dy dz - \int_{\{y+z \leq 1, y, z \geq 0\}} yz(1 - y - z)^3 dy dz \\ &= \frac{1}{7!}.\end{aligned}$$

在计算的过程中我们用到了 x, y, z 的对称性. □

习题 14.4

1. 用多重积分的变量替换公式研究第二型曲面积分在不同参数表示下如何变化.
2. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

其中 Σ 为球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧.

3. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy,$$

其中 Σ 是柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 的外侧面.

4. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz,$$

其中 Σ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$ 的上侧.

5. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy,$$

其中 Σ 是四面体 $x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的外侧.

6. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧.

7. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x dy \wedge dz \wedge dw,$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$ 的外侧.

8. 计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x dy \wedge dz \wedge dw,$$

其中 Σ 是曲面 $|x| + |y| + |z| + |w| = a$ 的外侧.

§14.5 几类积分之间的联系

我们知道, Newton-Leibniz 公式是微积分的一个核心定理. 对于一元函数来说, Newton-Leibniz 公式有两种表现形式:

- 如果 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 为 $[a, b]$ 上的可微函数, 且


$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x);$$

- 设 f 在 $[a, b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a), \quad \text{或} \quad \int_a^b df = f \Big|_a^b.$$

我们现在想把这些公式推广到多元函数. 在这一节我们只考虑几个特殊的情形, 一般的情形将在下一章中讨论.

§14.5.1 余面积公式

 本小节内容可以作为选读材料.

设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$. 取区间 $[a, b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a, b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 \mathbb{R}^n 中的超曲面. 事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$. 根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1, \dots, x_n) - t = 0 \quad (14.13)$$

存在 C^1 的 (局部) 解

$$x_n = \varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}. \quad (14.14)$$

即在 x^0 附近 $f^{-1}(t)$ 是参数曲面. 根据隐函数定理, 上式中的 φ_t 关于 t 也是 C^1 的. 在 (14.13) 中对 t 求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} - 1 = 0,$$

即

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}.$$

考虑变量替换 $\Phi: D \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

易见其 Jacobi 行列式为

$$\det J\Phi = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}.$$

如果记 $\Omega = \Phi(D \times [a, b])$, 根据多重积分的变量替换公式就有

$$v(\Omega) = \int_{D \times [a, b]} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1} dt = \int_a^b dt \int_D \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (14.15)$$

另一方面, 我们考虑水平集 $f^{-1}(t)$ 上的第一型曲面积分. 根据隐函数定理, (14.14) 中的参数方程满足条件

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

因此

$$1 + \|\nabla \varphi_t\|^2 = \|\nabla f\|^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-2}.$$

根据 (14.9) 和第一型曲面积分的定义得

$$\int_{f^{-1}(t) \cap \Omega} \frac{d\sigma}{\|\nabla f\|} = \int_D \frac{1}{\|\nabla f\|} \sqrt{1 + \|\nabla \varphi_t\|^2} dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_D \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1} \right| dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

因此 (14.15) 可改写为

$$v(\Omega) = \int_a^b dt \int_{f^{-1}(t) \cap \Omega} \frac{1}{\|\nabla f\|} d\sigma. \quad (14.16)$$

这个公式称为余面积公式 (co-area formula). 类似的推导可以得到这个公式的一般情形, 它可以看成重积分“投影法”的一般形式.

定理 14.5.1 (余面积公式). 设 f 条件如上. 如果 g 为 $f^{-1}([a, b])$ 上的连续函数, 则

$$\int_{f^{-1}([a, b])} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b dt \int_{f^{-1}(t)} \frac{g}{\|\nabla f\|} d\sigma.$$

这个公式将多重积分和第一型曲面积分联系起来. 我们看几个例子.

例 14.5.1. f 为坐标函数 $f(x) = x_n$.

当 $f(x) = x_n$ 时, $\|\nabla f\| = 1$. 设 $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, 则余面积公式成为

$$\int_{D \times [a, b]} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b dx_n \int_D g(x) dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

这也就是多重积分化累次积分的公式.

例 14.5.2. 球体的体积和球面的面积之间的关系.

考虑函数 $f(x) = r = \|x\|$, 当 $x \neq 0$ 时 $\|\nabla r\| = 1$, 根据余面积公式就得到

$$v(B_R) = v(f^{-1}[0, R]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(f^{-1}[\varepsilon, R]) = \int_0^R \sigma(S_t) dt, \quad (14.17)$$

其中, B_R 是半径为 R 的球体 $\{\|x\| \leq R\}$, S_t 是半径为 t 的球面 $\{\|x\| = t\}$. 特别地, 在 (14.17) 中关于 R 求导, 得

$$\sigma(S_R) = \frac{d}{dR} v(B_R),$$

我们已经知道球体的体积公式 $v(B_R) = \omega_n R^n$, 因此从上式可立即得到球面的面积公式

$$\sigma(S_R) = n\omega_n R^{n-1}.$$

例如, $n = 2$ 时半径为 R 的圆盘的面积为 πR^2 , 从而半径为 R 的圆周的周长为 $(\pi R^2)' = 2\pi R$; $n = 3$ 时, 半径为 R 的球体体积为 $(4/3)\pi R^3$, 因此半径为 R 的球面的面积为 $((4/3)\pi R^3)' = 4\pi R^2$.

需要说明的是, 如果函数 f 有有限个临界点 (驻点), 则在广义积分的意义下, 余面积公式也成立. 当 $m \leq n$ 时, 对于满足一定条件的映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 也有更一般的余面积公式. \square

§14.5.2 Green 公式

考虑平面 \mathbb{R}^2 上的有界闭域 Ω , 假定其边界由有限条 C^1 曲线组成. \mathbb{R}^2 上的标准定向限制在 Ω 上就得到 Ω 的定向. Ω 的边界 $\partial\Omega$ 有所谓的诱导定向. 这个诱导定向定义如下: 设 $(x(t), y(t))$ 为 $\partial\Omega$ 的一段参数曲线, 则 $(x'(t), y'(t))$ 为切向量, $(y'(t), -x'(t))$ 为法向量. 如果 $(y'(t), -x'(t))$ 为相对于区域 Ω 的外法向量, 则参数 t 决定的边界方向称为诱导定向. 直观上看, 从外法向到切向的旋转方向是逆时针的, 这种确定边界定向的方法又称为“右手法则”.

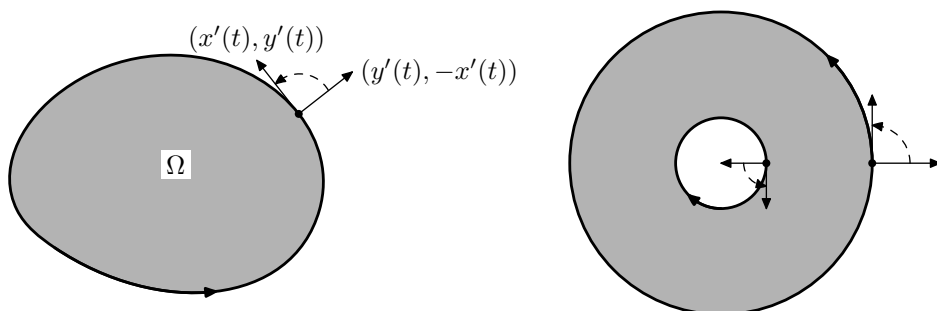


图 14.13 诱导定向

例 14.5.3. 环形区域的边界定向.

设 $b > a > 0$, 平面区域 $\{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ 是半径为 b 的大圆盘内挖去一个半径为 a 的小圆盘形成的环形区域. 它的边界由圆周 $\{x^2 + y^2 = b^2\}$ 和 $\{x^2 + y^2 = a^2\}$ 组成. 按照诱导定向的定义, 在大圆 $\{x^2 + y^2 = b^2\}$ 上, 方向是逆时针的; 而在小圆 $\{x^2 + y^2 = a^2\}$ 上, 方向应是顺时针的. \square

下面的重要结果将二重积分和第二型曲线积分联系起来, 这个结果通常称为 Green 公式.

定理 14.5.2 (Green). 设 Ω 为平面有界区域, 其边界由有限条 C^1 曲线组成, 边界的定向为诱导定向. 如果 P, Q 为 Ω 上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy.$$

我们只证明这个定理的一个特殊情形, 一般的情形可以借助下一章的单位分解定理转化为这种特殊情形. 先做一些预备工作.

设 $\varphi: D \rightarrow \Omega$ 为 C^2 的可逆映射, 记为

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

它可以看成 \mathbb{R}^2 内的一个坐标变换. 假设 φ 是保持定向的, 且 $\varphi(\partial D) = \partial\Omega$. 我们考察在这个坐标变换下二重积分和第二型曲线积分如何变化. 为此设 φ 将曲线 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ 映为曲线 $\sigma(t) \subset \partial\Omega$, $t \in [\alpha, \beta]$. 按照第二型曲线积分的定义, 有

$$\int_{\sigma} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t)] dt.$$

根据复合求导的链规则, 有

$$\begin{aligned} Px'(t) + Qy'(t) &= P(x_u u'(t) + x_v v'(t)) + Q(y_u u'(t) + y_v v'(t)) \\ &= (Px_u + Qy_u)u'(t) + (Px_v + Qy_v)v'(t). \end{aligned}$$

如果记

$$\tilde{P} = Px_u + Qy_u, \quad \tilde{Q} = Px_v + Qy_v,$$

则上面的计算表明

$$\int_{\gamma} \tilde{P} du + \tilde{Q} dv = \int_{\sigma} P dx + Q dy,$$

用到整个区域边界上就得到

$$\int_{\partial D} \tilde{P} du + \tilde{Q} dv = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy, \quad (14.18)$$

这是第二型曲线积分在坐标变换下的变换公式.

同理, 根据复合求导的链规则, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial x} x_u + \frac{\partial P}{\partial y} y_u, & \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial P}{\partial x} x_v + \frac{\partial P}{\partial y} y_v, \\ \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial Q}{\partial x} x_u + \frac{\partial Q}{\partial y} y_u, & \frac{\partial Q}{\partial v} &= \frac{\partial Q}{\partial x} x_v + \frac{\partial Q}{\partial y} y_v. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} &= \frac{\partial(Px_v + Qy_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px_u + Qy_u)}{\partial v} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial u} x_v + \frac{\partial Q}{\partial u} y_v \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial v} x_u + \frac{\partial Q}{\partial v} y_u \right) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

当 φ 保持定向时, $x_u y_v - y_u x_v > 0$, 根据重积分的变量代换公式就有

$$\int_D \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} \right) dudv = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (14.19)$$

将 (14.18) 和 (14.19) 结合起来我们就发现, 要说明 Green 公式在 Ω 上成立, 只要说明它在 D 上成立即可, 反之亦然.

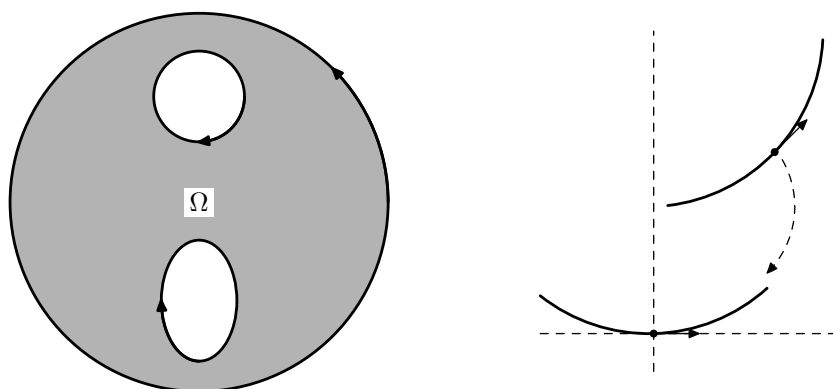


图 14.14 区域和它的边界

因此, 证明 Green 公式的想法就是将一般的区域变为较为简单的区域, 然后在较为简单的区域上考虑问题. 为此仍设 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ 为 $\partial\Omega$ 的一段 C^2 参数曲线, $t \in [\alpha, \beta]$. 设 $t_0 \in (\alpha, \beta)$, 且 $x'(t_0) \neq 0$. 通过适当的平移变换以及保定向的正交变换, 不妨设 $(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$, $(x'(t_0), y'(t_0)) = (1, 0)$. 因为 $x'(t_0) > 0$, 由反函数定理, 在 $t = t_0$ 附近 t 可以表示为 x 的函数, 从而曲线 $\sigma(t)$ 可以用参数 x 表示, 即 σ 可以表示为

$$\sigma(x) = (x, \phi(x)), \quad x \in [-a, a].$$

这个过程就是将曲线重新参数化, 使得 σ 表示为函数 $\phi(x)$ 的图像. 由于 $\phi(0) = 0$, 存在 $0 < \varepsilon < a/2$, 使得

$$|\phi(x)| < a/2, \quad \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

现在我们再作一个假设: 设 P, Q 在 $B_\varepsilon = \{x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$ 之外恒为零. 这样, 我们就只需在简单区域 $\Omega \cap B_\varepsilon$ 中考虑 Green 公式即可. 由于 $(1, 0)$ 是原点处的切向, 按照右手法则, $(0, -1)$ 应是原点处的单位外法向, 因此区域位于 $\phi(x)$ 图像的上方.

为了简化区域, 进一步考虑坐标变换

$$\varphi(x, y) = (x, y - \phi(x)), \quad (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a].$$

这是保持定向的坐标变换, $\varphi(x, \phi(x)) = (x, 0)$, 即 φ 将 σ 变为了 x 轴, 且

$$\varphi(\Omega \cap B_\varepsilon(0)) \subset [-a, a] \times [-a, a].$$

由于边界诱导定向要求法向量 $(0, -1)$ 方向向外, 因此 $\varphi(B_\varepsilon(0) \cap \Omega)$ 实际上包含于上半平面.

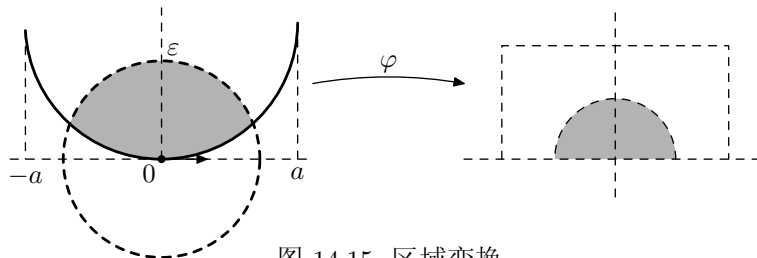


图 14.15 区域变换

由于 P, Q 在 B_ε 之外恒为零, 我们现在只要在矩形 $[-a, a] \times [0, a]$ 上验证 Green 公式就可以了. 矩形 $I = [-a, a] \times [0, a]$ 由四条边组成, 其中 $(x, 0)$ ($x \in [-a, a]$) 代表原来的曲线 σ , 而 P, Q 在其余三条边附近均为零. 因此

$$\int_{\partial I} P dx + Q dy = \int_{-a}^a P(x, 0) dx,$$

且

$$\begin{aligned} \int_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_0^a dy \int_{-a}^a \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_{-a}^a dx \int_0^a \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_0^a [Q(a, y) - Q(-a, y)] dy - \int_{-a}^a [P(x, a) - P(x, 0)] dx \\ &= \int_{-a}^a P(x, 0) dx, \end{aligned}$$

这说明 Green 公式在 I 上成立. \square

注. 在证明过程中, 我们假设了边界是 C^2 曲线, 这个条件可以减弱. 一般地, 利用光滑逼近可以证明, 当区域边界由有限条分段 C^1 的连续曲线组成时, Green 公式仍然成立.

例 14.5.4. 简单闭曲线所围区域的面积.

设 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [\alpha, \beta]$) 为 \mathbb{R}^2 上分段连续可微的简单闭曲线, 它围成的区域记为 Ω . 在 Green 公式中取 $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, 则得到如下面积公式

$$\begin{aligned} \sigma(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} P dx + Q dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt, \end{aligned} \quad (14.20)$$

其中, 参数 t 选取的方向是逆时针的.

作为例子, 考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积. 椭圆的参数方程为

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

于是其面积为

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + a \sin t b \sin t) dt = \pi ab.$$

例 14.5.5. 计算积分 $I = \int_C x^2 y dx - xy^2 dy$, 其中 C 是上半圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, 逆时针方向.

解. 考虑上半圆的边界, 它由 C 以及 $(x, 0)$ ($x \in [-a, a]$) 组成, 在上半圆区域上用 Green 公式, 得

$$I = \int_{\{x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0\}} (-x^2 - y^2) dx dy = - \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^3 dr = -\frac{\pi}{4} a^4.$$

例 14.5.6. 设 Ω 为包含原点的有界区域, 其边界为 C^1 曲线, 方向为诱导定向. 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}.$$

解. 取中心为原点的小圆 $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 使得 $B_\varepsilon \subset \Omega$. 小圆上的定向规定为逆时针方向 (从而与诱导定向相反), 其参数表示为 $x = \varepsilon \cos \theta$, $y = \varepsilon \sin \theta$. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

在区域 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 中利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx dy \\ &= I - \int_{\{x^2+y^2=\varepsilon^2\}} \left(\frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= I - \int_0^{2\pi} d\theta = I - 2\pi. \end{aligned}$$

这说明 $I = 2\pi$.

例 14.5.7. 代数基本定理.

设 $p(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ 为复系数 n 次多项式. 我们要说明 $p(z)$ 在复平面上必有零点. (反证法) 设 $p(z)$ 处处非零. 当 $R > 0$ 时, 记 $p(Rz)/R^n$ 的实部和虚部分别为 f, g , 则 f 和 g 不能同时为零. 考虑

$$\frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} = P dx + Q dy, \quad \text{其中 } P = \frac{f g_x - g f_x}{f^2 + g^2}, \quad Q = \frac{f g_y - g f_y}{f^2 + g^2}.$$

容易验证 $Q_x - P_y = 0$. 根据 Green 公式, 有

$$\int_{S^1} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} = \int_{\mathbb{D}} (Q_x - P_y) dx dy = 0, \quad (14.21)$$

其中 $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. 另一方面, 在 S^1 上, 记 $z = e^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos n\theta + \frac{1}{R} [a_1 \cos(n-1)\theta - b_1 \sin(n-1)\theta + \dots], \\ g(z) &= \sin n\theta + \frac{1}{R} [a_1 \sin(n-1)\theta + b_1 \cos(n-1)\theta + \dots], \end{aligned}$$

其中 a_1, b_1 分别为 c_1 的实部和虚部. 由此可见, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, $f^2 + g^2 = 1 + O(1/R)$, 且

$$fdg - gdf = (fg_\theta - gf_\theta)d\theta = [n + O(1/R)]d\theta.$$

这说明, 当 R 充分大时

$$\int_{S^1} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2} = \int_0^{2\pi} [n + O(1/R)]d\theta = 2\pi n + O(1/R) \neq 0,$$

这与 (14.21) 式相矛盾!

代数基本定理是由 Gauss 首先证明的. 有趣的是, 此结果至今还没有纯代数的证明.

最后, 我们讨论 Green 公式的变形. 如果 v 为 C^1 函数, 则由

$$\frac{\partial(Qv)}{\partial x} - \frac{\partial(Pv)}{\partial y} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]v + \left[Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

可得

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]v \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v(P \, dx + Q \, dy) - \int_{\Omega} \left[Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right] \, dx dy, \quad (14.22)$$

这可以看成平面上的分部积分公式. 对于 C^2 函数 u , 如果记

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \nabla u = (u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

以 $P = -u_y, Q = u_x$ 代入 (14.22) 得

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v(-u_y dx + u_x dy) - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.23)$$

利用单位外法向量 \vec{n} , 弧长参数 s 以及等式

$$\vec{n} ds = (y'(t), -x'(t)) dt$$

可以将 (14.23) 改写为

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.24)$$

或用方向导数继续改写为

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (14.25)$$

如果 v 也是 C^2 函数, 则在上式中交换 u, v 的位置, 然后两式相减可得

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (14.26)$$

这些都是很有用的公式, 称为 Green 恒等式.

§14.5.3 Gauss 公式

设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 为 C^1 曲面. 边界定向为诱导定向, 即外侧方向. 与平面上的 Green 公式类似, 下面的 Gauss 公式将三重积分与第二型曲面积分联系起来.

定理 14.5.3 (Gauss). 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界由有限个 C^1 曲面组成, 曲面的定向为诱导定向. 如果 P, Q, R 为 Ω 上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

和 Green 公式一样, 我们证明一个特殊情形: 在某个边界点的一个小邻域之外 P, Q 和 R 均恒为零. 证明的思路也是类似的, 先说明 Gauss 公式在坐标变换下具有形式不变性, 然后利用坐标变换将问题变为矩形区域内的 Gauss 公式.

为此, 设 $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ 为 C^2 的保定向坐标变换, 记为

$$\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \quad (u, v, w) \in \tilde{\Omega}.$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}, \\ \tilde{Q} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(w, u)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}, \\ \tilde{R} &= P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

利用复合求导的链规则以及第二型曲面积分的定义不难得到

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{P} dv \wedge dw + \tilde{Q} dw \wedge du + \tilde{R} du \wedge dv = \int_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy. \quad (14.27)$$

这是坐标变换下第二型曲面积分的变换公式. 为了得到重积分的变换公式, 注意到

$$(P_u, P_v, P_w) = (P_x, P_y, P_z) \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix},$$

根据逆矩阵的表达式可以解得

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = P_u \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} + P_v \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} + P_w \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= Q_u \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} + Q_v \frac{\partial(z, x)}{\partial(w, u)} + Q_w \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= R_u \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)} + R_v \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)} + R_w \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},\end{aligned}$$

直接的计算表明

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) = 0,$$

在上式中将 (y, z) 换成 (z, x) 或 (x, y) 也成立. 利用这些等式不难得到

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial w} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)},$$

如果 φ 是保持定向的坐标变换, 则由重积分的变量代换公式及上式就得到

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial w} \right) dudvdw = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \quad (14.28)$$

结合 (14.27) 式, 我们就知道要说明 Gauss 公式在 Ω 上成立, 只要说明它在 $\tilde{\Omega}$ 上成立即可, 反之亦然.

通过平移以及适当的保定向的正交变换, 我们可以假设 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, P, Q, R 在 $B_\varepsilon(0)$ 外恒为零, 且 $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(0)$ 为 C^1 函数 $\phi(x, y)$ 的图像, 其中 $\phi(0, 0) = 0$, $\nabla\phi(0, 0) = (0, 0)$. 此时, 在原点 $(0, 0, 0)$ 处的单位外法向是 $(0, 0, 1)$, 因此区域 $\Omega \cap B_\varepsilon(0)$ 位于图像的下方.

与 Green 公式的证明类似, 通过适当的保定向的坐标变换, 我们将该区域变为矩形区域 $I = [-a, a]^2 \times [-a, 0]$ 的一部分, 在这个变换下边界 $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(0)$ 变为 $[-a, a]^2 \times \{0\}$ 的一部分, 而 P, Q, R 在经过变换后在矩形 $[-a, a]^2 \times [-a, 0]$ 的其它几个边界附近恒为零. 我们只要在这个矩形区域上验证 Gauss 公式成立就行了. 经过这些预备以后我们得到

$$\int_{\partial I} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_{[-a, a]^2} R(x, y, 0) dxdy,$$

以及

$$\begin{aligned}& \int_I \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 dz \int_{-a}^a \frac{\partial P}{\partial x} dx + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^0 dz \int_{-a}^a \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \int_{-a}^a dy \int_{-a}^0 [P(a, y, z) - P(-a, y, z)] dz + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^0 [Q(x, a, z) - Q(x, -a, z)] dz \\ &\quad + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a [R(x, y, 0) - R(x, y, -a)] dy \\ &= \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a R(x, y, 0) dy,\end{aligned}$$

这说明 Gauss 公式在我们的假设下成立.

注. 当区域的边界是片 C^1 时 Gauss 公式仍然成立, 证明的方法也可以推广到一般的欧氏空间 \mathbb{R}^n 中.

例 14.5.8. 曲面所围区域的体积.

设有界区域 Ω 的边界为 C^1 曲面, 在 Gauss 公式中取 $P = x, Q = y, R = z$ 就得到了体积公式

$$v(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

作为例子, 我们计算椭球 $E(a, b, c) = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ 的体积. 取广义球面坐标

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

这个坐标在椭球面上给出的方向是外侧的, 因此

$$\begin{aligned} v(E(a, b, c)) &= \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} + y \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} + z \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} [abc \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + abc \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + abc \cos^2 \varphi \sin \varphi] d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} abc \sin \varphi d\theta = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

例 14.5.9. 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy,$$

其中 Ω 是包含原点在内的有界区域, 其边界取外侧方向.

解. 记 $P = x/r^3, Q = y/r^3, R = z/r^3$, 则易验证

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

取以原点为中心的且完全包含于 Ω 的小球 $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2\}$, 小球面的定向取相对于小球体的外侧向, 则由 Gauss 公式以及刚才的体积公式得

$$I = \int_{\{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}} \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy = \varepsilon^{-3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.$$

作为这个例子的一个应用, 考虑位于区域内部 (x_0, y_0, z_0) 处的点电荷 q , 它产生的静电场为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

则电场 \vec{E} 通过曲面 $\partial\Omega$ 的电通量为

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \frac{q(x-x_0)}{r^3} dy \wedge dz + \frac{q(y-y_0)}{r^3} dz \wedge dx + \frac{q(z-z_0)}{r^3} dx \wedge dy \\ &= 4\pi q.\end{aligned}$$

例 14.5.10. 散度定理.

以函数 P, Q, R 为分量的向量场记为 $\vec{X} = (P, Q, R)$. 向量场的散度 $\operatorname{div}\vec{X}$ 定义为

$$\operatorname{div}\vec{X} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

利用散度, Gauss 公式可以写为

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{X} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (14.29)$$

其中 \vec{n} 为边界曲面的单位外法向量. 上式也称为**散度定理**.

作为一个物理应用, 考虑分布在区域 Ω 内的电荷产生的电场 \vec{E} , 假设电荷密度为 $\rho(x, y, z)$, 则 \vec{E} 在区域边界上的电通量为 (利用上例)

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} 4\pi\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

利用 (14.29) 式, 得

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{E} - 4\pi\rho) dx dy dz = 0,$$

在上式中将区域缩为一点就得到电场的 Gauss 定律:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho.$$

例 14.5.11. Green 恒等式.

设 v 为 C^1 函数, 如同 Green 公式的情形一样, 在 Gauss 公式中用 vP, vQ, vR 分别代替 P, Q, R 可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} v(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (14.30)\end{aligned}$$

或改写为

$$\int_{\Omega} v \cdot \operatorname{div}\vec{X} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} v\vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega} \vec{X} \cdot \nabla v dx dy dz, \quad (14.31)$$

其中 \vec{n} 为单位外法向量, $\nabla v = (v_x, v_y, v_z)$ 为 v 的梯度.

设 u 为 C^2 函数, 记

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

Δ 称为 Laplace 算子. 在 (14.31) 中以 $\vec{X} = \nabla u$ 代入, 有

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy dz = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz. \quad (14.32)$$

如果 v 也是 C^2 函数, 则在上式中交换 u, v 的位置然后两式相减可得

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx dy dz = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma. \quad (14.33)$$

上面这些公式都很有用, 特别是在研究欧氏空间中的调和函数的时候 (满足方程 $\Delta u = 0$ 的函数 u 称为调和函数).

§14.5.4 Stokes 公式

设 Σ 为 \mathbb{R}^3 中 C^2 的定向曲面, Ω 为 Σ 上的有界区域, 其边界为 C^1 曲线. 我们在边界 $\partial \Omega$ 上用“右手法则”定义诱导定向如下: 边界在曲面上的外法向量与边界的切向量的叉乘得到的曲面法向量与决定曲面定向的法向量同向. 即如果用右手从曲线外法向到切向作旋转, 则大拇指所指方向为定向曲面的法向.

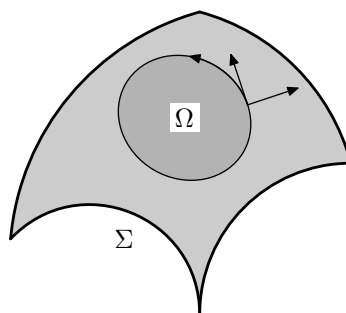


图 14.16 曲面区域

下面的 Stokes 公式将第二型曲面积分与第二型曲线积分联系起来.

定理 14.5.4 (Stokes). 设 Σ 为定向曲面, Ω 为曲面上的有界区域, 其边界赋以诱导定向. 如果 P, Q, R 为 Ω 附近的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial \Omega} P dx + Q dy + R dz.$$

和前面一样, 我们只证明一个特殊情形: 假定 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为定向曲面的 C^2 参数表示, 且 $\varphi(\tilde{\Omega}) = \Omega$, $\tilde{\Omega}$ 为 $D \subset \mathbb{R}^2$ 中的有界区域. 根据诱导定向的定义, $\partial \tilde{\Omega}$ 的定向也是平面上的诱导定向.

我们来讨论在参数表示下 Stokes 公式中的两个积分如何变化. 记

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

令

$$S = Px_u + Qy_u + Rz_u, \quad T = Px_v + Qy_v + Rz_v,$$

根据第二型曲线积分的定义不难得到

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} S du + T dv = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz. \quad (14.34)$$

从 S, T 的定义可推出

$$T_u - S_v = (P_u x_v - P_v x_u) + (Q_u y_v - Q_v y_u) + (R_u z_v - R_v z_u). \quad (14.35)$$

根据复合求导的链规则, 有

$$P_u = P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u, \quad P_v = P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v,$$

关于 Q, R 有完全类似的等式, 将它们代入 (14.35) 得

$$\begin{aligned} T_u - S_v &= P_y (y_u x_v - x_u y_v) + P_z (z_u x_v - x_u z_v) + Q_x (x_u y_v - y_u x_v) \\ &\quad + Q_z (z_u y_v - y_u z_v) + R_x (x_u z_v - z_u x_v) + R_y (y_u z_v - z_u y_v), \end{aligned}$$

或改写为

$$T_u - S_v = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

根据第二型曲面积分的定义可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (T_u - S_v) dudv &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

另一方面, 由平面上的 Green 公式得到

$$\int_{\tilde{\Omega}} (T_u - S_v) dudv = \int_{\partial\tilde{\Omega}} S du + T dv,$$

将以上两式和 (14.34) 结合起来就得到了曲面 Stokes 公式的证明. \square

注. 曲面是分片 C^1 时 Stokes 公式仍然成立.

例 14.5.12. Stokes 公式的旋度表示.

设 $\vec{X} = (P, Q, R)$ 为向量场, 定义其旋度场为

$$\operatorname{rot} \vec{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

有时也用 $\operatorname{curl} \vec{X}$ 表示旋度. 利用旋度, Stokes 公式可以改写为

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{T} ds, \quad (14.36)$$

其中 \vec{n} 为曲面的单位法向量, \vec{T} 为曲线的单位切向量, s 为弧长参数.

例 14.5.13. 曲面上的分部积分公式.

设 v 为 C^1 函数, $\vec{X} = (P, Q, R)$ 为向量场, 由旋度的定义易得

$$\operatorname{rot}(v\vec{X}) = v \cdot \operatorname{rot}\vec{X} + \left(R \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial z}, P \frac{\partial v}{\partial z} - R \frac{\partial v}{\partial x}, Q \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

利用向量的叉乘, 上式可以改写为

$$\operatorname{rot}(v\vec{X}) = v \cdot \operatorname{rot}\vec{X} + \nabla v \times \vec{X},$$

代入 (14.36) 式得

$$\int_{\Omega} v(\operatorname{rot}\vec{X} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\partial\Omega} v(\vec{X} \cdot \vec{T}) ds - \int_{\Omega} (\nabla v \times \vec{X}) \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (14.37)$$

如果 u 为 C^1 函数, 以 $\vec{X} = \nabla u$ 代入上式可得 (注意梯度的旋度为零)

$$\int_{\Omega} (\nabla v \times \nabla u) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial s} ds, \quad (14.38)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \vec{T}$ 是 u 沿切向的方向导数.

例 14.5.14. 计算积分

$$I = \int_{\partial\Omega} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

其中 Ω 为八分之一球面 $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}$, 方向为外侧诱导定向.

解. 由 Stokes 公式得

$$I = -2 \int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy.$$

由于球面的单位外法向量为 (x, y, z) , 故上述第二型曲面积分可以写为第一型曲面积分:

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_{\Omega} (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) d\sigma \\ &= -2 \int_{\Omega} (x + y + z) d\sigma = -6 \int_{\Omega} z d\sigma, \end{aligned}$$

其中我们用到了 x, y, z 之间的对称性. 于是

$$\begin{aligned} I &= -6 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}} z \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= -6 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}} dx dy = -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

注. 如果注意到积分 $\int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ 的几何意义就是八分之一球面向三个坐标平面作投影的面积之和, 则计算结果可以立即得到.

习题 14.5

1. (*) 利用余面积公式计算积分

$$I = \int_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} d\sigma,$$

其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. (*) 利用函数 $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ 以及余面积公式计算 $n-1$ 维单形

$$\{x_1 + \dots + x_n = a, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

的面积.

3. 利用 Green 公式计算下列积分:

(1) $\int_C xy^2 dx - x^2y dy$, C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向;

(2) $\int_C (x+y) dx - (x-y) dy$, C 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 逆时针方向;

(3) $\int_C (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, C 是从 $(1,1)$ 经过 $(3,2)$ 到 $(2,5)$ 再回到 $(1,1)$ 的三角形边界;

(4) $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, C 是上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ($y \geq 0$), 逆时针方向.

4. 利用 Green 公式计算下列曲线所围成的面积 ($a > 0$):

(1) 抛物线 $(x+y)^2 = ax$ 和 x 轴;

(2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

(3) $x^3 + y^3 = 3axy$.

5. 设 C 为平面上的连续可微的闭曲线, \vec{v} 为任意一个固定的向量, 证明

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0,$$

其中 \vec{n} 为 C 的单位外法向量.

6. (*) 设 $\phi(x)$ 为 $[-a, a]$ 上的连续可微函数, 且 $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. 证明, 存在 $0 < \varepsilon < a$, 使得 $\phi(x)$ 在 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上的图像与圆周 $\{x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$ 正好只有两个交点. (提示: 用微分中值定理).

7. 利用 Gauss 公式计算下列积分:

(1) $\int_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 方向为外侧;

(2) $\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, Σ 为矩形区域 $[0, a]^3$ 的边界, 方向为外侧;

(3) $\int_{\Sigma} (x-y)dy \wedge dz + (y-z)dz \wedge dx + (z-x)dx \wedge dy$, Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$), 方向向下.

8. 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界为 C^1 曲面. 如果 \vec{v} 为任意一个固定的向量, 证明

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

其中 \vec{n} 为 Ω 的单位外法向量.

9. 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界为 C^1 曲面, $(x_0, y_0, z_0) \notin \partial\Omega$. 记

$$\vec{r} = \left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right), \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

证明

$$\int_{\Omega} \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

10. 利用 Stokes 公式计算下列积分:

(1) $\int_C y dx + z dy + x dz$, C 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 从 x 轴看上去圆的方向是逆时针的;

(2) $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, C 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = a$, 从 x 轴看上去圆的方向是逆时针的;

(3) $\int_C (z-y) dx + (x-z) dy + (y-x) dz$, C 是从 $(a, 0, 0)$ 经过 $(0, a, 0)$ 到 $(0, 0, a)$ 再回到 $(a, 0, 0)$ 的三角形边界;

11. 证明: 梯度场的旋度为零; 旋度场的散度为零.

12. 设 v 为 C^1 函数, \vec{X} 为向量场, 证明

$$\operatorname{div}(v\vec{X}) = v \operatorname{div}\vec{X} + \nabla v \cdot \vec{X}, \quad \operatorname{rot}(v\vec{X}) = v \operatorname{rot}\vec{X} + \nabla v \times \vec{X}.$$

13. 如果 u, v 为 C^2 函数, 则有

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v, \quad \Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + 2\nabla u \cdot \nabla v.$$

14. 设 \vec{X}, \vec{Y} 为向量场, 证明 $\operatorname{div}(\vec{X} \times \vec{Y}) = \vec{Y} \cdot \operatorname{rot}\vec{X} - \vec{X} \cdot \operatorname{rot}\vec{Y}$.

15. 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界为 C^1 曲面, 方向为外侧. 如果 v 为 C^1 函数, \vec{X} 为 C^2 向量场, 则

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \operatorname{rot} \vec{X} \, dx dy dz = \int_{\partial\Omega} v(\operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{n}) \, d\sigma.$$

16. (*) 设 Ω 为平面上的有界区域, 其边界为 C^1 曲线. 如果 u 为 Ω 中的 C^2 函数, 且 $\Delta u = 0$, 则对 Ω 内部的任意点 (x_0, y_0) , 均有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} u - \frac{\partial u}{\partial n} \ln r \right] ds,$$

其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\vec{r} = \frac{1}{r}(x-x_0, y-y_0)$, \vec{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

17. (*) 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的有界区域, 其边界为 C^1 曲面. 如果 u 为 Ω 中的 C^2 函数, 且 $\Delta u = 0$, 则对 Ω 内部的任意点 (x_0, y_0, z_0) , 均有

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma,$$

其中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r}(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

\vec{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

§14.6 附录: Riemann-Stieltjes 积分



在初次阅读本书时, 本节内容可以略过, 也可以将部分内容作为选读材料.

§14.6.1 有界变差函数

回顾一下有界变差函数的定义: 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 对于区间 $[a, b]$ 的任意分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$v(f; \pi) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

如果 $\sup_{\pi} v(f; \pi)$ 有限, 则称 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 其全变差记为

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_{\pi} v(f; \pi).$$

我们已经知道单调函数, Lipschitz 函数等均为有界变差函数. 此外, 有界变差函数还具有以下性质:

- 有界变差函数必为有界函数. 事实上,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b(f).$$

- 两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.
- 设 f, g 为有界变差函数, 且 $|g(x)| \geq \lambda > 0$, 则 f/g 也是有界变差函数.
- 设 $c \in (a, b)$. 则 f 在 $[a, b]$ 上为有界变差函数当且仅当 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \quad (14.39)$$

证明如下: 设 f 在 $[a, b]$ 上为有界变差函数, 任取区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割 π_1 和 π_2 , 则

$$v(f|_{[a,c]}; \pi_1) + v(f|_{[c,b]}; \pi_2) = v(f; \pi_1 \cup \pi_2) \leq \bigvee_a^b(f),$$

这说明 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \leq \bigvee_a^b(f). \quad (14.40)$$

反之, 如果 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 则任取 $[a, b]$ 的分割 π , 如果 c 不在 π 的分点之内, 则添加 c 为分点, 此时 f 的变差和不会变小, 从而

$$v(f; \pi) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f),$$

即 f 在 $[a, b]$ 上也是有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^b(f) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \quad (14.41)$$

(14.40) 式和 (14.41) 式结合起来就得到了 (14.39). \square

从最后这一条性质可以立即得到

推论 14.6.1. 设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则

$$g(x) = \bigvee_a^x(f), \quad x \in [a, b]$$

为 $[a, b]$ 上的非负单调递增函数.

证明. 设 $x \leq y \in [a, b]$, 则

$$g(y) - g(x) = \bigvee_a^y(f) - \bigvee_a^x(f) = \bigvee_x^y(f) \geq 0,$$

因此 g 为单调递增函数. □

下面的结果给出了有界变差函数的刻画.

定理 14.6.2. f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

证明. 只要证明必要性就可以了. 设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 令

$$g(x) = \bigvee_a^x(f), \quad h(x) = g(x) - f(x), \quad x \in [a, b],$$

则 $f = g - h$, 我们已经知道 g 单调递增, 下面说明 h 也是单调递增的. 任取 $x \leq y \in [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \\ &= \bigvee_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \geq |f(y) - f(x)| - [f(y) - f(x)] \geq 0, \end{aligned}$$

因此 h 也是单调递增函数. □

注. 上述等式 $f = g - h$ 称为 f 的典范分解.

命题 14.6.3. 设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 如果 f 在 ξ 处连续, 则

$$g(x) = \bigvee_a^x(f)$$

也在 ξ 处连续.

证明. 设 $a < \xi$, 我们证明 g 在 ξ 处左连续, 右连续的证明是类似的. 因为 g 是单调递增函数, 故 $g(x)$ 在 ξ 处的左极限 $g(\xi - 0)$ 存在, 且 $g(\xi - 0) \leq g(\xi)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $[a, \xi]$ 的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \xi$$

使得

$$v = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \bigvee_a^\xi(f) - \varepsilon.$$

根据 f 在 ξ 处连续知, 存在 $0 < \delta < |\xi - x_{m-1}|$, 使得当 $|x - \xi| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

于是当 $x \in (\xi - \delta, \xi)$ 时, 有

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x) - f(x_{m-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x) - f(x_{m-1})| + |f(\xi) - f(x)| - \varepsilon \\ &\geq \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| - \varepsilon \\ &> \bigvee_a^\xi(f) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这说明 $g(\xi - 0) \geq g(\xi)$. □

从这个命题可以得到下面的推论, 我们省略证明.

推论 14.6.4. (1) 连续的有界变差函数可表示为两个连续单调递增函数之差;

(2) 设 f 为 $[a, b]$ 上的连续有界变差函数, 则

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} v(f; \pi) = \bigvee_a^b(f).$$

§14.6.2 Riemann-Stieltjes 积分

设 α 为 $[a, b]$ 上的单调递增函数, f 为 $[a, b]$ 上的有界函数. 对于区间 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i(f) = \sup_{[x_i, x_{i-1}]} f, \quad m_i(f) = \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f, \quad \Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}),$$

令

$$U(f, \alpha; \pi) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta\alpha_i, \quad L(f, \alpha; \pi) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta\alpha_i,$$

$U(f, \alpha; \pi)$ 和 $L(f, \alpha; \pi)$ 分别称为 f 关于 α 以及分割 π 的 Darboux 上和与 Darboux 下和, 简称上和与下和. 记

$$\overline{\int}_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf_{\pi} U(f, \alpha; \pi), \quad \underline{\int}_a^b f(x) d\alpha(x) = \sup_{\pi} L(f, \alpha; \pi),$$

分别称为 f 关于 α 的上积分与下积分, 有时也记为 $\bar{I}(f, \alpha)$ 与 $\underline{I}(f, \alpha)$. 如果上积分与下积分相等, 就称 f 关于 α 是 **Riemann-Stieltjes 可积的**, 其积分记为

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf_{\pi} U(f, \alpha; \pi) = \sup_{\pi} L(f, \alpha; \pi),$$

为了简单起见,我们也称 f 关于 α 可积 (RS 可积), 记为 $f \in R(\alpha)$.

显然, 当 $\alpha(x) = x$ 时, f 关于 α 可积就是指 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 因此 Riemann-Stieltjes 积分是 Riemann 积分的推广, 下面的许多讨论和 Riemann 积分的讨论是完全类似的 (也有不同之处), 在相似的地方我们将省略证明.

为了得到 RS 可积的充要条件, 我们再引入关于区间分割加细的概念. 设 π, π' 为 $[a, b]$ 的分割, 如果 π 的分点均为 π' 的分点, 则称 π' 是 π 的加细, 记为 $\pi' \geq \pi$ 或 $\pi \leq \pi'$. 与 Riemann 积分的讨论类似, 我们有

- 对于任意分割 π , 均有 $L(f, \alpha; \pi) \leq U(f, \alpha; \pi)$, 即下和不超过上和;
- 如果 $\pi' \geq \pi$, 则上和不增, 下和不减, 即

$$U(f, \alpha; \pi') \leq U(f, \alpha; \pi), \quad L(f, \alpha; \pi') \geq L(f, \alpha; \pi);$$

- 如果 π_1, π_2 是任意两个分割, 则

$$L(f, \alpha; \pi_1) \leq U(f, \alpha; \pi_2),$$

这只要考虑 $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ 以及利用上两条性质即可;

- $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$, 即下积分不超过上积分.

和 Riemann 积分类似, 对于分割 π , 取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$), 定义 f 关于 α 和分割 π 以及 $\{\xi_i\}$ 的 Riemann-Stieltjes 和为

$$S(f, \alpha; \pi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \alpha_i.$$

定理 14.6.5. 设 α 为 $[a, b]$ 上的单调递增函数, f 为有界函数, 则下列条件等价:

- (1) $f \in R(\alpha)$, 即 f 关于 α 是 Riemann-Stieltjes 可积的;
- (2) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π , 使得

$$U(f, \alpha; \pi) - L(f, \alpha; \pi) < \varepsilon;$$

- (3) 存在实数 I , 使得任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π_ε , 当分割 $\pi \geq \pi_\varepsilon$ 时

$$|S(f, \alpha; \pi, \xi) - I| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

证明. 证明与 Riemann 积分的情形完全类似, 略. □

注. 需要注意的是, 在 Riemann 积分的情形, 当 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积时

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f; \pi, \xi) = \int_a^b f(x) dx,$$

而这个定理中的 (3) 关于分割的要求的是 $\pi \geq \pi_\varepsilon$, 对于 Riemann-Stieltjes 积分这两个条件并不等价. 例如, 考虑下面的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2], \\ 2, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 1/2], \\ 4, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

不难验证 $f \in R(\alpha)$, 但极限 $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \alpha; \pi, \xi)$ 不存在.

下面的两个结果给出了一些可积函数类.

定理 14.6.6. 如果 α 为 $[a, b]$ 上的单调递增函数, f 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f \in R(\alpha)$, 且

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f; \pi, \xi) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

证明. 利用闭区间上连续函数的一致连续性以及定理 14.6.5 即可, 略. \square

定理 14.6.7. 如果 α 为 $[a, b]$ 上的单调递增连续函数, f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 $f \in R(\alpha)$.

证明. 不妨设 f 是单调递增的. 对正整数 n , 取 $[a, b]$ 的分割 π , 使得

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

根据 α 的连续性, 这是可以做到的. 对于分割 π , 有

$$\begin{aligned} U(f, \alpha; \pi) - L(f, \alpha; \pi) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

取充分大的 n , 由定理 14.6.5 的 (2) 即知 f 关于 α 是可积的. \square

下面是 Riemann-Stieltjes 积分的一些性质:

- 设 $f_1, f_2 \in R(\alpha)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in R(\alpha)$, 且

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f_1(x) d\alpha(x) + c_2 \int_a^b f_2(x) d\alpha(x).$$

- 设 $c \in (a, b)$, 则 f 在 $[a, b]$ 上关于 α 可积当且仅当 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均是可积的, 且此时有

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

如果我们约定

$$\int_a^a f(x) d\alpha(x) = 0, \quad \int_b^a f(x) d\alpha(x) = - \int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

则前式对于闭区间中的任意三点均成立.

- 如果 $f_1, f_2 \in R(\alpha)$, 且 $f_1 \leq f_2$, 则

$$\int_a^b f_1(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b f_2(x) d\alpha(x).$$

- 如果 $f \in R(\alpha)$, 则 $|f| \in R(\alpha)$, 且

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x).$$

- 如果 $f_1, f_2 \in R(\alpha)$, 则 $f_1 \cdot f_2 \in R(\alpha)$.
- 如果 $f_1, f_2 \in R(\alpha)$, 且 $|f_2| \geq \lambda > 0$, 则 $f_1/f_2 \in R(\alpha)$.
- 如果 $f \in R(\alpha)$, ϕ 在包含 $f([a, b])$ 的区间上连续, 则 $\phi(f) \in R(\alpha)$.
- 设 α_1, α_2 均为单调递增函数, 且 $f \in R(\alpha_1), f \in R(\alpha_2)$, 则对正实数 c_1 与 c_2 , 有 $f \in R(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)$, 且

$$\int_a^b f(x) d[c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x)] = c_1 \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) + c_2 \int_a^b f(x) d\alpha_2(x).$$

定理 14.6.8 (积分第一中值公式). 设 α 为 $[a, b]$ 上的单调递增函数, f 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(\xi)[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

证明. 如果 $\alpha(b) = \alpha(a)$, 则 α 为常值函数, 定理结论显然成立. 下设 $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$. 因为 f 为连续函数, 它在 $[a, b]$ 上达到最小值 m 以及最大值 M . 由上下和的定义, 有

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(f, \alpha; \pi) \leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq U(f, \alpha; \pi) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

这说明

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \leq M,$$

由连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)},$$

结论得证. □

到现在为止, 我们假设了 Riemann-Stieltjes 积分中的 α 是单调递增函数, 下面我们推广到有界变差函数的情形. 设 α 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, $\alpha = \beta - \gamma$ 为其典范分解. 如果有界函数 f 关于 β 和 γ 都是可积的, 则称 f 关于 α 是 Riemann-Stieltjes 可积的, 记为 $f \in R(\alpha)$, f 关于 α 的积分定义为

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\beta(x) - \int_a^b f(x) d\gamma(x).$$

根据前面的结果, 我们可以得到下面的结论:

- 如果 f 为连续函数, α 为有界变差函数, 则 $f \in R(\alpha)$;
- 如果 f 为有界变差函数, α 为连续的有界变差函数, 则 $f \in R(\alpha)$.

命题 14.6.9. 设 α 是有界变差函数, 如果 f 关于 α 可积, 则

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\beta(x),$$

其中 $\beta(x)$ 是 α 的变差函数.

证明. 如果 f 关于 α 可积, 则 f 关于 β 以及 $\gamma = \beta - \alpha$ 可积, 从而 $|f|$ 关于 β 可积. 记

$$p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad q = \frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

则 p, q 均为单调递增函数, 且 $f, |f|$ 关于 p, q 均可积, 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) dp(x) \right| + \left| \int_a^b f(x) dq(x) \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)| dp(x) + \int_a^b |f(x)| dq(x) \\ &= \int_a^b |f(x)| d\beta(x). \end{aligned}$$

证明过程中用到了单调递增函数的 Riemann-Stieltjes 积分的性质. \square

定理 14.6.10. 设 α 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, f 为有界函数. 则下列几条等价:

- (1) $f \in R(\alpha)$;
- (2) 存在常数 I , 使得任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π_ε , 当 $\pi \geq \pi_\varepsilon$ 时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] - I \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- (3) $f \in R(\beta)$, 其中

$$\beta(x) = \bigvee_a^x(\alpha), \quad x \in [a, b].$$

证明. (1) \implies (2). 设 $\alpha = \beta - \gamma$ 为 α 的典范分解, 由定义, $f \in R(\beta)$ 和 $f \in R(\gamma)$ 均成立, 由定理 14.6.5 容易知道 (2) 成立, 且此时

$$I = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

(2) \implies (3) 设条件成立, 则对 $\pi \geq \pi_\varepsilon$, 当 $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0$ 时, 选取 $\xi_i, \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得

$$f(\xi_i) - f(\xi'_i) > M_i(f) - m_i(f) - \varepsilon;$$

否则选取 $\xi_i, \xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$f(\xi'_i) - f(\xi_i) > M_i(f) - m_i(f) - \varepsilon.$$

此时有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\xi'_i)] [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b), \end{aligned}$$

其中

$$\beta(b) = \bigvee_a^b(\alpha).$$

我们可以选择分割 $\pi \geq \pi_\varepsilon$ 使得

$$\beta(b) - \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| < \varepsilon,$$

此时有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)] \{ [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \} \\ &\quad + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n \{ [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \} + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &= 2M (\beta(b) - \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|) + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b) \\ &\leq 2M\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon\beta(b), \end{aligned}$$

其中 M 为 $|f|$ 的上确界. 根据定理 14.6.5, 这说明 $f \in R(\beta)$.

(3) \implies (1). 设 $f \in R(\beta)$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π , 使得

$$0 \leq U(f, \beta; \pi) - L(f, \beta; \pi) < \varepsilon.$$

记 $\gamma = \beta - \alpha$, 则由

$$|\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| \leq \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha) = \beta(x_i) - \beta(x_{i-1})$$

知

$$\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1}) = [\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] - [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \leq 2[\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})],$$

因此有

$$\begin{aligned} U(f, \gamma; \pi) - L(f, \gamma; \pi) &= \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)][\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})] \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)][\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \\ &= 2[U(f, \beta; \pi) - L(f, \beta; \pi)] < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $f \in R(\gamma)$, 根据定义即知 f 关于 α 可积. \square

推论 14.6.11. 设 $\alpha = \beta_1 - \gamma_1$ 为有界变差函数, 其中 β_1, γ_1 为单调递增函数. 如果 $f \in R(\beta_1), f \in R(\gamma_1)$, 则 $f \in R(\alpha)$, 且

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\beta_1(x) - \int_a^b f(x) d\gamma_1(x).$$

证明. 设 $\alpha = \beta - \gamma$ 为 α 的典范分解. 任取 $x < y \in [a, b]$, 有

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| \leq [\beta_1(y) - \beta_1(x)] + [\gamma_1(y) - \gamma_1(x)],$$

根据这个不等式以及 β 的定义可得

$$|\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})| = \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} (\alpha) \leq [\beta_1(x_i) - \beta_1(x_{i-1})] + [\gamma_1(x_i) - \gamma_1(x_{i-1})],$$

再由定理 14.6.5 以及 $f \in R(\beta_1), f \in R(\gamma_1)$ 可知 $f \in R(\beta)$, 下略. \square

有了这些结果, 以上关于单调递增函数的 Riemann-Stieltjes 积分的性质就可以推广到有界变差函数, 我们不重复叙述.

定理 14.6.12 (分部积分). 设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则 $f \in R(g)$ 时必有 $g \in R(f)$, 且

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x).$$

证明. 由定理 14.6.10, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π_ε , 当 $\pi \geq \pi_\varepsilon$ 时

$$\left| S(f, g; \pi, \xi) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned} & f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)[g(x_i) - g(\xi_i)] + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[g(\xi_i) - g(x_{i-1})], \end{aligned}$$

上式是 f 关于 g 在分割 $\pi' = \pi \cup \{\xi_i\}$ 下的 Riemann-Stieltjes 和, 特别地, 有

$$\left| f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \varepsilon,$$

根据定理 14.6.10, $g \in R(f)$, 且

$$\int_a^b g(x) df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) dg(x),$$

这就是要证明的等式. □

推论 14.6.13. 设 f, g 为有界变差函数, 如果 $f \in R(g)$, 则

$$\bigvee_a^x(f) \in R(g).$$

证明. 当 $f \in R(g)$ 时, $g \in R(f)$, 因此

$$g \in R\left(\bigvee_a^x(f)\right),$$

根据分部积分公式,

$$\bigvee_a^x(f) \in R(g),$$

这就证明了推论. □

定理 14.6.14 (积分第二中值公式). 设 f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, g 为 $[a, b]$ 上的连续有界变差函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(a)[g(\xi) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(\xi)].$$

证明. 根据分部积分公式, 有

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x),$$

在根据积分第一中值公式, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(\xi)[f(b) - f(a)],$$

这也就是要证明的结论. □

定理 14.6.15 (变量替换). 设 ϕ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的连续单调递增函数, 如果 $g(x)$ 为 $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ 上的有界变差函数, $f \in R(g)$, 则 $f(\phi) \in R(g(\phi))$, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)dg(\phi) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dg(x).$$

证明. 不妨设 g 是单调递增函数. 由 $f \in R(g)$ 以及定理 14.6.5 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π_{ε} , 使得当 $\pi \geq \pi_{\varepsilon}$ 时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\eta_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon.$$

设 $\{x_i\}$ 为 π_{ε} 的分点, 作 $[\alpha, \beta]$ 的分割如下: 取 $t_0 = \alpha$. 当 $i \geq 1$ 时, 取 $t_i \in [\alpha, \beta]$ 使得 t_i 是满足条件 $\phi(t_i) = x_i$ 的最大数, 因为 ϕ 是连续的, 因此这是可以取到的, 且

$$\pi'_{\varepsilon}: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

是 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割. 当 $\pi' \geq \pi'_{\varepsilon}$ 时, π' 的分点在 ϕ 下的像组成了 $[a, b]$ 的分割 (可能有重复的点), 且这个分割是 π_{ε} 的加细, 因此, 如果记

$$\pi': \alpha = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_n = \beta,$$

则

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\phi(\xi'_i))[g(\phi(t'_i)) - g(\phi(t'_{i-1}))] - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon,$$

根据定理 14.6.5, 这说明 $f(\phi) \in R(g(\phi))$, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)dg(\phi) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

这就证明了定理. □

注. 如果 ϕ 为连续单调递减函数, 则有完全类似的结果成立.

下面讨论 Riemann 积分和 Riemann-Stieltjes 积分之间的一些联系.

定理 14.6.16. 设 $g(x)$ 为 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数, C 为常数. 记

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt + C, \quad x \in [a, b].$$

如果 f 为 $[a, b]$ 上有界函数, 则 $f \in R(G)$ 当且仅当 fg 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 且此时

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

证明. 设 fg 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则任给 ε , 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{M+1},$$

其中 $|f| \leq M$. 此时有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(x_i) - G(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(\xi_i))dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| + M \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

根据定理 14.6.10 知 $f \in R(G)$, 且

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

定理的另一半证明留作练习. □

例 14.6.1. 有界变差函数的 Fourier 系数估计.

设 f 为 $[-\pi, \pi]$ 上的有界变差函数, 其 Fourier 系数为 a_n, b_n . 则由此定理以及分部积分公式, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \frac{\sin nx}{n} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} df(x), \end{aligned}$$

由此得到如下估计

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \bigvee_{-\pi}^{\pi}(f), \quad \forall n \geq 1.$$

同理可得

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} |f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)| + \frac{1}{n\pi} \bigvee_{-\pi}^{\pi}(f), \quad \forall n \geq 1.$$

这些估计要比第十章第五节中的更精确. \square

一般地, 如果 f, g 均在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则上述定理结论成立. 结合分部积分公式中, 就得到关于 Riemann 积分的如下分部积分公式:

推论 14.6.17 (分部积分之二). 设 f, g 为 Riemann 可积函数, 记

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt + D, \quad x \in [a, b].$$

则

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

我们也可以将 Riemann-Stieltjes 积分的第二中值公式改写为关于 Riemann 积分的第二中值公式, 请读者自行完成. 结合前面的变量替换则可以得到如下的 Riemann 积分的变量替换公式: 设 ϕ 为可微单调函数, 且 ϕ' 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则当 f 在 $\phi([\alpha, \beta])$ 上 Riemann 可积时, $f(\phi)\phi'$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上 Riemann 可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx.$$

我们还可以得到一个更一般的结果.

定理 14.6.18 (变量替换之二). 设 $g(t)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 记

$$G(t) = \int_{\alpha}^t g(s)ds + C, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

如果 $f(x)$ 为 $G([\alpha, \beta])$ 上的 Riemann 可积函数, 则 $f(G) \in R(G)$, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(G)dG = \int_{\alpha}^{\beta} f(G)g(t)dt = \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x)dx.$$

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 由 g 为 Riemann 可积函数知, 存在 $[\alpha, \beta]$ 的分割

$$\pi: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

使得

$$\sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} \Delta t_i < \varepsilon.$$

我们把 $\omega_i(g) < \varepsilon$ 的小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 分成两类:

(1) $|g(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$. 这一类区间记为 I 型的, 此时有

$$\sum_I |G(t_i) - G(t_{i-1})| \leq \sum_I \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(t)| dt \leq \varepsilon(\beta - \alpha).$$

(2) 存在 $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$ 使得 $|g(\xi)| > \varepsilon$. 这一类区间记为 II 型的. 此时, 由于 $\omega_i(g) < \varepsilon$, 故 $g(t)$ 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上要么恒正, 要么恒负. 这说明 $G(t)$ 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上是严格单调的. 根据前面变量代换公式的证明, 通过进一步地细分第二型的小区间, 可使

$$\sum_{II} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| < \varepsilon$$

成立.

设 $|f|, |g| \leq M$. 结合上面这些估计, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\ &= \sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| + \sum_I \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\ & \quad + \sum_{II} \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{\omega_i(g) \geq \varepsilon} 2M^2 \Delta t_i + \sum_I 2M |G(t_i) - G(t_{i-1})| + \varepsilon \\ &\leq 2M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon(\beta - \alpha) + \varepsilon. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(G(\eta_i)) [G(t_i) - G(t_{i-1})] - \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(G(\eta_i)) [G(t_i) - G(t_{i-1})] - \sum_{i=1}^n \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} f(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} [f(G(\eta_i)) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f(G)) |G(t_i) - G(t_{i-1})| \\ &\leq 2M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon(\beta - \alpha) + \varepsilon. \end{aligned}$$

对于分割 π 的加细, 上式仍然成立. 因此, 根据定理 14.6.10 知 $f(G) \in R(G)$, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(G) dG = \int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x) dx,$$

定理证毕. □

注. Riemann-Stieltjes 积分是荷兰数学家 Stieltjes 在研究连分数时引入的, 它在概率论和金融数学等领域应用十分广泛.

第十五章 微分形式的积分



初次阅读本书时, 本章内容可以略过,
也可以将部分内容作为选读材料.

本章主要的任务是将前一章中的 Green 公式, Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式统一在一起. 为了做到这一点, 我们要引入新的研究对象, 它们是函数以及向量值函数的推广, 称为微分形式.

§15.1 欧氏空间中的微分形式

在第十二章中, 我们引入了函数的梯度场和全微分的概念. 在某种意义上, 这是一对对偶的概念. 事实上, 在某一点处, 函数的梯度是 \mathbb{R}^n 中的一个向量, 而函数的微分是 \mathbb{R}^n 的对偶空间 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的一个向量. 在 \mathbb{R}^n 和 $(\mathbb{R}^n)^*$ 之间存在着自然的线性同构

$$\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad v \mapsto v^\flat, \quad v^\flat(u) = v \cdot u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

此同构的逆为

$$(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi \mapsto \phi^\sharp, \quad \phi^\sharp \cdot u = \phi(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 \mathbb{R}^n 的标准基, $(\mathbb{R}^n)^*$ 的对偶基记为 $\{e^j\}_{j=1}^n$, 则有

$$(e_i)^\flat = e^i, \quad (e^i)^\sharp = e_i.$$

设 f 为可微函数, 由 $df(u) = \nabla f \cdot u$ 可得

$$(\nabla f)^\flat = df, \quad (df)^\sharp = \nabla f.$$

特别地, 当 $f(x) = x_i$ 时上式回到前式.

一般地, 设 X 为向量场, 则 X^\flat 为 1-形式, 其中 $X^\flat(x) = (X(x))^\flat, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 反之, 设 ω 为 1-形式, 则 ω^\sharp 为向量场.

设 X 为向量场. 如果 X 等于某个函数 f 的梯度场, 则称 X 为保守场, f 为一个势函数. 根据以上讨论, X 为保守场当且仅当 X^\flat 等于某个函数的全微分.

设 ω 为 1-形式. 我们称 ω 是 C^k ($k \geq 0$) 的, 如果 ω^\sharp 为 C^k 向量场 (即它的每一个分量均为 C^k 函数). 设 $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为分段 C^1 的连续曲线, ω 为连续 1-形式, ω 沿 σ 的积分定义为

$$\int_\sigma \omega = \int_\alpha^\beta \omega^\flat(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

这是我们在前一章中讨论过的第二型曲线积分.

在物理中, 第二型曲线积分可以描述为场沿着某一条路径所做的功. 相应地, 我们有

命题 15.1.1. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域, X 为 D 中的连续向量场. 则 X 为保守场当且仅当它沿路径所做的功与路径的选取无关, 而只依赖于路径的端点.

证明. 设 X 为保守场, f 为其势函数. 给定 D 中曲线 (路径) $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 X 沿 σ 所做的功为

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} [f(\sigma)]' dt = f(\sigma(\beta)) - f(\sigma(\alpha)),$$

这说明所做的功只与路径的端点有关.

反之, 设 X 沿路径所做的功只依赖于路径的端点. 在区域 D 中固定一点 x^0 , 当 $x \in D$ 时, 选取连接 x^0 和 x 的曲线 σ , 定义

$$f(x) = \int_{\sigma} X^b.$$

不难验证, f 为 D 中可微函数, 且 $X = \nabla f$. □

推论 15.1.2. 设 ω 为区域 D 中的连续 1-形式. 则 ω 为某个函数的全微分当且仅当它沿 D 中的任何闭曲线积分为零.

证明. 留作练习. □

以上我们对 1-形式和第二型曲线积分做了简单回顾. 接下来再看所谓的 2-形式. 在前章定义第二型曲面积分时, 我们引进了有向面积元的概念, 这是 2-形式概念的雏形. 为了给出 2-形式概念的准确定义, 我们先做一点线性代数的预备. 为此, 设 $\phi, \psi \in (\mathbb{R}^n)^*$, 定义 \mathbb{R}^n 中的二次型 $\phi \otimes \psi$ 如下:

$$\phi \otimes \psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \otimes \psi(u, v) = \phi(u)\psi(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

我们规定

$$\phi \wedge \psi = \phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi,$$

这是一个反对称的二次型. \mathbb{R}^n 中反对称二次型的全体记为 $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$, 这是一个向量空间, 其维数等于 $n(n-1)/2$.

命题 15.1.3. 向量空间 $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ 的一组基为 $\{dx_i \wedge dx_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

证明. 用对偶基的记号, $dx_i = e^i$. 我们先说明 $\{e^i \wedge e^j \mid (i < j)\}$ 张成 $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$. 事实上, 设 B 为反对称二次型, 记 $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. 当 $u = (u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i e_i$,

$v = (v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ 时, 有

$$B(u, v) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_i v_j = \sum_{i<j} b_{ij} (u_i v_j - u_j v_i).$$

另一方面,

$$e^i \wedge e^j(u, v) = e^i(u) e^j(v) - e^j(u) e^i(v) = u_i v_j - u_j v_i,$$

这说明 $B = \sum_{i<j} b_{ij} e^i \wedge e^j$.

我们再说明 $\{e^i \wedge e^j\} (i < j)$ 线性无关. 事实上, 设 $\sum_{i<j} c_{ij} e^i \wedge e^j = 0$, 其中 $c_{ij} \in \mathbb{R}$, 则当 $k < l$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i<j} c_{ij} e^i \wedge e^j(e_k, e_l) = \sum_{i<j} c_{ij} [e^i(e_k) e^j(e_l) - e^j(e_k) e^i(e_l)] \\ &= \sum_{i<j} c_{ij} [\delta_k^i \delta_l^j - \delta_k^j \delta_l^i] = c_{kl}, \end{aligned}$$

其中 $i = j$ 时 $\delta_j^i = 1$, $i \neq j$ 时 $\delta_j^i = 0$. □

有了以上预备, 我们可以给出 2-形式的定义: 取值在 $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ 中的场称为 2-形式或 2 次微分形式. 设 ω 为 2-形式, 根据刚才的讨论, 它可以写为

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

其中 ω_{ij} 为函数. 当它们均为 C^k 函数时, 称 ω 为 C^k 的 2-形式.

一般地, 我们可以在 \mathbb{R}^n 中定义所谓的高次微分形式, 它们的雏形为有向体积元. 我们仍然从线性代数开始. 首先引入 \mathbb{R}^n 中多线性型的概念. 设 $1 \leq q \leq n$, \mathbb{R}^n 中的一个 q 次多线性型是指定义在 $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (q 个相乘) 中的函数, 要求它关于每一分量都是线性的. 例如, 设 $\{\phi^i\}_{i=1}^q$ 均属于 $(\mathbb{R}^n)^*$, 定义 q 次多线性型 $\phi^1 \otimes \dots \otimes \phi^q$ 如下:

$$\phi^1 \otimes \dots \otimes \phi^q(u^1, \dots, u^q) = \phi^1(u^1) \dots \phi^q(u^q), \quad \forall u^1, \dots, u^q \in \mathbb{R}^n.$$

进一步, 规定

$$\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q = \sum_{\pi \in S_q} (-1)^\pi \phi^{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \phi^{\pi(q)}, \quad (15.1)$$

其中 S_q 表示集合 $\{1, \dots, q\}$ 的置换群, 当 π 为偶置换时 $(-1)^\pi = 1$, 奇置换时 $(-1)^\pi = -1$. 显然, $\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q$ 也是 q 次多线性型, 它关于任意两个不同的分量都是反对称的, 即

$$\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q(\dots, u^j, \dots, u^i, \dots) = -\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q(\dots, u^i, \dots, u^j, \dots).$$

事实上, 根据 (15.1) 式, 当 $u^1, \dots, u^q \in \mathbb{R}^n$ 时, 有

$$\begin{aligned} \phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q(u^1, \dots, u^q) &= \sum_{\pi \in S_q} (-1)^\pi \phi^{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \phi^{\pi(q)}(u^1, \dots, u^q) \\ &= \sum_{\pi \in S_q} (-1)^\pi \phi^{\pi(1)}(u^1) \dots \phi^{\pi(q)}(u^q) \\ &= \det \left(\phi^i(u^j) \right)_{q \times q}. \end{aligned}$$

由此还可以得出

$$\phi^{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \phi^{\pi(q)} = (-1)^\pi \phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q. \quad (15.2)$$

我们把 \mathbb{R}^n 中关于任意两个不同分量都反对称的 q 次多线性型的全体记为 $\wedge^q(\mathbb{R}^n)^*$. 类似于前面的讨论可知, 这是一个维数等于 C_n^q 的向量空间, 它的一组基为

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n.$$

取值在 $\wedge^q(\mathbb{R}^n)^*$ 中的场称为 q -形式或 q 次微分形式. 设 ω 为 q -形式, 则它可以表示为

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}, \quad (15.3)$$

其中 $\omega_{i_1 \dots i_q}$ 为函数. 当它们均为 C^k 函数时, 称 ω 为 C^k 的 q -形式.

设 ω, η 为 q -形式, 它们的和 $\omega + \eta$ 也是 q -形式, 其中 $\omega + \eta$ 在 x 处的值为 $\omega(x) + \eta(x)$. 类似地, 设 f, g 为函数, 则 $f\omega + g\eta$ 为 q -形式, 它在 x 处的值为 $f(x)\omega(x) + g(x)\eta(x)$.

设 ω, η 分别为 p -形式和 q -形式, 它们可以表示为

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad \eta = \sum_{j_1 < \dots < j_q} \eta_{j_1 \dots j_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

令

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j_1 < \dots < j_q} \omega_{i_1 \dots i_p} \eta_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q},$$

则 $\omega \wedge \eta$ 为 $(p+q)$ -形式. 下列性质可以直接验证:

- 设 ω_1, ω_2 为 p -形式, η 为 q -形式, f_1, f_2 为函数, 则

$$(f_1\omega_1 + f_2\omega_2) \wedge \eta = f_1(\omega_1 \wedge \eta) + f_2(\omega_2 \wedge \eta).$$

- 设 ω, η 分别为 p -形式和 q -形式, 则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{p+q} \eta \wedge \omega.$$

- 设 ω, η, ζ 分别为 p -形式, q -形式和 r -形式, 则

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta),$$

因此, 上式中的括号通常可以省略.

例 15.1.1. 有向体积元和坐标变换.

在 \mathbb{R}^n 中, 记 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. dx 为 n -形式, 称为 \mathbb{R}^n 的体积形式或 (有向) 体积元. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可微映射, 它的第 i 个分量记为 φ_i . 我们有

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} dx_j \right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n}. \end{aligned}$$

由 (15.2) 式可知, 只有 j_1, \dots, j_n 互不相同且 $dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n}$ 才不等于零, 因此

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n &= \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

上式和重积分的变量替换公式很像, 区别在于这里的 Jacobi 行列式没有绝对值.

变量替换对微分形式所起的作用可以用所谓的拉回映射来描述. 我们还从线性代数开始. 设 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性映射, 它诱导了对偶空间之间的线性映射 $L^*: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$: 当 $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ 时令 $L^*\phi = \phi \circ L$. 一般地, 设 α 为多线性型, 则 $L^*\alpha$ 为如下定义的多线性型:

$$L^*\alpha(u^1, \dots, u^q) = \alpha(L(u^1), \dots, L(u^q)), \quad \forall u^1, \dots, u^q \in \mathbb{R}^n.$$

L^* 称为由 L 所诱导的拉回映射. 当 $\phi^1, \dots, \phi^q \in (\mathbb{R}^n)^*$ 时, 显然有

$$L^*(\phi^1 \otimes \cdots \otimes \phi^q) = L^*\phi^1 \otimes \cdots \otimes L^*\phi^q.$$

由 (15.1) 式可得

$$L^*(\phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^q) = L^*\phi^1 \wedge \cdots \wedge L^*\phi^q.$$

设 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可微映射, 它在 $x \in D$ 处的微分记为 $\varphi_{*x} = d\varphi(x)$. 如果 ω 为 q -形式, 则 $\varphi^*\omega$ 也为 q -形式, 它在 x 处的值定义为 $\varphi_{*x}\omega(\varphi(x))$. φ^* 称为由 φ 所诱导的拉回映射, 具有下列性质:

- 设 ω, η 均为 q -形式, 则 $\varphi^*(\omega + \eta) = \varphi^*\omega + \varphi^*\eta$.
- 设 ω 为 q -形式, f 为函数, 则 $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*\omega$.
- 设 f 为可微函数, 则 $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$. 事实上, 在 x 处, 成立

$$\varphi^*(df)(x) = df(\varphi(x)) \circ \varphi_{*x} = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x) = d(f \circ \varphi)(x),$$

其中我们用到了全微分的形式不变性 (链式法则). 特别地, $\varphi^*(dx_i) = d\varphi_i$, 其中 $\varphi_i = x_i \circ \varphi$ 是 φ 的第 i 个分量.

- 设 ω 为 q -形式, 由 (15.3) 式所表示, 则

$$\varphi^*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \circ \varphi d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_q}.$$

- 设 ω, η 分别为 p -形式和 q -形式, 则 $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$.
- 设 $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 均为可微映射, ω 为 q -形式, 则 $(\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega)$.

利用拉回映射, 前例中的结果可以简单地写为 $\varphi^*(dx) = (\det J\varphi) dx$. 特别地, 如果 φ, ψ 分别为线性映射, 其矩阵表示分别为 A, B , 则

$$\varphi^*(dx) = (\det A) dx, \quad \psi^*(dx) = (\det B) dx.$$

复合映射 $\psi \circ \varphi$ 的矩阵表示为 BA , 因此有

$$\det(BA) dx = (\psi \circ \varphi)^*(dx) = \varphi^*(\psi^*(dx)) = (\det B)\varphi^*(dx) = (\det B)(\det A) dx,$$

这就得到了线性代数中熟知的等式 $\det(BA) = (\det B)(\det A)$.

例 15.1.2. 辛形式和辛变换.

考虑 \mathbb{R}^{2n} 中的 2-形式 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$, 它称为 \mathbb{R}^{2n} 上的标准辛形式. 辛形式是一个反对称的二次型, 它也可以表示为

$$\omega(u, v) = u \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} v^\top, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

如果线性变换 $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 保持 ω 不变, 即 $\varphi^*\omega = \omega$, 则称 φ 为一个辛变换. 如果 φ 的矩阵表示为 A , 则 A 满足等式

$$A \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A^\top = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

在上式两边取行列式, 可得 $(\det A)^2 = 1$. 下面我们说明实际上只能有 $\det A = 1$.

事实上, 记 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 为 \mathbb{R}^n 的体积形式, 则

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! dx. \quad (15.4)$$

另一方面, 由 $\varphi^* \omega = \omega$ 知

$$\varphi^*(\omega^n) = (\varphi^* \omega)^n = \omega^n,$$

这表明 $\varphi^* dx = dx$. 再由 $\varphi^* dx = (\det A) dx$ 即得 $\det A = 1$.

拉回映射可以进一步推广. 设 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为线性映射, 它诱导了对偶空间之间的线性映射 $L^*: (\mathbb{R}^m)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$: 当 $\phi \in (\mathbb{R}^m)^*$ 时令 $L^* \phi = \phi \circ L$. 同理, 还可以将 L^* 扩充到多线性型上. 如果 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为可微映射, 则完全类似与前面的讨论, 可以定义拉回映射 φ^* , 它将 \mathbb{R}^m 中的 q -形式拉回为 D 中的 q -形式. 拉回映射同样具有前面所罗列的性质, 我们不再赘述, 只考虑如下例子.

例 15.1.3. Binet-Cauchy 公式.

设 $n < m$, φ 如上. 再设 $D' \supset \varphi(D)$ 为 \mathbb{R}^m 中的开集, $\psi: D' \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可微映射. 记 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 为 \mathbb{R}^n 的体积形式, 则

$$\psi^*(dx) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m} \frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n}, \quad (15.5)$$

其中 ψ_i 表示 ψ 的第 i 个分量. 进一步, 有

$$\varphi^*(\psi^*(dx)) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m} \frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})} (\varphi) \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \cdots, \varphi_{j_n})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} dx,$$

其中 φ_j 表示 φ 的第 j 个分量. 又因为

$$\varphi^*(\psi^*(dx)) = (\psi \circ \varphi)^*(dx) = \det J(\psi \circ \varphi) dx,$$

最后我们就得到如下等式

$$\det J(\psi \circ \varphi) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m} \frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})} (\varphi) \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \cdots, \varphi_{j_n})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}. \quad (15.6)$$

特别地, 当 φ, ψ 均为线性映射时, 设其矩阵表示分别为 A, B , 则上式成为

$$\det(BA) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m} B \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad (15.7)$$

这是线性代数中的 Binet-Cauchy 公式.

习题 15.1

1. 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中定义向量场 $X(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. X 是否为保守场?

2. 设 $\phi^1, \dots, \phi^q \in (\mathbb{R}^n)^*$, 在对偶基 $\{e^j\}$ 下 $\phi^i = \sum_{j=1}^n a_j^i e^j$. 证明

$$\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^q = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq n} a_{j_1}^1 \dots a_{j_q}^q e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_q}.$$

3. 化简下列表达式

$$(1) (x dx + y dy) \wedge (z dz - z dx).$$

$$(2) (dx + dy + dz) \wedge (x dx \wedge dy - y dy \wedge dz).$$

4. 设 (x,y) 为 \mathbb{R}^2 中的直角坐标, (r,θ) 为极坐标, 证明 $dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$.

5. 设 (x,y,z) 为 \mathbb{R}^3 中的直角坐标, (r,θ,φ) 为极坐标, 其中

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

通过直接计算证明 $dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$.

6. 验证 (15.4) 式成立.

7. 验证 (15.5) 式成立.

8. 在 Binet-Cauchy 公式中取 $B = A^T$, 你能得到什么结论?

§15.2 微分形式之间的运算

为了方便起见, 我们将函数称为 0-形式. 我们知道, 给定可微函数 f , 它的全微分 df 为 1-形式. 从 f 得到 df 是一个求导的过程. 现在, 给定 \mathbb{R}^n 中 q -形式 ω , 我们要定义一个 $(q+1)$ -形式, 它由 ω 求导得到, 记为 $d\omega$.

设 ω 为 C^k ($k \geq 1$) 的 q -形式, 它可以表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \omega_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q},$$

我们定义

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}.$$

显然, $d\omega$ 为 $(q+1)$ -形式, 称为 ω 的外微分. 注意, 当 $q = n$ 时, 可规定 $d\omega = 0$.

例 15.2.1. \mathbb{R}^2 中 1-形式的外微分.

设 $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 为 \mathbb{R}^2 中的 1-形式, 则

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy \\ &= (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

例 15.2.2. \mathbb{R}^3 中 1-形式的外微分.

设 $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ 为 1-形式, 则

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy \\ &\quad + (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dz \\ &= (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

例 15.2.3. \mathbb{R}^3 中 2-形式的外微分.

设 \mathbb{R}^3 中 2-形式为

$$\omega = P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy,$$

则

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= P_x dx \wedge dy \wedge dz + Q_y dy \wedge dz \wedge dx + R_z dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

d 称为外微分算子, 它具有以下性质:

- 设 ω, η 为 q -形式, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda d\omega + \mu d\eta$.
- 设 f 为函数, ω 为 q -形式, 则 $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.
- 设 ω, η 分别为 p -形式和 q -形式, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

- $d^2 = 0$, 即 $d(d\omega) = 0$. 先考虑 0-形式. 设 f 为 C^k ($k \geq 2$) 函数, 则

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right] dx_i \wedge dx_j = 0, \end{aligned}$$

其中我们用到了求导次序的可交换性.

对于 q -形式, 以 $\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ 为例, 此时

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}.$$

根据 $d^2f = 0$ 和前一条性质可知 $d^2\omega = 0$.

- $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*d\omega$. 仍设 $\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$, 则

$$d(\varphi^*\omega) = d(f(\varphi)d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_q}) = d(f(\varphi)) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_q}.$$

根据拉回映射的性质, $d(f(\varphi)) = \varphi^*(df)$, 代入上式即得欲证等式.

如果 $d\omega = 0$, 则称 ω 为闭形式; 如果 $\omega = d\eta$, 则称 ω 为恰当形式. 由 $d^2 = 0$ 可知恰当形式必为闭形式, 反之不然.

例 15.2.4. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中的一个非恰当的闭形式.

考虑 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中的 1-形式

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx,$$

直接的计算表明 $d\omega = 0$, 即 ω 为闭形式. 如果用极坐标 (r, θ) 表示, 则由

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

可得 $\omega = d\theta$. 不过, 这个等式并不表明 ω 是恰当形式, 因为 θ 不能定义在整个 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中. 事实上, 不存在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中的函数 f , 使得 $\omega = df$. (反证法) 如果这样的 f 存在, 则 ω 沿单位圆周 (逆时针方向) 积分为零. 另一方面, 直接的计算表明此积分等于 2π .

命题 15.2.1 (Poincaré 引理). 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的凸域, 则 D 中的闭形式必为恰当形式.

证明. 不妨设原点属于 D . 考虑 1-形式 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$. 如果 $\omega = df$, 则根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(tx)] dt = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt \\ &= f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i dt. \end{aligned}$$

反之, 如果 ω 是闭形式, 用上式定义 $f(x)$, 则

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 f_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dt \right) x_i dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 f_j(tx) dt \right) dx_j + \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dt \right) x_i dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 f_j(tx) dt \right) dx_j + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{df_j}{dt}(tx) dt \right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{d(tf_j)}{dt}(tx) dt \right) dx_j = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j \\ &= \omega. \end{aligned}$$

其中, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ 是因为 $d\omega = 0$. 这就说明 D 中 1 次闭形式必为恰当形式. 这个方法也可以推广到 q -形式. \square

下面我们讨论微分形式之间另一个重要的运算: Hodge 星算子. 为此, 先引进一些记号. 设 $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$, 记 $I = \{i_1, \cdots, i_q\}$, $|I| = i_1 + \cdots + i_q$. 再记

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}, \quad dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

定义

$$*dx_I = \varepsilon_I dx_{\bar{I}}, \quad \text{其中 } \varepsilon_I = (-1)^{|I| + \frac{1}{2}q(q+1)}, \quad \bar{I} = \{1, \cdots, n\} \setminus I.$$

规定 $*1 = dx$, $*dx = 1$. 由上式可知, $dx_I \wedge *dx_I = dx$ 总成立.

设 $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ 为 q -形式, 定义 $*\omega = \sum_I \omega_I *dx_I$, 显然 $*\omega$ 为 $(n-q)$ -形式.

$*$ 称为 Hodge 星算子, 它具有以下性质:

- 设 ω 为 q -形式, 则 $**\omega = (-1)^{q(n-q)}\omega$. 事实上, 设 $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$, 则

$$**\omega = * \left(\sum_I \omega_I \varepsilon_I dx_{\bar{I}} \right) = \sum_I \omega_I \varepsilon_I \varepsilon_{\bar{I}} dx_I,$$

再由

$$\begin{aligned} \varepsilon_I \varepsilon_{\bar{I}} &= (-1)^{|I| + \frac{1}{2}q(q+1) + |\bar{I}| + \frac{1}{2}(n-1)(n-q+1)} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}q(q+1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-q+1)} \\ &= (-1)^{q(n-q)} \end{aligned}$$

即得欲证等式.

- 设 $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$, $\eta = \sum_I \eta_I dx_I$ 均为 q -形式, 则 $\omega \wedge *\eta = \omega \cdot \eta dx$, 其中 $\omega \cdot \eta = \sum_I \omega_I \eta_I$.

- 设 ω, η 均为 q -形式, 则 $(*\omega) \cdot (*\eta) = \omega \cdot \eta$.

利用外微分算子和 Hodge 星算子, 我们可以定义另一算子 δ , 它将微分形式的次数降低一次. 对于函数 f , 我们规定 $\delta f = 0$. 对于 q -形式 ω , 我们规定

$$\delta\omega = (-1)^{n(q-1)+1} * d * \omega,$$

易见 $\delta\omega$ 为 $(q-1)$ -形式.

利用以上这些算子我们可以重新解释向量场的散度和旋度. 设 X 为 \mathbb{R}^n 中的向量场, 它可以表示为

$$X(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i,$$

其散度定义为 $\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. 我们断言 $\operatorname{div}(X) = -\delta X^\flat$. 事实上,

$$\begin{aligned} \delta X^\flat &= - * d * \sum_{i=1}^n f_i dx_i = - * d \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= - * \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= - * \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = -\operatorname{div}(X). \end{aligned}$$

特别地, 当 $X = \nabla f$ 为梯度场时, $\delta df = -\operatorname{div}(\nabla f) = -\Delta f$, 其中 Δ 为 Laplace 算子.

同理, 当 $X = (P, Q, R)$ 为 \mathbb{R}^3 中的向量场时, 可验证 $\operatorname{rot} X = (*dX^\flat)^\sharp$.

例 15.2.5. Maxwell 方程.

在真空中, 电场和磁场分别记为 \mathbf{E} , \mathbf{B} , 它们满足以下 Maxwell 方程:

(i) 电场 Gauss 定律:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho. \quad (15.8)$$

(ii) 磁场 Gauss 定律:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (15.9)$$

(iii) Ampère-Maxwell 定律:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (15.10)$$

(iv) Faraday 定律:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (15.11)$$

其中, ρ 为电荷密度函数, \mathbf{J} 为电流场. ε_0, μ_0 分别为真空电场常数和磁场常数, 且 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, 其中 c 为真空中的光速. 这些 Maxwell 方程可以用微分形式来表示. 记 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$. 再令

$$F = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy,$$

直接的计算表明

$$\begin{aligned} dF = & \left[\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right] dy \wedge dz \wedge dt + \left[\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right] dz \wedge dx \wedge dt \\ & + \left[\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right] dx \wedge dy \wedge dt + \left[\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

这说明 (15.9) 式和 (15.11) 式等价于 $dF = 0$. 类似地, 令

$$M = \frac{1}{c}(E_1 dy \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy) - c(B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz) \wedge dt.$$

注意到在 F 中如果将 \mathbf{E} 换成 $-c\mathbf{B}$, 将 \mathbf{B} 换成 \mathbf{E}/c 就得到 M , 因此 (15.8) 式和 (15.10) 式等价于 $dM = -\mu_0 J$, 其中

$$J = c(J_1 dy \wedge dz + J_2 dz \wedge dx + J_3 dx \wedge dy) \wedge dt - c\rho dx \wedge dy \wedge dz.$$

习题 15.2

1. 计算下列微分形式的外微分:

$$(1) \omega = xy dx + dz, \quad (2) \omega = x^2 y dx - yze^x dy,$$

$$(3) \omega = xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + zx dx \wedge dy.$$

2. 设 ω 为 p -形式, η 为 q -形式, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

3. 设 ω 为 $(q-1)$ -形式, η 为 q -形式, 则

$$d(\omega \wedge * \eta) = d\omega \wedge * \eta - \omega \wedge * d\eta.$$

4. 当 $X = (P, Q, R)$ 为 \mathbb{R}^3 中的向量场时, 验证 $\text{rot} X = (*dX^\flat)^\sharp$.

5. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^2 函数, 且 $\Delta f = 0$. 证明:

$$(1) \omega = \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \text{ 为闭形式.}$$

(2) 存在函数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

6. 对于一般的闭形式验证 Poincaré 引理在凸域中成立.

7. 设 v_1, \dots, v_{n-1} 为 \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) 中的向量, 证明

$$[* (v_1^b \wedge \dots \wedge v_{n-1}^b)]^\sharp = (-1)^{n-1} v_1 \times \dots \times v_{n-1}.$$

8. 记 $\square = d\delta + \delta d$, 称为 Hodge-Laplace. 设 $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$, 证明 $\square\omega = -\sum_I \Delta\omega_I dx_I$.

§15.3 曲面回顾

在前面的章节中, 当我们提到曲线或者曲面的时候, 一般都要指定一个参数表示. 现在我们从更加几何化的角度重新描述曲线或曲面.

设 M 为 \mathbb{R}^n 中的子集. 如果任给 $x^0 \in M$, 均存在 \mathbb{R}^n 中含 x^0 的开集 V , \mathbb{R}^m 中的开集 U 以及 C^k ($k \geq 1$) 映射 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$(1) \varphi \text{ 为单射}, \quad (2) \text{rank} J\varphi = m, \quad (3) \varphi(U) = V \cap M,$$

则称 M 为 \mathbb{R}^n 中的 m 维的 C^k 正则子流形. $m = 1$ 的情形就是正则曲线, $m = 2$ 的情形就是 2 维正则曲面. 在不引起混淆的情况下, 我们也把 m 维正则子流形称为 m 维 (正则) 曲面, $m = n - 1$ 的情形称为超曲面. 映射 φ 称为 x^0 附近的一个局部参数表示, $V \cap M$ 称为 x^0 的一个局部坐标邻域, 它是 x^0 在 M 中的开邻域.

例 15.3.1. 函数的图像.

设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^k 函数, 其中 U 为 \mathbb{R}^{n-1} 中的开集, f 的图像为

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\},$$

它是 \mathbb{R}^n 中的 C^k 超曲面, 这是因为 $\text{graph}(f)$ 有整体的参数表示:

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (x, f(x)).$$

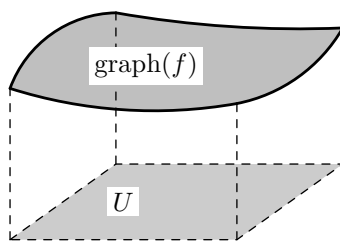


图 15.1 作为曲面的图像

这个例子可以推广. 例如, 设 U 为 \mathbb{R}^m 中的开集, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ 为 C^k 的向量值函数, 则

$$\text{graph}(F) = \{(x, F(x)) \mid x = (x_1, \dots, x_m) \in U\}$$

是 \mathbb{R}^n 中的 m 维曲面, 称为函数 F 的 (广义) 图像.

一般地, 一个 m 维正则曲面 M 在任意一点附近总可以看成是某个 m 维子向量空间上的局部图像. 例如, 设 $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ 为 x^0 附近的局部参数表示, $\varphi(u^0) = x^0$. 因为 $\text{rank} J\varphi = m$, 不妨设

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)}(u^0) \neq 0.$$

记 $v_i = \varphi_i(u)$, $i = 1, \dots, m$. 根据逆映射定理, 映射 $\phi(u) = (v_1, \dots, v_m)$ 在 x^0 附近可逆且逆映射 ϕ^{-1} 仍为 C^k 映射. 因此, $\varphi \circ \phi^{-1}$ 仍为 x^0 附近的局部参数表示, 且

$$\varphi \circ \phi^{-1}(v) = (v, \varphi_{m+1} \circ \phi^{-1}(v), \dots, \varphi_n \circ \phi^{-1}(v)), \quad v = (v_1, \dots, v_m) \in \phi(U).$$

这说明在 x^0 附近 M 可以表示为函数的图像.

利用曲面的局部图像表示不难看出, 对 x^0 附近的任意两个局部参数表示 φ 与 ψ , 它们之间的转换映射 $\psi^{-1} \circ \varphi$ 是 \mathbb{R}^m 中的开集之间的可逆 C^k 映射. 即不同的参数表示之间只相差曲面的重新参数化.

如果曲面 M 被若干局部坐标邻域 $\{V_\alpha\}$ 所覆盖, 且当 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 时, 转换映射 $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ 的 Jacobi 行列式恒为正, 则称曲面 M 可定向. 此时, $\{V_\alpha\}$ 称为 M 的定向坐标覆盖. 如果不存在这样的定向坐标覆盖, 则称 M 不可定向.

例 15.3.2. 单位圆周 S^1 的局部参数表示.

我们知道, 极坐标不能定义在整个圆周上. 但是, 我们可以用两个局部坐标邻域覆盖 S^1 : 令

$$\varphi: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi: (\pi, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

分别定义为

$$\varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \psi(\eta) = (\cos \eta, \sin \eta),$$

则 φ, ψ 为局部参数表示, 且

$$\varphi(0, 2\pi) = S^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \psi(\pi, 3\pi) = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}.$$

这说明 S^1 为 \mathbb{R}^2 中的正则曲线.

例 15.3.3. 单位球面 S^2 的局部参数表示.

我们知道, 球面极坐标不能定义在整个球面上. 不过, 我们可以把球面分成 6 部分:

$$\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \\ \{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\},$$

在每一部分上均有参数表示, 以 $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ 为例:

$$\varphi: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

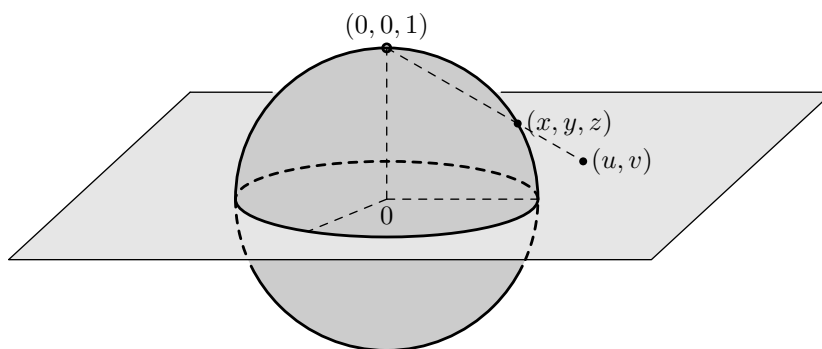


图 15.2 球面上的参数坐标

我们也可以只用两个局部坐标邻域覆盖整个 S^2 : 令

$$\varphi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_1(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

则 $\varphi_1(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, 从上式还可解得

$$u = \frac{x}{1 - z}, \quad v = \frac{y}{1 - z}, \quad (x, y, z) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}.$$

这说明 (u, v) 是连接 $(0, 0, 1)$ 和 (x, y, z) 的直线和平面 \mathbb{R}^2 的交点. 类似地, 令

$$\varphi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_2(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

则 $\varphi_2(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$, 从上式可解得

$$u = \frac{x}{1 + z}, \quad v = \frac{y}{1 + z}, \quad (x, y, z) \in S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}.$$

此时 (u, v) 是连接 $(0, 0, -1)$ 和 (x, y, z) 的直线和平面 \mathbb{R}^2 的交点. $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ 称为球面 S^2 的球极投影.

下面我们讨论曲面上的微分学. 微分学的基本思想是线性化. 对于曲面自身来说, 它在某一点处的线性化是指这一点处的切空间. 我们先回顾一下切空间的概念.

设 M 为 m 维正则曲面, $x^0 \in M$, φ 是 x^0 附近的局部参数表示, $\varphi(u^0) = x^0$. φ 在 u^0 处的微分记为 φ_{*u^0} , 其矩阵表示为 $J\varphi(u^0)$. 在 u^0 附近, 有

$$\varphi(u) - \varphi(u^0) = \varphi_{*u^0}(u - u^0) + o(\|u - u^0\|). \quad (15.12)$$

记 $T_{x^0}M = \varphi_{*u^0}(\mathbb{R}^m)$, 称为 M 在 x^0 处的切空间, 它实际上不依赖于参数表示. 设 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 为 \mathbb{R}^m 的标准基, 则 $\{\varphi_{*u^0}(e_i)\}_{i=1}^m$ 为 $T_{x^0}M$ 的一组基, 其中

$$\varphi_{*u^0}(e_i) = \varphi_{u_i}(u^0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}(u^0), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i}(u^0) \right).$$

有了曲面的线性化, 我们可以考虑曲面上函数的线性化, 函数线性化以后得到的是定义在切空间中的线性映射. 为此, 设 M 如上, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^l$ 为向量值函数. 如果复合函数 $f \circ \varphi$ 可微或是 C^s ($s \leq k$) 的, 则称 f 是可微或 C^s 的, 易见此概念不依赖于参数表示. 设 f 在 x^0 处可微 (即 $f \circ \varphi$ 在 u^0 处可微). 注意到 φ_{*u^0} 从 \mathbb{R}^m 到 $T_{x^0}M$ 为线性同构, 其逆记为 $\varphi_{*u^0}^{-1}$. 令

$$f_{*x^0} = (f \circ \varphi)_{*u^0} \circ \varphi_{*u^0}^{-1} : T_{x^0}M \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

称为 f 在 x^0 处的切映射或微分, 也记为 $df(x^0)$. 当 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ 时,

$$f_{*x^0} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{u_i}(u^0) \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (f \circ \varphi)_{*u^0}(e_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_i}(u^0). \quad (15.13)$$

由 (15.12) 式还可以得出, 当 $x \in M$ 在 x^0 附近时, 有

$$f(x) - f(x^0) = f_{*x^0}(x - x^0)^\tau + o(\|x - x^0\|), \quad (15.14)$$

其中 $(x - x^0)^\tau$ 是 $x - x^0$ 在 $T_{x^0}M$ 中的正交投影. 由此可以看出 f_{*x^0} 的确是 f 在 x^0 处的线性化, 并且 f_{*x^0} 的定义不依赖于 M 的参数表示.

我们可以从另外的角度看切空间和切映射. 先看切空间, 我们断言:

$$T_{x^0}M = \{\gamma'(0) \mid \gamma \subset M \text{ 为可微参数曲线, } \gamma(0) = x^0.\}$$

事实上, 给定 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{u_i}(u^0) \in T_{x^0}M$, 记 $\gamma(t) = \varphi(u^0 + t \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i)$, 则

$$\gamma'(0) = \varphi_{*u^0} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{u_i}(u^0).$$

另一方面, 如果曲线 γ 可微且 $\gamma \subset M$, 记 $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma$, 则 $\tilde{\gamma}$ 为 \mathbb{R}^m 中可微曲线, 且

$$\gamma'(0) = (\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0) = \varphi_{*u^0}(\tilde{\gamma}'(0)) \in T_{x^0}M.$$

这说明上述断言成立. 现在, f 在 x^0 处的切映射可以表示为

$$f_{*x^0}(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0). \quad (15.15)$$

上式的一个好处是它不涉及局部参数表示.

以上我们讨论了表面上的向量值函数. 进一步, 我们可以将场的概念和微分形式的概念推广到表面上. 先从切空间的对偶空间开始. 设 M 如上, x^0 处的切空间有一组基 $\{\varphi_{u_i}(u^0)\}_{i=1}^m$. 相应地, 对偶空间 $T_{x^0}^*M$ (称为余切空间) 中有一组对偶基, 记为 $\{du_i\}_{i=1}^m$, 它们满足如下关系

$$du_i \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_{u_j}(u^0) \right) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

如果函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x^0 处可微, 则它在 x^0 处的微分 $df(x^0)$ 就属于 $T_{x^0}^*M$, 这说明余切空间是一个很自然的概念.

设 $q \geq 1$, 与欧氏空间中的讨论完全类似, 我们可以定义 $T_{x^0}M$ 中的 q 次多线性型. 反对称的 q 次多线性型的全体记为 $\wedge^q T_{x^0}^*M$, 这是向量空间, 维数为 C_m^q ($q > m$ 时此空间为零). 当 $1 \leq q \leq m$ 时, $\wedge^q T_{x^0}^*M$ 的一组基为

$$du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m.$$

设 ω 为表面 M 上的场, 如果 ω 在每一点 $x \in M$ 处的值是 T_xM 中的反对称 q 次多线性型, 则称 ω 为 M 上的 q -形式或 q 次微分形式. 在 x^0 附近, q -形式可表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \omega_{i_1 \dots i_q} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_q},$$

其中 $\omega_{i_1 \dots i_q}$ 为 x^0 附近的函数, 如果这些函数都是 C^s 的, 则称 ω 是 C^s 的.

例 15.3.4. 全微分和梯度场.

设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为可微函数, 我们定义 M 上的 1-形式 df , 使得它在 x 处值为 f 在 x 处的微分 f_{*x} . 在 x^0 附近, df 可以表示为

$$df = \sum_{i=1}^m f_{*x}(\varphi_{u_i}) du_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}(u) du_i,$$

其中 $\varphi(u) = x$. df 称为 f 的全微分.

在 x 处, $f_{*x} \in T_x^*M$. 根据线性代数, 存在唯一的切向量 $\nabla f(x) \in T_xM$, 使得

$$f_{*x}(w) = \nabla f(x) \cdot w, \quad \forall w \in T_xM.$$

$\nabla f(x)$ 称为 f 在 x 处的梯度. 利用梯度, (15.15) 式可以改写为

$$(f \circ \gamma)' = \nabla f(\gamma) \cdot \gamma'.$$

∇f 称为 f 的梯度场.

与欧氏空间中类似, 全微分可以推广为外微分. 设 ω 为 q -形式, 其外微分定义为

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} d\omega_{i_1 \dots i_q} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_q},$$

可以验证此定义不依赖于参数表示.

例 15.3.5. 第一基本型和面积元.

设 M 为正则曲面. 任给 $x \in M$, 欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的标准内积可以限制在 $T_x M$ 中, 得到 $T_x M$ 中的内积. 我们知道, 内积为正定对称双线性型, 于是我们得到了 M 上的场, 它在 x 处的值就是 $T_x M$ 中的内积. 这个场称为 M 的第一基本型, 记为 g . 设 φ 为局部参数表示, 则 g 可以表示为

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} du_i \otimes du_j,$$

其中 $g_{ij} = g(\varphi_{u_i}, \varphi_{u_j}) = \varphi_{u_i} \cdot \varphi_{u_j}$. 记 $G = \det(g_{ij})_{m \times m} = \det[(J\varphi)^\top J\varphi]$, 在 M 上定义局部 m -形式为

$$d\sigma = \sqrt{G} du_1 \wedge \dots \wedge du_m,$$

称为 M 的局部面积形式 (面积元).

如果 ψ 为另一参数表示, 记 $\phi = \psi^{-1} \circ \phi$, $v = \phi(u)$. 由 $\varphi = \psi \circ \phi$ 可得 $J\varphi(u) = J\psi(v)J\phi(u)$, 从而有

$$(J\varphi)^\top J\varphi = (J\phi)^\top [(J\psi)^\top J\psi] J\phi,$$

这说明 $\sqrt{G} = \sqrt{\tilde{G}} |\det J\phi|$, 其中 $\tilde{G} = \det[(J\psi)^\top J\psi]$. 记 $d\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{G}} dv_1 \wedge \dots \wedge dv_m$, 则

$$d\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{G}} (\det J\phi) du_1 \wedge \dots \wedge du_m = \pm d\sigma,$$

其中当 $\det J\phi > 0$ 时取正号, 否则取负号.

命题 15.3.1. 设 M 为 \mathbb{R}^n 中的 m 维正则曲面, 则 M 可定向当且仅当 M 上存在处处非零的 m -形式.

证明. 设 M 可定向, 它有定向坐标覆盖. 根据刚才的讨论, 我们可以在 M 上定义一个处处非零的 m -形式 $d\sigma$, 称为 M 的面积形式.

反过来的证明留作练习. □

设 M 为 \mathbb{R}^n 中的正则超曲面, φ 为局部参数表示. 我们回顾一下法向量的构造. 令 $\vec{N} = \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}$, 则 \vec{N} 与切向量均正交, 称为局部法向量场. 记

$\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$, 则

$$N_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}, \quad i = 1, \dots, n.$$

如果 ψ 为另一参数表示, 记 $\phi = \psi^{-1} \circ \phi$, $v = \phi(u)$. 计算表明,

$$\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}} = (\det J\phi) \psi_{v_1} \times \dots \times \psi_{v_{n-1}}.$$

命题 15.3.2. \mathbb{R}^n 中的超曲面 M 可定向当且仅当 M 上存在处处非零的连续法向量场.

证明. 设 M 为可定向的超曲面, 它有定向坐标覆盖. 根据刚才的讨论, 我们可以在 M 上定义一个单位法向量场 $\vec{n} = \vec{N}/\|\vec{N}\|$, 它是处处非零的连续法向量场.

反之, 设 M 上存在处处非零的连续法向量场 \vec{n} . 我们在 M 上定义 $(n-1)$ -形式 $d\sigma$, 它在 x 处的值为 $(n-1)$ 次反对称多线性型, 定义为

$$d\sigma(w_1, \dots, w_{n-1}) = \vec{n}(x) \cdot (w_1 \times \dots \times w_{n-1}), \quad \forall w_1, \dots, w_{n-1} \in T_x M.$$

不难验证 $d\sigma$ 为 M 上处处非零的连续 $(n-1)$ -形式, 因此 M 可定向. \square

例 15.3.6. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^k ($k \geq 1$) 映射, $c \in \mathbb{R}$. 如果 $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, 且对任意 $p \in f^{-1}(c)$, $\nabla f(p) \neq 0$, 则 $M = f^{-1}(c)$ 为 \mathbb{R}^n 中的可定向超曲面.

证明. 设 $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in M$, 由于 $\nabla f(x^0) \neq 0$, 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$. 根据隐函数定理, 在 $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ 附近 $f(x) = c$ 的解可写为

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

其中 g 为 C^k 函数. 因此, 在 x^0 附近 $M = f^{-1}(c)$ 为函数图像, 从而是正则超曲面.

在 M 中任取曲线 $\sigma(t)$, 则由 $f(\sigma(t)) = c$ 知 $\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0$, 这表明 ∇f 限制在 M 上是其法向量场, 因为 ∇f 在 M 上处处非零, 根据命题 15.3.2 即知 M 为可定向的超曲面. \square

注. (1) 法向量场 ∇f 决定了 $f^{-1}(c)$ 上的面积形式 $d\sigma$, 它可以写为

$$d\sigma = \|\nabla f\|^{-1} * df = \|\nabla f\|^{-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

(2) 本例可作高维推广: 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^k ($k \geq 1$) 函数, $c \in \mathbb{R}^m$. 如果 $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, 且对任意 $p \in f^{-1}(c)$, $\text{rank } Jf(p) = m$, 则 $M = f^{-1}(c)$ 为 \mathbb{R}^n 中的可定向 $n-m$ 维曲面, 其面积形式为

$$d\sigma = (\det[Jf(Jf)^\top])^{-\frac{1}{2}} * (df_1 \wedge \dots \wedge df_m),$$

其中, f_i 表示 f 的第 i 个分量.

作为例子, 考虑函数 $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, 则当 $R > 0$ 时, $f^{-1}(R^2)$ 为 \mathbb{R}^n 中可定向的超曲面, 这是半径为 R 的 $n-1$ 维单位球面, 其面积形式为

$$d\sigma = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

下面我们讨论带有边界的正则曲面. 记 $\mathbb{H}^m = \{(u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m \geq 0\}$, 称为 m 维上半欧氏空间, 其边界 $\partial\mathbb{H}^m$ 为 $m-1$ 维欧氏空间 \mathbb{R}^{m-1} .

设 M 为 \mathbb{R}^n 中的子集. 如果任给 $x^0 \in M$, 均存在 \mathbb{R}^n 中含 x^0 的开集 V , \mathbb{H}^m 中的开集 U 以及 C^k ($k \geq 1$) 映射 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$(1) \varphi \text{ 为单射}, \quad (2) \text{rank} J\varphi = m, \quad (3) \varphi(U) = V \cap M,$$

则称 M 为 \mathbb{R}^n 中的一个 m 维的 C^k 带边正则子流形, 或称带边曲面. 为了区别起见, 我们把以前定义的曲面称为无边曲面.

利用逆映射定理可以证明, 如果 $x \in \varphi(U \cap \partial\mathbb{H}^m)$, 则在另一局部参数表示下, x 也是某个边界点的像. 这种点称为边界点, 边界点构成的子集称为带边曲面 M 的边界, 记为 ∂M . 如果 $V \cap M$ 是边界点 $x^0 \in \partial M$ 附近的局部坐标邻域, φ 为局部参数表示, 则 φ 限制在 $U \cap \partial\mathbb{H}^m$ 上就得到边界的一个局部参数表示, 这说明 ∂M 是 $m-1$ 维的 (无边) 正则曲面.

带边正则子流形的例子有: $m=1$ 时, 闭区间, 半开半闭区间, 平面上的射线都是带边曲线; $m=2$ 时, 平面上闭的圆盘, 环形区域, 三维欧氏空间中的上半单位球面等都是 2 维带边曲面; $m=3$ 时, 三维欧氏空间中的闭球, 实心轮胎等都是 3 维带边正则子流形. 当然, 上半欧氏空间 \mathbb{H}^m 是标准的 m 维带边曲面, 其边界为 $m-1$ 维欧氏空间.

带边曲面可以象无边曲面一样讨论定向. 需要注意的是, 并非所有的曲面都是可以定向的, Möbius 带就是一个有名的不可定向的 (带边) 曲面: 将一个长方形纸条的一对边扭转 180 度后粘合起来得到的曲面称为 Möbius 带, 其边界是一条连通的简单闭曲线 (本质上是圆周). Möbius 带不可定向的原因是其单位法向量沿原纸条的中心线移动一圈后方向正好变反了.

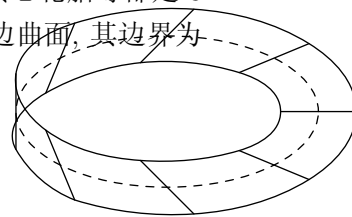


图 15.3 Möbius 带

命题 15.3.3. 设 M 为可定向的带边曲面, 则 ∂M 为可定向无边曲面.

证明. 我们将证明, 将 M 的定向坐标覆盖限制在边界上就得到 ∂M 的定向坐标覆盖. 为此, 设 φ 和 ψ 为 M 的两个局部参数表示, 它们同时属于定向坐标覆盖.

记 $\phi = \psi^{-1} \circ \varphi$, $v = \phi(u)$. 根据带边曲面的定义, $v_m \geq 0$. 注意到 ϕ 将 $\partial\mathbb{H}^m$ 中的点映到 ∂M 中, 这说明当 $u^0 \in \partial\mathbb{H}^m$, $\varphi(u^0) \in \partial M$ 时,

$$\frac{\partial v_m}{\partial u_m}(u^0) = \lim_{u_m \rightarrow 0^+} \frac{v_m(u) - 0}{u_m - 0} \geq 0, \quad \frac{\partial v_m}{\partial u_i}(u^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

于是有

$$\det J\phi(u^0) = \det J\bar{\phi}(u^0) \frac{\partial v_m}{\partial u_m}(u^0),$$

其中 $\bar{\phi} = \phi|_{\partial\mathbb{H}^m}$. 由 $\det J\phi(u^0) > 0$ 即知 $\det J\bar{\phi}(u^0) > 0$, 这说明将 M 的定向坐标覆盖限制在边界上就得到 ∂M 的定向坐标覆盖. \square

习题 15.3

1. 写出 \mathbb{R}^4 中 3 维球面 S^3 的局部参数表示, 说明它是正则曲面.
2. 用局部参数表示说明 S^1 是可定向的曲线, S^2 是可定向的曲面.
3. 试说明正则曲面的切空间与局部参数表示无关.
4. 验证 (15.14) 式成立.
5. 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 在曲面 M 上处处可微. 设 φ 为 M 的局部参数表示, 证明

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_j} \varphi_{u_i},$$

其中 $g_{ij} = \varphi_{u_i} \cdot \varphi_{u_j}$, g^{ij} 是 $(g_{ij})_{m \times m}$ 的逆矩阵在 (i, j) 位置的元素.

6. 验证全微分的定义不依赖于曲面的参数表示.
7. 证明 S^2 的面积形式为 $d\sigma = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$.
8. 证明 \mathbb{R}^n 中的单位闭球为可定向带边正则子流形. 研究其边界 S^{n-1} 的定向坐标覆盖.

§15.4 Stokes 公式

最后我们讨论曲面上的积分学. 首先介绍非常有用的单位分解的技巧. 所谓单位分解, 就是将 1 分解为若干光滑函数的和, 要求这些光滑函数具有紧支集. 其中, 函数 f 的支集 $\text{supp } f$ 定义为

$$\text{supp } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

在 §9.4 节中, 我们构造了 \mathbb{R} 中的一个光滑的鼓包函数 ϕ , 满足以下条件:

$$\phi(t) = 1, \quad t \in [-1/2, 1/2]; \quad 0 < \phi(t) < 1, \quad 1/2 < |t| < 1; \quad \phi(t) = 0, \quad |t| \geq 1.$$

引理 15.4.1 (单位分解). 设 K 为 \mathbb{R}^n 中的有界闭集, $\{V_\alpha\}$ 为 K 的有限开覆盖. 则存在 \mathbb{R}^n 中的光滑函数 $\{\phi_\alpha\}$, 使得

$$\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(x) = 1, \quad \forall x \in K; \quad \text{supp} \phi_{\alpha} \subset V_{\alpha}.$$

$\{\phi_{\alpha}\}$ 称为从属于开覆盖 $\{V_{\alpha}\}$ 的一个单位分解.

证明. 任取 $x \in K$, 存在 α , 使得 $x \in V_{\alpha}$. 取 $\varepsilon_x > 0$, 使得 $B_{2\varepsilon_x}(x) \subset V_{\alpha}$. 因为 K 为有界闭集, 存在 $r > 0$, 使得 $K \subset \overline{B_{r/2}(0)}$. 当 $x \in \overline{B_{r/2}(0)} \setminus K$ 时, 存在 $\varepsilon_x > 0$, 使得 $B_{2\varepsilon_x}(x) \subset B_r(0) \setminus K$. 根据有限覆盖定理, 存在有限个小球, 记为 $\{B_{\varepsilon_i/2}(x^i)\}_{i=1}^k$, 使得它们覆盖了 $\overline{B_{r/2}(0)}$, 其中 $\varepsilon_i = \varepsilon_{x^i}$. 令

$$\bar{\phi}(x) = \sum_{i=1}^k \phi(\varepsilon_i^{-1} \|x - x^i\|) + 1 - \phi(r^{-1} \|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 ϕ 为上面的鼓包函数. 则 $\bar{\phi}$ 为 \mathbb{R}^n 中的光滑函数, 且处处为正. 当 $x^i \in K$ 时, 记

$$\phi_i(x) = \phi(\varepsilon_i^{-1} \|x - x^i\|) / \bar{\phi}(x),$$

则

$$\sum_i \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in K; \quad \text{supp} \phi_i \subset \overline{B_{\varepsilon_i}(x^i)} \subset B_{2\varepsilon_i}(x^i).$$

将支集含于 V_{α} 的那些函数 ϕ_i 的和记为 ϕ_{α} (不重复求和), 则 $\{\phi_{\alpha}\}$ 为满足定理要求的单位分解. \square

设 M 为可定向带边 m 维曲面. 设 ω 为 M 上的微分形式, 其支集 $\text{supp} \omega$ 定义为

$$\text{supp} \omega = \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}.$$

当 ω 为 m -形式, 且其支集为有界闭集时, 我们要定义 ω 在 M 上的积分.

(1) 设 $\text{supp} \omega \subset \varphi(U)$, 其中 φ 为局部参数表示. 此时 ω 可以表示为

$$\omega = a(x) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中 $a(x)$ 是支集含于 $\varphi(U)$ 中的函数. 我们定义 ω 在 M 上的积分为

$$\int_M \omega = \int_U a(\varphi(u)) du_1 \cdots du_m.$$

设 $\text{supp} \omega \subset \psi(U')$, 其中 ψ 为另一局部参数表示. 记 $\phi = \psi^{-1} \circ \varphi$, $v = \phi(u)$, 则

$$\omega = b(x) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m, \quad \text{其中 } b(x) \det J\phi(u) = a(x).$$

这说明

$$\int_M \omega = \int_U b \circ \psi(\phi(u)) \det J\phi(u) du_1 \cdots du_m.$$

注意到 b 的支集含于 $\psi(U')$, 因此上式中的积分只需在 $U \cap \phi^{-1}(U')$ 中计算. 如果 $\det J\phi$ 恒为正, 则利用变量替换 $v = \phi(u)$ 可得

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U) \cap U'} b(\psi(v)) dv_1 \cdots dv_m = \int_{U'} b(\psi(v)) dv_1 \cdots dv_m,$$

最后的等号是因为 $b(x) = a(x)/\det J\phi(u)$ 在 $\phi(U)$ 之外为零.

以上说明了当 M 可定向且 ω 的支集含于某个局部坐标邻域中时, ω 在 M 上的积分的定义是恰当的. 利用多重积分的性质易见, 如果 $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$, 且 $\text{supp } \omega_i$ 均含于同一局部坐标邻域中, 则

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_M \omega_i.$$

(2) 设 ω 是具有紧支集的 m 次微分形式, 取覆盖 $\text{supp } \omega$ 的有限个局部坐标邻域 $\{V_\alpha \cap M\}$, 设 $\{\phi_\alpha\}$ 是从属于 $\{V_\alpha\}$ 的单位分解, 令

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega,$$

我们要说明这个定义是恰当的. 事实上, 如果 $\{V_\beta \cap M\}$ 是另一局部坐标覆盖, 从属于 $\{\psi_\beta\}$ 的单位分解为 $\{\psi_\beta\}$, 则由 $\psi_\beta \omega = \sum_\alpha \phi_\alpha \psi_\beta \omega$ 可得

$$\int_M \psi_\beta \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega.$$

同理, 有

$$\int_M \phi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega,$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_\beta \int_M \psi_\beta \omega &= \sum_\beta \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_M \phi_\alpha \psi_\beta \omega \\ &= \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega, \end{aligned}$$

这说明 ω 在 M 上的积分的确是定义良好的, 它是前一章中第二型曲线积分和曲面积分的推广.

下面的定理是微积分基本公式的一般情形, 称为 Stokes 公式或 Stokes 定理.

定理 15.4.2 (Stokes). 设 M 为定向带边 m 维曲面, ω 是 M 上具有紧支集的 $m-1$ 次微分形式, 则

$$\int_M d\omega = (-1)^m \int_{\partial M} \omega,$$

其中 ∂M 上的定向坐标覆盖是 M 上的定向坐标覆盖在边界上的限制.

证明. 利用单位分解, 不妨设 ω 的支集含于 M 的某个局部坐标邻域 $\varphi(U)$ 中, 其中 φ 为参数表示. 此时 ω 可以表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} a_i(x) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_m,$$

其中 $a_i(x)$ 是 $\varphi(U)$ 中具有紧支集的函数. 我们注意到, 在边界上 $u_m \equiv 0$, 因此有

$$\omega|_{\partial M} = (-1)^{m-1} a_m(x) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1},$$

其中 $x = \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}, 0)$.

在 M 上, 有

$$d\omega = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(a_i \circ \varphi)}{\partial u_i} du_1 \wedge \cdots \wedge du_m, \quad \int_M d\omega = \sum_{i=1}^m \int_U \frac{\partial(a_i \circ \varphi)}{\partial u_i} du_1 \cdots du_m.$$

因为 $a_i \circ \varphi$ 的支集为 U 中有界闭集, 我们可以取充分大的 r , 使得 $[-r, r]^{m-1} \times [0, r]$ 包含这些支集, 并将函数 $a_i \circ \varphi$ 零延拓到 $[-r, r]^{m-1} \times [0, r]$ 中. 当 $1 \leq i \leq m-1$ 时,

$$\int_{-r}^r \frac{\partial(a_i \circ \varphi)}{\partial u_i} du_i = a_i \circ \varphi \Big|_{u_i=-r}^{u_i=r} = 0.$$

由重积分化累次积分的理论可知

$$\int_U \frac{\partial(a_i \circ \varphi)}{\partial u_i} du_1 \cdots du_m = \int_{[-r, r]^{m-1} \times [0, r]} \frac{\partial(a_i \circ \varphi)}{\partial u_i} du_1 \cdots du_m = 0.$$

这说明

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{[-r, r]^{m-1}} du_1 \cdots du_{m-1} \int_0^r \frac{\partial(a_m \circ \varphi)}{\partial u_m} du_m \\ &= \int_{[-r, r]^{m-1}} (a_m \circ \varphi) \Big|_{u_m=0}^{u_m=r} du_1 \cdots du_{m-1} \\ &= - \int_{[-r, r]^{m-1}} a_m \circ \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) du_1 \cdots du_{m-1} \\ &= (-1)^m \int_{\partial M} \omega, \end{aligned}$$

从而定理得证. □

注. (1) 当 M 是闭曲面, 即边界 $\partial M = \emptyset$ 时, Stokes 公式右端为零.

(2) 通过改变边界上的定向坐标覆盖, 可以使 Stokes 公式右端不出现 $(-1)^m$.

下面的散度定理又称为 Gauss-Green 公式, 它是 Stokes 公式的特殊情形.

定理 15.4.3 (散度定理). 设 D 为 \mathbb{R}^m 中的区域, 其边界为 $m-1$ 维的超曲面. 如果 X 为 D 中具有紧支集的向量场, 则

$$\int_D \operatorname{div} X \, dx = \int_{\partial D} X \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

其中 \vec{n} 为 ∂D 的单位外法向量.

证明. \mathbb{R}^m 中的标准直角坐标决定了 D 中体积形式, 进而决定了 D 的定向坐标覆盖. 定义 D 中的 m 次微分形式 ω 为

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} X_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

其中 X_i 为 X 的第 i 个分量, 则 $d\omega = \operatorname{div} X \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. 由 Stokes 公式, 有

$$\int_D \operatorname{div} X \, dx = \int_D d\omega = (-1)^m \int_{\partial D} \omega.$$

设 $x^0 \in \partial D$, φ 为 x^0 附近的局部参数表示. 在 x^0 附近, ω 可表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^{m-1} X_i \, d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_{i+1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_m.$$

在边界上, $u_m \equiv 0$, 因此

$$\begin{aligned} \omega|_{\partial D} &= \sum_{i=1}^{m-1} X_i \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \cdots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \cdots, u_{m-1})} \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1} \\ &= X \cdot \vec{N} \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}, \end{aligned}$$

其中 $\vec{N} = \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}}$ 为边界的法向. 根据叉乘的性质,

$$\|\vec{N}\|^2 = \det(\varphi_{u_i} \cdot \varphi_{u_j})_{(m-1) \times (m-1)},$$

因此 ∂D 上的面积元为 $d\sigma = \|\vec{N}\| \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}$. 这说明

$$\int_D \operatorname{div} X \, dx = \int_{\partial D} X \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

其中 $\vec{n} = (-1)^m \vec{N} / \|\vec{N}\|$, 我们只要说明 \vec{n} 为 ∂D 的外法向即可.

事实上, 由于 φ 将上半欧氏空间映到 D 中, 在边界上向量 φ_{u_m} 一定朝内. 根据叉乘的性质,

$$(-\varphi_{u_m}) \cdot \vec{n} = (-1)^{m-1} \varphi_{u_m} \cdot \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}} = \det J\varphi > 0,$$

这说明 \vec{n} 的确朝外. □

例 15.4.1. $m-1$ 维球面的面积.

设 B^m 为 \mathbb{R}^m 中的单位球体, $S^{m-1} = \partial B^m$. 考虑向量场 $X(x) = (x_1, \dots, x_m)$, 则 $\operatorname{div}(X) = m$, 且 X 在 S^{m-1} 上恰为单位外法向. 由散度定理即得

$$\int_{B^m} m \, dx = \int_{S^{m-1}} d\sigma,$$

即 $\sigma(S^{m-1}) = mv(B^m)$, 其中 $\sigma(S^{m-1})$ 是 $m-1$ 维球面的面积, $v(B^m)$ 是 m 维球体的体积. 这样我们就又一次得到了球面的面积和球体的体积之间的关系.

例 15.4.2. 设 $\overline{B^n(0)}$ 为 \mathbb{R}^n 中的单位闭球, f_1, \dots, f_n 为 $\overline{B^n(0)}$ 中的 C^2 函数. 如果 $f_i|_{S^{n-1}} = x_i, i = 1, \dots, n$, 则 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 在 $\overline{B^n(0)}$ 内必有公共零点.

证明. (反证法) 设 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 无公共零点, 记 $F = (f_1, \dots, f_n)$, $\omega = F^* \omega_0$, 其中

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \|x\|^{-n} x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

直接的计算表明, ω_0 为 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中的闭形式, 这说明 ω 为 $\overline{B^n(0)}$ 中的闭形式. 根据 Stokes 公式可知 ω 在 S^{n-1} 上的积分为零. 另一方面, 根据题设可知 ω 限制在 S^{n-1} 上为面积形式, 从而其积分不等于零, 这就导出了矛盾. \square

作为应用, 我们可推出所谓的 Brouwer 不动点定理.

定理 15.4.4 (Brouwer). 设 φ 是从单位闭球 $\overline{B^n(0)}$ 到自身的连续映射, 则 φ 必有不动点. 即存在 $\xi \in \overline{B^n(0)}$, 使得 $\varphi(\xi) = \xi$.

证明. (反证法) 设 $\varphi(x) \neq x, \forall x \in \overline{B^n(0)}$. 用直线段连接 $\varphi(x)$ 和 x , 其延长线交球面于 $\psi(x)$. 容易看出 ψ 关于 x 连续, 且当 $x \in S^{n-1}$ 时 $\psi(x) = x$.

从 ψ 出发, 利用光滑化的技巧 (见本节习题), 可以构造光滑映射 $F: \overline{B^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 使得当 $x \in S^{n-1}$ 时 $F(x) = x$, 但这与前例的结论相矛盾. \square

习题 15.4

1. 设 f 为 \mathbb{R}^n 中具有紧支集连续函数. 证明: 任给 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 \mathbb{R}^n 中具有紧支集的光滑函数 g , 使得

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad \operatorname{supp} g \subset \{x \mid d(x, \operatorname{supp} f) < \eta\}.$$

2. 设 f, h 为 \mathbb{R}^n 中的连续函数, 且 h 处处为正. 证明: 存在 \mathbb{R}^n 中的光滑函数 g , 使得 $|g(x) - f(x)| < h(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
3. 设 M 为紧致曲面, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 证明, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 M 附近定义的光滑函数 g , 使得 $|g(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in M$.

4. 设 $\psi : \overline{B^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续且 $\psi|_{S^{n-1}} = 0$. 证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在光滑映射 $F : \overline{B^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$\|F(x) - \psi(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{B^n(0)}; \quad F|_{S^{n-1}} = 0.$$

5. 设 $\psi : \overline{B^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续且 $\psi|_{S^{n-1}}$ 光滑. 证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在光滑映射 $F : \overline{B^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$\|F(x) - \psi(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{B^n(0)}; \quad F|_{S^{n-1}} = \psi|_{S^{n-1}}.$$

6. 试说明本节 Stokes 公式是第十四章第五节中 Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式的统一推广.

7. 设 $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ 连续, 记

$$f_0(x) = F(x, 0), \quad f_1(x) = F(x, 1), \quad \forall x \in S^n.$$

假定 f_0, f_1 为 C^1 映射, 证明 $f_0^*d\sigma$ 和 $f_1^*d\sigma$ 在 S^n 上积分相等, 其中 $d\sigma$ 是 S^n 的面积元.

8. 证明: 存在正数 $\varepsilon > 0$, 使得当 C^1 映射 $f, g : S^n \rightarrow S^n$ 满足条件

$$\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in S^n$$

时, $f^*d\sigma$ 和 $g^*d\sigma$ 在 S^n 上积分相等, 其中 $d\sigma$ 是 S^n 的面积元.

第十六章 含参变量的积分

本章仍然讨论积分, 其中被积函数含有额外的参数, 我们要研究积分是如何依赖于参数的. 这种积分的基本性质和无穷级数的性质十分类似, 它们也提供了构造新函数的重要工具, 我们还将利用它们进一步研究 Fourier 积分.

§16.1 含参变量的积分

设 $f(x, y)$ 是定义在矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上的函数, 且对于每个固定的 $y \in [c, d]$, 关于 x 的函数 $f(x, y)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则定义

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

称为含参变量的积分, 其中 y 是参数, 它对应于数列或函数列中的变数 n .

当 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times [c, d]$ 中的连续函数时, 根据 §13.3 节中的讨论, 有

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (16.1)$$

引理 16.1.1. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 中连续, 则 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 连续.

证明. 有界闭集中的连续函数是一致连续的. 因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $y_1, y_2 \in [c, d]$ 且 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

此时

$$\begin{aligned} |I(y_1) - I(y_2)| &= \left| \int_a^b [f(x, y_1) - f(x, y_2)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx \leq (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 y 连续. □

定理 16.1.2. 设 $f(x, y)$ 和偏导数 $f_y(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 中连续, 则 $I(y)$ 关于 y 可导, 且

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

证明. 记

$$\psi(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

根据题设和刚才的引理, $\psi(y)$ 关于 y 连续. 当 $y_1, y_2 \in [c, d]$ 时, 利用积分次序的可交换性, 得

$$\begin{aligned}\int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy &= \int_{y_1}^{y_2} \int_a^b f_y(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f_y(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b [f_y(x, y_2) - f_y(x, y_1)] dx \\ &= I(y_2) - I(y_1).\end{aligned}$$

这说明 $I'(y) = \psi(y)$. □

例 16.1.1. (*) 设 f 为具有紧支集的光滑函数, g 连续. 定义函数 h 为

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

则 h 为光滑函数, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy.$$

证明. 设 f 在区间 $(-M, M)$ 以外为零. 任取 $a > 0$, 当 $x \in [-a, a]$ 时, $h(x)$ 可以表示为

$$h(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f(x-y)g(y)dy,$$

反复利用上述定理即知 $h(x)$ 在 $(-a, a)$ 中任意次可导, 且

$$h^{(n)}(x) = \int_{-M-a}^{M+a} f^{(n)}(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y)dy,$$

由于 $a > 0$ 是任取的, 故 h 在 $(-\infty, \infty)$ 中光滑. □

注. f 可以取为鼓包函数, 此时 h 可以看成函数 g 的光滑逼近.

例 16.1.2. 设 $0 < a \leq b$, 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

解. 我们把 a 看成是常数, 而把 b 看成是参数, 积分记为 $I(b)$, 则根据上述定理, 有

$$I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1},$$

这说明

$$I(b) = \ln(1+b) + C.$$

又因为 $I(a) = 0$, 故 $C = -\ln(1+a)$, 从而

$$I = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

这个积分也可以通过重积分化累次积分来计算. □

例 16.1.3. 设 $|\lambda| < 1$, 计算积分

$$I = \int_0^{\pi} \ln(1 + \lambda \cos x) dx.$$

解. 设 $0 < a < 1$, 当 $\lambda \in [-a, a]$ 时, $f(x, \lambda) = \ln(1 + \lambda \cos x)$ 以及

$$f_{\lambda}(x, \lambda) = \frac{\cos x}{1 + \lambda \cos x}$$

在 $[0, \pi] \times [-a, a]$ 中连续, 于是 $I = I(\lambda)$ 关于 λ 可导, 且

$$I'(\lambda) = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + \lambda \cos x} dx = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

对 λ 积分可得

$$I(\lambda) = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \lambda^2}) + C,$$

因为 $I(0) = 0$, 故得

$$C = -\pi \ln 2,$$

因此

$$I = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}.$$

上式对任意 $|\lambda| < 1$ 均成立. □

下面我们讨论积分的上下限中也含有参数的含参变量积分. 考虑积分

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

其中 $a(y), b(y)$ 是关于 y 的函数.

定理 16.1.3. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 中连续, 函数 $a(y), b(y)$ 关于 y 连续, 且

$$a \leq a(y) \leq b, \quad a \leq b(y) \leq b, \quad \forall y \in [c, d],$$

则 $F(y)$ 是 $[c, d]$ 中的连续函数.

证明. 任取 $y_0 \in [c, d]$, 则当 $y \in [c, d]$ 时, 有

$$\begin{aligned} F(y) - F(y_0) &= \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0) dx \\ &= \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f(x, y) - f(x, y_0)] dx. \end{aligned}$$

因为 f 连续, 故存在 $M > 0$, 使得 $|f(x, y)| \leq M$. 由上式和已知条件得

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &\leq M|a(y) - a(y_0)| + M|b(y) - b(y_0)| \\ &\quad + \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| |b - a|, \end{aligned}$$

由 $a(y)$, $b(y)$ 以及 $f(x, y)$ 的 (一致) 连续性即知 $F(y)$ 在 $y = y_0$ 处连续. \square

关于 $F(y)$ 的可导性, 我们有

定理 16.1.4. 设 $f(x, y)$ 以及 $f_y(x, y)$ 均在 $[a, b] \times [c, d]$ 中连续, 如果 $a(y)$, $b(y)$ 关于 y 可导, 则 $F(y)$ 关于 y 可导, 且

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y).$$

证明. 证明留作练习. \square

例 16.1.4. 设 $a \geq 0$, 计算积分

$$I(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx.$$

解. 利用上面的定理, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} + \int_0^a \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} dx \\ &= \frac{a}{1+a^2} \arctan a + \frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}. \end{aligned}$$

关于 a 积分, 得

$$I(a) = \frac{\ln(1+a^2)}{2} \arctan a + C.$$

因为 $I(0) = 0$, 故 $C = 0$. 最后就得到

$$I(a) = \frac{\ln(1+a^2)}{2} \arctan a.$$

习题 16.1

1. 计算下列积分

$$(1) \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx \quad (a \geq 0).$$

2. 计算下列积分

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1); \quad (2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$$

3. 设 $\alpha > 1$, 计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx.$$

4. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 中连续, 则积分

$$I(\alpha, \beta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx, \quad \alpha, \beta \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

是关于 α, β, y 的连续函数, 且关于 α, β 可导.

5. 利用上题给出本节最后定理的证明.

6. 证明 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

7. 定义函数

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & y \leq x, \\ x(1-y), & y > x. \end{cases}$$

如果 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

满足方程

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近连续, 则函数

$$u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

满足方程

$$u^{(n)}(x) = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0.$$

9. 设 φ, ψ 分别为 2 次可导和 1 次可导的函数, 证明函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

§16.2 含参变量的广义积分

如同 Riemann 积分的推广一样, 含参变量的积分也有两方面的推广. 一是积分区间可以是无穷区间, 二是被积函数可能有瑕点. 为了简单起见, 我们以无穷积分为例进行讨论, 带有瑕点的含参变量的积分可类似地讨论.

§16.2.1 一致收敛及其判别法

设 $f(x, y)$ 是定义在矩形 $[a, \infty) \times [c, d]$ 中的函数, 且对于每一个 $y \in [c, d]$, 关于 x 的函数 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty)$ 中广义可积, 则定义

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d], \quad (16.2)$$

称为含参变量的广义积分, 其中 y 是参数.

定义 16.2.1 (一致收敛). 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在与 y 无关的 $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, 当 $A, A' > A_0$ 时, 对一切 $y \in [c, d]$, 成立

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{或} \quad \left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称含参变量的广义积分 $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

定义中的区间 $[c, d]$ 也可以换成其它类型的区间. 对于带有瑕点的无界函数, 也有类似的一致收敛的概念. 例如, 设对于每一个 $y \in [c, d]$, 以 b 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x, y) dx$ 存在, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, 当 $0 < \eta, \eta' < \delta_0$ 时, 对 $[c, d]$ 上的一切 y , 成立

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{或} \quad \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称 $\int_a^b f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

例 16.2.1. 研究含参变量的广义积分

$$I(y) = \int_0^{\infty} ye^{-xy} dx$$

的一致收敛性.

显然, 对每个 $y \geq 0$, 积分都是收敛的. 又因为

$$\int_A^{\infty} ye^{-xy} dx = e^{-yA},$$

故 $I(y)$ 对于 $y \in [\delta, \infty)$ 一致收敛, 其中 δ 为任意正实数. 从上式也可以看出 $I(y)$ 对于 $y \in [0, \infty)$ 并不是一致收敛的. \square

和广义积分以及无穷级数一样, 我们也有关于含参变量广义积分的一致收敛的判别法.

(1) (Weierstrass) 如果存在函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x, y)| \leq F(x), \quad \forall (x, y) \in [a, \infty) \times [c, d],$$

且积分 $\int_a^\infty F(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛. 这个判别法的证明只要注意到下面的不等式就可以了:

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} F(x)dx \right|.$$

(2) (Dirichlet) 设 $f(x, y), g(x, y)$ 满足下列条件:

(i) 当 $A \rightarrow \infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致有界, 即存在常数 K , 使得

$$\left| \int_a^A f(x, y)dx \right| \leq K, \quad \forall A \in [a, \infty), y \in [c, d];$$

(ii) $g(x, y)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x \rightarrow \infty$ 时 $g(x, y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致地趋于零, 即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 = A_0(\varepsilon)$, 当 $x \geq A_0$ 时

$$|g(x, y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d];$$

则含参变量的广义积分 $\int_a^\infty f(x, y)g(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

这个判别法的证明是这样的: 根据题设, 当 $A, A' \geq a$ 时, 有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int_a^A f(x, y)dx \right| + \left| \int_a^{A'} f(x, y)dx \right| \leq 2K.$$

根据积分第二中值公式, 当 $A, A' > A_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x, y)g(x, y)dx \right| &\leq |g(A, y)| \left| \int_A^{\xi(y)} f(x, y)dx \right| + |g(A', y)| \left| \int_{\xi(y)}^{A'} f(x, y)dx \right| \\ &\leq 2K\varepsilon + 2K\varepsilon = 4K\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明了积分的一致收敛性.

(3) (Abel) 设 $f(x, y), g(x, y)$ 满足下列条件:

(i) 积分 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛;

(ii) $g(x, y)$ 是 x 的单调函数, 且关于 $y \in [c, d]$ 一致有界;

则含参变量的广义积分 $\int_a^\infty f(x, y)g(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

这个判别法的证明仍然是运用积分第二中值公式, 我们留给读者完成.

对于含参变量的瑕积分, 上述判别法也有类似的表现形式. 我们以下仅举例来研究一致收敛性.

例 16.2.2. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx$$

关于 $\alpha \in (0, \infty)$ 的一致收敛性.

当 $\alpha \geq \delta > 0$ 时, 因为

$$|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\delta x},$$

而积分 $\int_0^\infty e^{-\delta x} dx$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知积分 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [\delta, \infty)$ 一致收敛.

$I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in (0, \infty)$ 不是一致收敛的, 这是因为当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,

$$\int_A^{A'} e^{-\alpha x} \sin x dx \rightarrow \int_A^{A'} \sin x dx = \cos A - \cos A',$$

取 $A = 2n\pi$, $A' = 2n\pi + \pi/2$ 即知上式不趋于零. \square

例 16.2.3. 研究积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$$

关于 $\alpha \in [0, \infty)$ 的一致收敛性.

因为积分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 这个积分不含参变量 α , 因而关于 α 一致收敛. 函数 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调, 且当 $\alpha, x \geq 0$ 时 $0 \leq e^{-\alpha x} \leq 1$, 故由 Abel 判别法知 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [0, \infty)$ 一致收敛. \square

§16.2.2 一致收敛积分的性质

我们在本小节讨论含参变量的广义积分所确定的函数的连续性质, 积分性质和微分性质等.

引理 16.2.1 (连续性质). 设 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty) \times [c, d]$ 中连续, (16.2) 式中的含参变量积分 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 则 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 连续.

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得

$$\left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d].$$

注意到 $f(x, y)$ 在 $[a, A] \times [c, d]$ 中一致连续, 因此存在 $\delta > 0$, 当 $y_1, y_2 \in [c, d]$ 且 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{A - a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

此时

$$\begin{aligned} |I(y_1) - I(y_2)| &= \left| \int_a^\infty f(x, y_1) dx - \int_a^\infty f(x, y_2) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^A f(x, y_1) dx \right| + \left| \int_a^A f(x, y_2) dx \right| \\ &\quad + \int_a^A |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + (A - a) \frac{\varepsilon}{A - a} = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 y 连续. □

定理 16.2.2 (积分性质之一). 设 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty) \times [c, d]$ 中连续, (16.2) 式中的含参变量积分 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 则

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > 0$, 当 $A > A_0$ 时

$$\left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d].$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^A \int_c^d f(x, y) dy dx \right| &= \left| \int_c^d I(y) dy - \int_c^d \int_a^A f(x, y) dx dy \right| \\ &= \left| \int_c^d \int_A^\infty f(x, y) dx dy \right| \\ &\leq (d - c)\varepsilon, \end{aligned}$$

根据广义积分的定义可知欲证等式成立. □

例 16.2.4. 设 $\alpha, \beta > 0$, 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$$

解. 由于积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx$ 关于 $y \in [\delta, \infty)$ ($\delta > 0$) 一致收敛, 利用积分次序的可交换性得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(yx) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

其中, 当 $y > 0$ 时, 我们用到了积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. □

定理 16.2.3 (微分性质). 设 $f(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 $[a, \infty) \times [c, d]$ 中连续, 如果积分 $\psi(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 且存在 $y_0 \in [c, d]$, 使得积分 $\int_a^{\infty} f(x, y_0) dx$ 收敛, 则积分 $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 且

$$I'(y) = \psi(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx.$$

证明. 根据题设, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > 0$, 当 $A, A' \geq A_0$ 时,

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| \leq \varepsilon; \quad \left| \int_A^{A'} f_y(x, y) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d].$$

此时, 任给 $y_1 \in [c, d]$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x, y_1) dx \right| &\leq \left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| + \left| \int_A^{A'} [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| \\ &= \left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| + \left| \int_A^{A'} \int_{y_0}^{y_1} f_y(x, y) dy dx \right| \\ &= \left| \int_A^{A'} f(x, y_0) dx \right| + \left| \int_{y_0}^{y_1} \int_A^{A'} f_y(x, y) dx dy \right| \\ &\leq \varepsilon + |y_1 - y_0| \varepsilon \leq \varepsilon + (d - c) \varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛. 当 $y_1, y_2 \in [c, d]$ 时, 由定理 16.2.2 和题设可得

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy &= \int_a^{\infty} \int_{y_1}^{y_2} f_y(x, y) dy dx \\ &= \int_a^{\infty} [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx \\ &= I(y_2) - I(y_1). \end{aligned}$$

这说明 $I(y)$ 可导, 且 $I'(y) = \psi(y)$. □

例 16.2.5. 设 $\alpha \geq 0$, 计算积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解. 在前面的例子中已经说明了 $I(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [0, \infty)$ 一致收敛. 任给 $\delta > 0$, 积分

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right)_{\alpha} dx = - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$$

关于 $\alpha \in [\delta, \infty)$ 一致收敛, 于是 $I(\alpha)$ 在 $[\delta, \infty)$ 中可导, 且

$$I'(\alpha) = - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = - \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

由于 δ 的任意性, 上式对任意 $\alpha > 0$ 成立. 从中解出

$$I(\alpha) = C - \arctan \alpha.$$

当 $\alpha > 0$ 时

$$|I(\alpha)| \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow \infty),$$

于是 $C = \pi/2$, 从而得到 $I(\alpha) = \pi/2 - \arctan \alpha$. 令 $\alpha \rightarrow 0$ 还可得 $I(0) = \pi/2$. \square

最后, 我们考虑无穷区间上广义积分可交换次序的问题.

定理 16.2.4 (积分性质之二). 设 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty) \times [c, \infty)$ 中连续. 如果 f 满足下列条件:

- (i) 积分 $\varphi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 (c, ∞) 内的任何闭区间中一致收敛, 积分 $\psi(x) = \int_c^{\infty} f(x, y) dy$ 关于 x 在 (a, ∞) 内的任何闭区间上一致收敛;
- (ii) 积分 $\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx$ 和 $\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |f(x, y)| dy$ 至少有一个收敛.
- 则 $\varphi(y)$ 在 (c, ∞) 中积分收敛, $\psi(x)$ 在 (a, ∞) 中积分收敛, 且这两个积分相等:

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y) dy.$$

证明. 不妨设积分 $\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx$ 收敛. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $c' > c$, $C > c'$, 使得

$$\int_c^{c'} \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx dy + \int_C^{\infty} \int_a^{\infty} |f(x, y)| dx dy \leq \varepsilon.$$

根据题设, 存在 $A_0 > a$, 当 $A \geq A_0$ 时

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{C - c'}, \quad \forall y \in [c', C].$$

再取 $a_0 \in (a, A_0)$, 使得

$$\int_{c'}^C \int_a^{a_0} |f(x, y)| dx dy \leq \varepsilon.$$

根据题设和引理 16.2.1 可知 $\varphi(y)$ 在 (c, ∞) 中连续, $\psi(x)$ 在 (a, ∞) 中连续. 由 $|\varphi(y)| \leq \int_a^\infty |f(x, y)| dx$ 和 Weierstrass 判别法可知积分 $\int_c^\infty \varphi(y) dy$ 收敛. 当 $b \in (a, a_0)$, $A \geq A_0$ 时, 根据题设和定理 16.2.2 可得

$$\begin{aligned} \left| \int_b^A \psi(x) dx - \int_c^\infty \varphi(y) dy \right| &= \left| \int_c^\infty \int_b^A f(x, y) dx dy - \int_c^\infty \varphi(y) dy \right| \\ &= \left| \int_c^\infty \left[\int_a^b f(x, y) dx + \int_A^\infty f(x, y) dx \right] dy \right| \\ &\leq \left| \int_{c'}^C \left[\int_a^b f(x, y) dx + \int_A^\infty f(x, y) dx \right] dy \right| \\ &\quad + \int_c^{c'} \int_a^\infty |f(x, y)| dx dy + \int_C^\infty \int_a^\infty |f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_{c'}^C \int_a^{a_0} |f(x, y)| dx dy + (C - c') \frac{\varepsilon}{C - c'} + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $\int_a^\infty \psi(x) dx = \int_c^\infty \varphi(y) dy$. □

对于非负连续函数, 下面的结果较为有用.

引理 16.2.5. 设 $f(x, y)$ 为 $(x, y) \in [a, \infty) \times [c, d]$ 中的非负连续函数, 如果积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

关于 $y \in [c, d]$ 连续, 则 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

证明. 当 $n > a$ 时, 记

$$I_n(y) = \int_a^n f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

由引理 16.1.1 可知 $I_n(y)$ 关于 y 连续. 由题设可知 $\{I_n(y)\}$ 关于 n 单调递增地趋于 $I(y)$. 根据 Dini 定理, 函数列 $\{I_n(y)\}$ 一致收敛于 $I(y)$. 因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > a$, 当 $n \geq N$ 时

$$0 \leq I(y) - I_n(y) = \int_n^\infty f(x, y) dx \leq \varepsilon,$$

由此易见 $I(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛. □

定理 16.2.6 (积分性质之三). 设 $f(x, y)$ 为 $(x, y) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$ 中的非负连续函数, 如果

(i) 函数

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx, \quad \psi(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$$

分别在 $y \in (c, \infty)$ 和 $x \in (a, \infty)$ 中连续;

(ii) 积分

$$\int_c^\infty \varphi(y) dy, \quad \int_a^\infty \psi(x) dx$$

有一个收敛. 则另一个也收敛, 且二者相等, 即

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

证明. 由条件 (i) 和前一引理可知积分 $\varphi(y)$ 和 $\psi(x)$ 分别在闭区间中一致收敛. 再由定理 16.2.4 即得欲证结论. \square

例 16.2.6. 计算积分 $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

解. 令 $x = ut$ ($u > 0$), 得

$$I = u \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt,$$

上式两端同时乘以 e^{-u^2} , 再对 u 积分得

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty J e^{-u^2} du = \int_0^\infty e^{-u^2} u du \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

交换积分次序, 得

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

因此 $I = \sqrt{\pi}/2$. \square

例 16.2.7. 计算积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx.$$

解. 将 α 视为参数, 因为 $f(x, \alpha) = e^{-x^2} \cos 2\alpha x$ 关于 x, α 连续可导, 且

$$|f_\alpha(x, \alpha)| = |e^{-x^2} 2x \sin 2\alpha x| \leq 2xe^{-x^2},$$

根据 Weierstrass 判别法知积分 $\int_0^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$ 关于 α 一致收敛. 显然, $I(\alpha)$ 关于 α 也一致收敛. 由定理 16.2.3 得

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty -e^{-x^2} 2x \sin 2\alpha x dx,$$

对上式右端使用分部积分可得

$$I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha),$$

解得

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2},$$

因为 $I(0) = \sqrt{\pi}/2$, 故有 $I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\alpha^2}$. □

例 16.2.8. 计算光学中常出现的 Fresnel 积分:

$$I = \int_0^{\infty} \sin(x^2)dx, \quad J = \int_0^{\infty} \cos(x^2)dx.$$

解. 令 $x^2 = t$ 得

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

先算第一个积分. 当 $\alpha > 0$ 时, 可验证 $f(t, u) = e^{-\alpha t} \sin t e^{-tu^2}$ 满足定理 16.2.4 的条件. 于是利用等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du,$$

可得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}. \end{aligned}$$

因为积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}$$

关于 $\alpha \in [0, \infty)$ 一致收敛, 故可令 $\alpha \rightarrow 0^+$, 得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

对于积分 J , 设 $\alpha > 0$, 同理有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \cos t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\alpha + u^2}{1 + (\alpha + u^2)^2} du. \end{aligned}$$

令 $\alpha \rightarrow 0^+$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

习题 16.2

1. 给出含参变量的广义积分的 Abel 判别法的详细证明.

2. 如果广义积分 $\int_a^\infty f(x) dx$ 收敛, $g(x, y)$ 关于 x 单调, 且关于 $y \in [c, d]$ 一致有界, 则积分

$$\int_a^\infty f(x) g(x, y) dx$$

关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

3. 研究下列积分的一致收敛性:

$$(1) \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2} dx, \quad y \in (-\infty, \infty); \quad (2) \int_0^\infty \frac{\cos xy}{\sqrt{x}} dx, \quad y \in (0, \infty);$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{x(\alpha+x)} dx, \quad \alpha \in (0, \infty); \quad (4) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2+x^2} dx, \quad \alpha \in (0, \infty).$$

4. 研究含参变量的积分一致收敛性:

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 \theta) d\theta, \quad \alpha \in [1, \infty).$$

5. 从已知积分 ($a > 0$)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

通过对参数求导计算下列积分:

$$(1) \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx, \quad (2) \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}, \quad (3) \int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx.$$

6. 设 $a, b > 0$, 证明:

$$(1) \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(a^2+t^2)(t^2+b^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a+b}, \quad (2) \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(a^2+t^2)^2(t^2+b^2)} = \frac{\pi}{4a} \frac{1}{(a+b)^2}.$$

7. 计算下列积分 ($a, b > 0$):

$$(1) \int_0^\infty x e^{-ax^2} \sin bx dx, \quad (2) \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad (3) \int_0^\infty \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx.$$

8. 计算下列积分 ($a, b > 0$):

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx, \quad (3) \int_0^{\infty} e^{-a^2 y^2 - b^2 y^{-2}} dy.$$

9. 利用等式 $\int_0^{\infty} e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt = (\alpha^2 + x^2)^{-1}$ 计算 Laplace 积分 ($\alpha > 0$):

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad J = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

10. 计算下列积分 ($a, b > 0$):

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx, \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) \cos 2ax dx.$$

§16.3 特殊函数

本节考虑互相之间有密切联系的两个含参变量积分, 它们的定义为

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0), \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0). \quad (16.3)$$

函数 $B(p, q)$ 称为 Beta 函数, $\Gamma(s)$ 称为 Gamma 函数, 统称 Euler 积分.

§16.3.1 Beta 函数的基本性质

$B(p, q)$ 的定义中, 0 和 1 是可能的瑕点, 易见, 当 $p > 0, q > 0$ 时积分收敛, 因此 $B(p, q)$ 的定义是确切的. 进一步有

(1) (连续性) 当 $\delta, \eta > 0, p \geq \delta, q \geq \eta$ 时,

$$0 \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq x^{\delta-1} (1-x)^{\eta-1},$$

上式最右边的函数积分收敛, 因此 $B(p, q)$ 关于 $(p, q) \in [\delta, \infty) \times [\eta, \infty)$ 一致收敛, 这说明 $B(p, q)$ 在其定义域内连续. 同理, 可以说明 $B(p, q)$ 在定义域内无限次可导.

(2) (对称性) 作变量替换 $x = 1 - t$, 容易看到

$$B(p, q) = B(q, p), \quad \forall p > 0, q > 0.$$

(3) (递推公式) 当 $p > 0, q > 1$ 时, 利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} \\ &= \frac{1}{p} x^p (1-x)^{q-1} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \\ &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q), \end{aligned}$$

整理后得到

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), \quad \forall p > 0, q > 1. \quad (16.4)$$

利用对称性得

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), \quad \forall p > 1, q > 0. \quad (16.5)$$

(4) (其它表示) 作变量替换 $x = \frac{y}{1+y}$ 或 $1-x = \frac{y}{1+y}$ 可得

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}} dy. \quad (16.6)$$

如果令 $x = \sin^2 \theta$ 或 $x = \cos^2 \theta$, 则又得到

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \quad (16.7)$$

在上式中取 $p = q = 1/2$ 可知 $B(1/2, 1/2) = \pi$.

§16.3.2 Gamma 函数的基本性质

将 Gamma 函数写为

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx,$$

当 $s > 0$ 时, 上式右边两个积分都收敛, 当 $s \leq 0$ 时第一个积分发散, 因此 Gamma 函数的定义域为 $s > 0$. 进一步有

(1) (连续性) 当 $\delta, \eta > 0, s \in [\delta, \eta]$ 时,

$$0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{\delta-1} e^{-x}, \quad \forall x \in (0, 1],$$

上式右端的函数在 $[0, 1]$ 上积分收敛. 同理, 由

$$0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{\eta-1} e^{-x}, \quad \forall x \in [1, \infty)$$

以及上式右端积分收敛知, $\Gamma(s)$ 关于 $s \in [\delta, \eta]$ 一致收敛, 这说明 $\Gamma(s)$ 在其定义域中连续. 进一步可以说明 $\Gamma(s)$ 在其定义域中无限次可导.

(2) (递推公式) 当 $s > 0$ 时, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^s d(-e^{-x}) \\ &= -x^s e^{-x} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

利用 $\Gamma(1) = 1$ 和递推公式可知当 n 为正整数时 $\Gamma(n) = (n-1)!$. 这说明 Gamma 函数是阶乘的推广.

(3) (其它表示) 作变量替换 $x = \alpha t$ ($\alpha > 0$) 可得

$$\Gamma(s) = \alpha^s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\alpha t} dt. \quad (16.8)$$

(4) (对数凸性) 我们说明 $\ln \Gamma(s)$ 是 $(0, \infty)$ 中的凸函数. 因为 $\ln \Gamma(s)$ 为连续函数, 只要证明不等式

$$\ln \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \ln \Gamma(s_1) + \frac{1}{2} \ln \Gamma(s_2)$$

对任意 $s_1, s_2 > 0$ 成立即可. 这等价于

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(s_1)} \sqrt{\Gamma(s_2)}.$$

事实上, 根据定义并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{s_1/2 + s_2/2 - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} [t^{(s_1-1)/2} e^{-t/2}] [t^{(s_2-1)/2} e^{-t/2}] dt \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} t^{s_1-1} e^{-t} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} t^{s_2-1} e^{-t} dt\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\Gamma(s_1)} \sqrt{\Gamma(s_2)}.\end{aligned}$$

§16.3.3 进一步的性质

定理 16.3.1. Beta 函数与 Gamma 函数之间满足下面的等式:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0. \quad (16.9)$$

证明. 利用 (16.8) 式, 当 $y \geq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{p+q-1} e^{-(1+y)x} dx.$$

再利用 (16.6) 式可得

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} y^{p-1} dy \int_0^{\infty} x^{p+q-1} e^{-(1+y)x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx \int_0^{\infty} (xy)^{p-1} e^{-yx} x dy \\ &= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \end{aligned}$$

取 $p = q = 1/2$ 还可得到 $\Gamma(1/2) = \sqrt{B(1/2, 1/2)} = \sqrt{\pi}$. □

下面的结果也很出人意料, 它给出了 Gamma 函数的一种刻画.

定理 16.3.2 (Bohr-Mollerup). 设 $f(s)$ 为 $(0, \infty)$ 中的正函数, 且满足条件

- (i) $f(1) = 1$;
 - (ii) $f(s+1) = sf(s), \forall s > 0$;
 - (iii) $\ln f(s)$ 为 $(0, \infty)$ 中的凸函数;
- 则 $f(s) = \Gamma(s), \forall s > 0$.

证明. 我们已经知道 Gamma 函数满足定理中的三个条件, 因此只要证明满足这三个条件的函数是惟一确定的就行了. 根据条件 (i) 和 (ii), 我们只需考虑 $s \in (0, 1)$ 时 $f(s)$ 的值即可. 根据条件 (iii), 对于任意正整数 $n > 1$, 有

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{\ln f(n+s) - \ln f(n)}{(n+s) - n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{(n+1) - n},$$

由条件 (i) 和 (ii) 可得 $f(n) = (n-1)!$, 代入上式得

$$\ln(n-1)! - \ln(n-2)! \leq \frac{\ln f(n+s) - \ln(n-1)!}{s} \leq \ln n! - \ln(n-1)!,$$

整理以后得

$$(n-1)^s (n-1)! \leq f(n+s) \leq n^s (n-1)!.$$

因为

$$f(n+s) = (n-1+s) \cdots (1+s) s f(s),$$

代入前式得

$$\frac{(n-1)^s (n-1)!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)} \leq f(s) \leq \frac{n^s (n-1)!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)},$$

或改写为 (上式左边 $n-1$ 换成 n)

$$\frac{n}{n+s} f(s) \leq \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} \leq f(s)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由数列极限的夹逼原理即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = f(s),$$

由条件 (ii) 不难看出上式对所有 $s > 0$ 均成立. □

从上述定理可立即得到 Gamma 函数的极限表示:

定理 16.3.3 (Euler-Gauss). 对任意 $s > 0$, 有

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \quad (16.10)$$

利用 Euler 常数, 还可将 $\Gamma(s)$ 写为无穷乘积:

定理 16.3.4 (Weierstrass). 对任意 $s > 0$, 有

$$\Gamma(s) = e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}, \quad (16.11)$$

其中 γ 为 Euler 常数, 即

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

证明. 记

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

则数列 c_n 的极限为 Euler 常数 γ . 我们有

$$n^s = e^{s \ln n} = e^{s(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-c_n)},$$

因此 (16.10) 可改写为

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-sc_n}}{s} \frac{1e^s \cdot 2e^{s/2} \cdots ne^{s/n}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)} \\ &= e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^s}{(1+s)} \cdots \frac{e^{s/n}}{1+s/n} \\ &= e^{-\gamma s} \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}. \end{aligned}$$

这就得到了 Gamma 函数的乘积表示. □

下面的公式称为 Gamma 函数的倍元公式.

定理 16.3.5 (Legendre). 对任意 $s > 0$, 有

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma(s+1/2).$$

证明. 令

$$f(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

我们来验证 $f(s)$ 满足定理 16.3.2 的三个条件. 验证第一个条件:

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

又因为

$$\begin{aligned} f(s+1) &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right) \\ &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= s \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = sf(s), \end{aligned}$$

这说明 $f(s)$ 满足第二个条件. 第三个条件利用 Gamma 函数的对数凸性即可. 因此有

$$\Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

将 s 换成 $2s$ 就是欲证等式. □

下面的公式称为 Gamma 函数的余元公式.

定理 16.3.6 (Euler). 当 $0 < s < 1$ 时, 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

证明. 利用 (16.10) 得

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \frac{n^{1-s} n!}{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{n(n!)^2}{(1-s^2)(2^2-s^2)\cdots(n^2-s^2)} \frac{1}{(n+1-s)} \\ &= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

由 (??) 或 (??) 式中 $\sin \pi s$ 的如下乘积表示

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

即得 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$. □

注. 在余元公式中取 $s = 1/2$ 可重新得到 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

例 16.3.1. 倍元公式的另一证明.

考虑 Beta 函数 $p = q = s$ 的值, 有

$$\begin{aligned} B(s, s) &= \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{s-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{s-1} dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{s-1} dt. \end{aligned}$$

作变量替换 $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$, 则得

$$B(s, s) = \frac{1}{2^{2s-1}} \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{s-1} dx = \frac{1}{2^{2s-1}} B(1/2, s).$$

根据定理 16.3.1, 上式可改写为

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)},$$

代入 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 即得倍元公式. \square

例 16.3.2. 计算积分 ($a, b > 0$):

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t \cos^{b-1} t dt.$$

解. 作变量替换 $x = \sin^2 t$, 积分化为

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{a/2-1} (1-x)^{b/2-1} dx \\ &= \frac{1}{2} B(a/2, b/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a+b}{2})}. \end{aligned}$$

特别地, 当 $b = 1$ 时,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{a}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})}.$$

如果 a, b 为正整数, 则这些积分的值可以利用 Gamma 函数的递推公式算出. \square

例 16.3.3. 计算积分 ($|\alpha| < 1$):

$$I = \int_0^{\pi/2} \tan^\alpha t dt.$$

解. 在上例中取 $a = \alpha + 1$, $b = 1 - \alpha$, 则有

$$I = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right),$$

利用余元公式得

$$I = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{2} \pi} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}.$$

特别地, 取 $\alpha = 1/2$ 可得 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \pi/\sqrt{2}$. \square

§16.3.4 Stirling 公式

对于正整数的阶乘, 我们有如下 Stirling 公式 (见 §5.8 (??) 式):

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n}, \quad \delta_n = \frac{\theta_n}{12n}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

作为阶乘的推广, $\Gamma(s)$ 函数也有类似的渐近表示. 设 $s > 0$, 记

$$\Gamma(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{\delta(s)}, \quad (16.12)$$

其中

$$\delta(s) = \ln \Gamma(s) + s - (s - 1/2) \ln s - \ln \sqrt{2\pi}.$$

令 $\phi(s) = \delta(s) - \delta(s+1)$, 利用递推公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 得

$$\phi(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{s}\right) - 1.$$

$\phi(s)$ 是 $(0, \infty)$ 中的凸函数:

$$\phi''(s) = \frac{1}{2s^2(s+1)^2} > 0.$$

利用对数函数的 Taylor 展开可得

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \left[\frac{t}{1} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots \right].$$

在上式中代入 $t = (2s+1)^{-1}$ 得

$$\phi(s) = \frac{1}{3(2s+1)^2} + \frac{1}{5(2s+1)^4} + \frac{1}{7(2s+1)^6} + \cdots,$$

由此得到如下估计

$$0 < \phi(s) < \frac{1}{3(2s+1)^2} \left[1 + \frac{1}{(2s+1)^2} + \frac{1}{(2s+1)^4} + \cdots \right] = \frac{1}{12s(s+1)}.$$

记 $\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(s+n)$, 则上式表明 $\mu(s)$ 在 $(0, \infty)$ 中内闭一致收敛, 且

$$0 < \mu(s) < \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s+n} - \frac{1}{s+n+1} \right] = \frac{1}{12s}.$$

下面我们要说明 $\delta(s) = \mu(s)$.

为此, 记 $f(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s} e^{\mu(s)}$. 我们验证 $f(s)/f(1)$ 满足定理 16.3.2 的条件. 首先有

$$\frac{f(s+1)}{f(s)} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1/2} s e^{-1} e^{-\phi(s)} = s.$$

因为 $g(s)$ 为凸函数, 故 $\mu(s)$ 也是凸函数. 根据定义,

$$\ln f(s) = \ln \sqrt{2\pi} + (s - 1/2) \ln s - s + \mu(s),$$

这是凸函数的和, 因此 $\ln f$ 是凸函数. 由定理 16.3.2 可得 $f(s) = f(1)\Gamma(s)$. 代入倍元公式并化简可得

$$f(1)e^{\mu(2s)} = e^{\mu(s)+\mu(s+1/2)-1/2} \left(1 + \frac{1}{2s}\right)^s.$$

令 $s \rightarrow \infty$ 可得 $f(1) = 1$, 因此有

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s} e^{\mu(s)} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{\frac{\theta(s)}{12s}}, \quad (16.13)$$

其中 $0 < \theta(s) < 1$. 这就是 Gamma 函数的 Stirling 公式.

进一步, 我们还可导出 $\delta(s) = \mu(s)$ 的更精密的估计. 事实上, 利用 Gamma 函数的无穷乘积表示不难得出 (本节习题 9)

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma(s) = \frac{1}{s^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2}.$$

由前节习题 6 可得

$$\frac{1}{(s+n)^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{st^2 dt}{(s^2+t^2)^2(t^2+n^2)}.$$

代入前式可得

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s}{(s^2+t^2)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^2}{t^2+n^2} \right) dt.$$

利用 §9.3 例 9.3.11 中的讨论可将上式写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s}{(s^2+t^2)^2} \left[\frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1} - 1 + \pi t \right] dt \\ &= \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s} + \int_0^{\infty} \frac{4st}{(s^2+t^2)^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}. \end{aligned}$$

关于 s 积分可得

$$\frac{d}{ds} \ln \Gamma(s) = C_1 - \frac{1}{2s} + \ln s - 2 \int_0^{\infty} \frac{t}{s^2+t^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

这说明

$$\delta'(s) = C_1 - 2 \int_0^{\infty} \frac{t}{s^2+t^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

从而有

$$\delta(s) = C_0 + C_1 s + 2 \int_0^{\infty} \frac{\arctan(t/s)}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

由 $\delta(s) \rightarrow 0 (s \rightarrow \infty)$ 可知 $C_0 = C_1 = 0$. 根据 Taylor 公式,

$$\arctan \frac{t}{s} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{t}{s}\right)^{2k-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{s^{2n+1}} \int_0^t \frac{u^{2n} s^2}{u^2 + s^2} du.$$

其中, 当 $s, t > 0$ 时

$$0 < \int_0^t \frac{u^{2n} s^2}{u^2 + s^2} du < \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^{2k-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt &= \int_0^\infty t^{2k-1} \sum_{m=1}^\infty e^{-2m\pi t} dt = \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty t^{2k-1} e^{-2m\pi t} dt \\ &= \sum_{m=1}^\infty \frac{(2k-1)!}{(2m\pi)^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{4k}, \end{aligned}$$

其中我们用到了 (9.16) 式, B_{2k} 为 Bernoulli 数. 总结以上讨论可得

$$\delta(s) = \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{s^{2k-1}} + \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{\theta_n(s)}{s^{2n+1}}, \quad \theta_n(s) \in (0, 1). \quad (16.14)$$

例如, 取 $n = 1$ 可得

$$\delta(s) = \frac{1}{12s} - \frac{\theta_1(s)}{360s^3}, \quad \theta_1(s) \in (0, 1).$$

习题 16.3

1. 证明 Beta 函数在定义域内无限次可导.
2. 证明下列递推关系:

$$pB(p, q+1) = qB(p+1, q), \quad B(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} B(p, q).$$

3. 证明下列等式, 其中 m, n 为正整数:

$$B(p, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \cdots (p+n-1)}, \quad B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4. 证明 Gamma 函数在其定义域内无限次可导.
5. 证明等式

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

6. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx, \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^6 t dt, \quad (3) \int_0^\infty e^{-x^k} dx \quad (k > 0).$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^p} \quad (p > 1), \quad (2) \int_0^1 t^{p-1}(1-t^m)^{q-1} dt \quad (p, q, m > 0).$$

8. 用余元公式证明 $\int_0^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln \sqrt{2\pi}$.

9. 证明等式 ($s > 0$)

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2}.$$

10. 用 Gamma 函数的极限表示证明倍元公式.

11. 证明 $\ln B(p, q)$ 是变量 p 在 $(0, \infty)$ 内的凸函数, 并重新证明定理 16.3.1.

12. 证明 Gauss 乘积公式:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(s + \frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(s + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2 - ns} \Gamma(ns), \quad \forall s > 0.$$

§16.4 Fourier 变换回顾

我们回顾一下, 假设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积, 根据第十章第五节最后的讨论, f 的 Fourier 积分定义为

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda,$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Fourier 积分也可以表示为

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

我们来讨论在什么条件下上式是等式.

定理 16.4.1. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 中的分段可导函数, 如果 $f(x)$ 绝对可积, 则

$$\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt, \quad (16.15)$$

其中 $f(x_+)$ 表示 f 在 x 处的右极限, $f(x_-)$ 表示 f 在 x 处的左极限.

证明. 因为 f 绝对可积, 故积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$ 关于 λ 一致收敛. 由定理 16.2.2, 对任意 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} S(A, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(x-t) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(x-t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt \\ &= S_+(A, x) + S_-(A, x) + \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)], \end{aligned}$$

其中

$$S_{\pm}(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x \pm t) - f(x_{\pm})] \frac{\sin At}{t} dt.$$

我们要证明当 $A \rightarrow \infty$ 时, $S_+(A, x), S_-(A, x) \rightarrow 0$. 以前者为例. 在 $[0, 1]$ 中, $[f(x+t) - f(x_+)]/t$ 是分段连续函数. 由 Riemann-Lebesgue 引理, 存在 $A_1 > 0$, 当 $A > A_1$ 时

$$\left| \int_0^1 [f(x+t) - f(x_+)] \frac{\sin At}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

在 $[1, \infty)$ 中, 对 $f(x+t)/t$ 运用 Riemann-Lebesgue 引理可知, 存在 $A_2 > 0$, 当 $A > A_2$ 时

$$\left| \int_1^{\infty} f(x+t) \frac{\sin At}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

又因为

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \int_A^{\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

故存在 A_3 , 当 $A > A_3$ 时,

$$\left| \int_1^{\infty} f(x_+) \frac{\sin At}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

总之, 当 $A > A_0 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$ 时,

$$|S_+(A, x)| \leq \frac{3}{\pi} \varepsilon < \varepsilon.$$

这说明 $\lim_{A \rightarrow \infty} S_+(A, x) = 0$. □

如果 f 是满足上述条件的连续偶函数, 则积分公式可写为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 余弦公式}).$$

类似地, 当 f 为奇函数时

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 正弦公式}).$$

例 16.4.1. 设 $\beta > 0$, 计算函数 $f(x) = e^{-\beta x}$ 的 Fourier 余弦公式和正弦公式.

解. 用分部积分计算 Fourier 系数:

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \lambda t dt = \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2},$$

由余弦公式得

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda \quad (\beta > 0, x \geq 0).$$

同理,

$$\int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin \lambda t dt = \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2},$$

由正弦公式得

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda \quad (\beta > 0, x > 0).$$

特别地, 我们得到如下积分公式 ($\alpha > 0$)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin \alpha t dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}.$$

例 16.4.2. 解积分方程

$$\int_0^{\infty} g(t) \sin xt dt = f(x),$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

解. 将 $f(x)$ 奇延拓为 $(-\infty, \infty)$ 上的函数, 由正弦公式, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x dx \int_0^{\infty} g(t) \sin xt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin x \sin \lambda x dx = \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

一般地, 如果积分中出现的是 $\cos x$ 函数, 则可作偶延拓后再用 Fourier 积分.



以下内容可以作为选读材料.

定义 16.4.1 (Fourier 变换). 设 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上可积且绝对可积, 令

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

称 \hat{f} 为 f 的 Fourier 变换.

Fourier 积分公式可以改写成复数形式: 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$ 关于 λ 为偶函数, 故 Fourier 积分可写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

而 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt$ 关于 λ 为奇函数, 故 (至少在主值意义下)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt = 0.$$

因此有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

这个等式称为 Fourier 变换的反演公式. 当然, 上面的推导是形式上的推导, 为了得出反演公式成立的条件, 我们先看 Fourier 变换的几个基本性质. 以下用记号

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

表示 \hat{f} 是 f 的 Fourier 变换.

- 设 $h \in \mathbb{R}$, 则 $f(x+h) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega h}$, $f(x) e^{-ixh} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega+h)$.
- 设 $\delta \neq 0$, 则 $f(\delta x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}\omega)$. 以上两条通过简单的变量替换即可得出.
- $\hat{f}(\omega)$ 是 ω 的连续函数, 且当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$. \hat{f} 的连续性可以从积分关于 ω 的一致收敛性得出, 第二个结论由 Riemann-Lebesgue 引理得出.
- 设 f 为连续的分段可导函数, f' 可积且绝对可积, 则 $f'(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \hat{f}(\omega)$. 先说明 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$. 事实上, 任给 $\varepsilon > 0$, 由 f' 绝对可积知, 存在 $A_0 > 0$, 当 $B > A > A_0$ 时

$$|f(B) - f(A)| = \left| \int_A^B f'(x) dx \right| \leq \int_A^B |f'(x)| dx < \varepsilon,$$

这说明极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在. 由 f 绝对可积知此极限必为零. $x \rightarrow -\infty$ 的情形完全类似. 这样, 根据分部积分公式就容易得出欲证结论.

- 如果 $xf(x)$ 也是绝对可积的, 则 \hat{f} 可导, 且 $-ixf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}'(\omega)$. 这条性质的证明留作习题.

下面我们计算两个 Fourier 变换的例子.

例 16.4.3. 求区间 $[-1, 1]$ 上特征函数 χ 的 Fourier 变换.

解. 根据定义, 有

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

例 16.4.4. 求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的 Fourier 变换.

解. 利用例 16.2.7 的结果, 有

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}. \end{aligned}$$

一般地, 当 $\delta > 0$ 时, 根据 Fourier 变换的性质可知

$$e^{-\frac{\delta}{2}x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\omega^2}{2\delta}}.$$

如果记上式右端为 K_δ , 则不难验证

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = \sqrt{2\pi}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \eta} K_\delta(x) dx = 0, \quad \forall \eta > 0. \quad (16.16)$$

设 f, g 均满足 Fourier 变换的条件, 则由于 \hat{f}, \hat{g} 为有界连续函数, 故 $f(x)\hat{g}(x)$ 和 $g(x)\hat{f}(x)$ 仍可积 (绝对可积). 任取 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A f(x)\hat{g}(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_{-A}^A f(x) e^{-ixt} dx. \end{aligned}$$

利用一致收敛性, 在上式中令 $A \rightarrow \infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{f}(t) dt. \quad (16.17)$$

上式称为 Fourier 变换的乘积公式.

例 16.4.5. 用乘积公式计算积分.

设 $\delta > 0$, 取 $f(x) = e^{-\delta|x|}$, $g(x) = \chi_{[-1,1]}$ 是 $[-1, 1]$ 上的特征函数, 则由前面的例子, 有

$$\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta}{\delta^2 + t^2}, \quad \hat{g}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}.$$

代入乘积公式得

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\delta}{\delta^2 + t^2} dt = \arctan \frac{1}{\delta}.$$

在上式中令 $\delta \rightarrow 0^+$ 得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

读者可以将例 16.2.5 和本例对照起来看. \square

乘积公式有许多别的应用. 首先, 我们利用它来推导 Fourier 反演公式. 为此, 我们假设 f 连续, f 和 \hat{f} 绝对可积. 在乘积公式中取 $g = e^{-\delta x^2/2}$, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_{\delta}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-\frac{\delta}{2} t^2} dt.$$

在上式中令 $\delta \rightarrow 0^+$, 利用 (16.16) 和已知条件不难得到 (对照定理 10.5.1 的证明)

$$\sqrt{2\pi} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt.$$

对于 $f(x+h)$ 来说, 上式成为

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{iht} dt. \quad (16.18)$$

这也就是 Fourier 反演公式. 反演公式也可以写为

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x), \quad f(-x) = \overline{\hat{f}(x)}.$$

如果 f 满足反演公式的条件, 在乘积公式中令 $g(x) = \overline{\hat{f}(x)}$, 此时 $\hat{g}(x) = \overline{f(x)}$, 代入乘积公式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx. \quad (16.19)$$

上式称为 **Plancherel 公式**, 它对应着 Fourier 级数中的 Parseval 等式.

设 f 或 g 满足反演公式的条件, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x-t)g(t)$ 关于 t 可积 (绝对可积), 定义

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16.20)$$

函数 $f * g$ 称为 f 和 g 的卷积. 易见 $f * g = g * f$. 可以证明 (习题), $f * g$ 为有界连续函数, 且对于任意 $A > 0$, 均有

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |f * g(x)| dx &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-A}^A |f(x-t)| dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

这说明 $f * g$ 绝对可积, 因此可以考虑它的 Fourier 变换. 事实上, 考虑定义在 $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上的函数 $F(x, y) = f(x - y)g(y)e^{-i\omega x}$, 对 $F(x, y)$ 利用定理 16.2.4, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx,$$

因此

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

这说明

$$f * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (16.21)$$

这是卷积的 Fourier 变换公式.

在应用中, 我们常常用到速降函数, 它们对于 Fourier 变换来说是十分方便的概念.

定义 16.4.2 (速降函数). 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 中的光滑函数. 如果对每一对非负整数 k, l , $x^k f^{(l)}(x)$ 均为有界函数, 则称 $f(x)$ 为速降函数. 速降函数的全体记为 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

从定义容易看出, 两个速降函数的线性组合为速降函数; 两个速降函数相乘也为速降函数. 不难证明, Fourier 变换将速降函数变为速降函数. 特别地, Fourier 反演公式对速降函数成立.

最后我们介绍 Fourier 分析的若干应用.

(1) Weierstrass 函数回顾.

设 $a \in (0, 1)$, $b > 0$. 记

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{ib^n x}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (16.22)$$

利用函数项级数的理论可知 $W(x)$ 为有界连续函数, 且当 $ab < 1$ 时 $W(x)$ 连续可导. 1886 年, Weierstrass 证明了当 $ab > 1 + 3\pi/2$ 且 b 为奇整数时 $W(x)$ 的实部无处可导. 1916 年, Hardy 证明了只要 $ab \geq 1$, $W(x)$ 的实部和虚部就无处可导. 下面我们采用 Johnsen 在 2010 发表的新证法来说明 $W(x)$ 的无处可导性.

(反证法) 设 $W(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导. 定义

$$Z(x) = \begin{cases} \frac{W(x) - W(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ W'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

则 $Z(x)$ 也是有界连续函数, 且 $W(x) - W(x_0) = (x - x_0)Z(x)$. 定义

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(x-a)(b-x)}}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b, \infty). \end{cases}$$

则 $\phi(x)$ 为光滑函数, 其 Fourier 变换 $\hat{\phi}(\omega)$ 为速降函数. 特别地,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

注意到 $\phi(0) = \phi'(0) = 0$, 由上式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{\phi}(\omega) d\omega = 0. \quad (16.23)$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, 记

$$W_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} W(x_0 + \varepsilon\omega) \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

由 (16.23) 可得

$$\begin{aligned} W_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [W(x_0 + \varepsilon\omega) - W(x_0)] \hat{\phi}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Z(x_0 + \varepsilon\omega) \omega \hat{\phi}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} W_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} W'(x_0) \omega \hat{\phi}(\omega) d\omega = 0. \quad (16.24)$$

另一方面, 根据 $W(x)$ 的定义, 我们有

$$W_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^n e^{ib^n(x_0 + \varepsilon\omega)} \hat{\phi}(\omega) d\omega = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{ib^n x_0} \sqrt{2\pi} \phi(b^n \varepsilon).$$

在上式中取 $\varepsilon = b^{-k}$, 利用 $a \in (0, 1)$, $ab \geq 1$ 容易看出只有 $n = k$ 时 $\phi(b^n \varepsilon)$ 才不等于零. 此时

$$W_\varepsilon = (ab)^k e^{ib^k x_0} \sqrt{2\pi} \phi(1),$$

从而 $|W_\varepsilon| \geq \sqrt{2\pi} \phi(1)$. 这与 (16.24) 式相矛盾.

(2) Poisson 求和公式.

设 f 为连续函数. 如果存在常数 $\varepsilon, C > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\varepsilon}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

则称 f 为缓降函数. 此时, 令

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

因为上式右端在任意闭区间上一致收敛, 故 F 是周期为 2π 的周期函数, 称为 f 的

周期化. 我们计算它的 Fourier 展开的系数如下:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi m) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi m) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\pi(2m-1)}^{\pi(2m+1)} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iny} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

如果进一步假设 \hat{f} 也是缓降函数, 则函数项级数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ 一致收敛, 其和为连续周期函数, 且 Fourier 系数与 F 相同. 根据 Fourier 展开的惟一性 (推论 10.3.3) 即得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (16.25)$$

这个等式称为 Poisson 求和公式.

例 16.4.6. Poisson 核.

设 $\delta > 0$, 考虑函数 $\mathcal{P}_\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{x^2 + \delta^2}$, \mathcal{P}_δ 称为上半平面的 Poisson 核. 由例 16.4.1 知 $\hat{\mathcal{P}}_\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\delta|\omega|}$. 于是 \mathcal{P}_δ 满足 Poisson 求和公式的条件, 从而有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\delta}{(x+2\pi n)^2 + \delta^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\delta|n|} e^{inx}. \quad (16.26)$$

令 $r = e^{-\delta}$, 上式右端记为 $P_r(x)$, 称为单位圆盘的 Poisson 核. 直接的计算表明

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}.$$

如果在 (16.26) 中代入上式, 两边除以 2δ , 再令 $\delta \rightarrow 0^+$, 则当 $x \neq 2k\pi$ 时有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+2\pi n)^2} = \frac{1}{2(1-\cos x)},$$

将上式中的 x 改写为 $2x$ 后就又得到了如下等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\pi n)^2} = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi.$$

例 16.4.7. Gauss 核.

设 $t > 0$, 考虑函数 $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, 则 $\hat{G}_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2 t}$. 由 Poisson 求和公式得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}, \quad (16.27)$$

上式右端记为 $H_t(x)$, 由左端可知它是正函数, 在下面的应用中我们将用到它.

当 $t > 0$ 时定义

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi t},$$

称为 **Theta 函数**. 在 (16.27) 中令 $x = 0$ 可以得到下面非平凡的等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta\left(\frac{1}{t}\right) = \vartheta(t), \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (16.28)$$

从上式可以看出, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + o(t)$. 值得指出的是, Theta 函数和 Riemann-Zeta 函数之间有非常紧密的联系.

(3) Riemann-Zeta 函数回顾.

Riemann-Zeta 函数定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in (1, \infty).$$

在 $(1, \infty)$ 中, $\zeta(s)$ 为光滑函数. Riemann 发现 $\zeta(s)$ 可解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 中, 并且满足一个非平凡的函数方程. 下面我们来导出这个函数方程. 为此, 记

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad s \in (0, \infty).$$

当 $s > 1$ 时, 成立

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} \\ &= (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \end{aligned}$$

因为 $\eta(s)$ 在 $(0, 1)$ 中也有定义, 我们可用上式将 $\zeta(s)$ 的定义延拓到 $(0, 1)$ 中. 在此意义下, 我们有

定理 16.4.2 (Riemann). 当 $s \in (0, 1)$ 时,

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s). \quad (16.29)$$

证明. 利用 $\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-n^2\pi t} dt$ 可得

$$\eta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} \psi(t) dt, \quad \text{其中 } \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n^2\pi t}.$$

记 $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \frac{1}{2\sqrt{t}}$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} + o(1/t)$, 且

$$\psi(t) = \varphi(t) - 2\varphi(4t) = \tilde{\varphi}(t) - 2\tilde{\varphi}(4t).$$

于是有

$$\eta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty t^{s/2-1} [\tilde{\varphi}(t) - 2\tilde{\varphi}(4t)] dt. \quad (16.30)$$

根据 Theta 函数的定义, 显然有 $\vartheta(t) = 1 + 2\varphi(t)$. 因此, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\tilde{\varphi}(t) = -1/2 + o(t)$. 现在, (16.30) 式可以改写为

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left[\int_0^\infty t^{s/2-1} \tilde{\varphi}(t) dt - 2 \int_0^\infty t^{s/2-1} \tilde{\varphi}(4t) dt \right] \\ &= (1 - 2^{1-s}) \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty t^{s/2-1} \tilde{\varphi}(t) dt. \end{aligned}$$

利用 $\zeta(s)$, 上式可写为

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_0^\infty t^{s/2-1} \tilde{\varphi}(t) dt. \quad (16.31)$$

利用 $\tilde{\varphi}(t)$, (16.28) 式可写为

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) = \tilde{\varphi}(t).$$

于是, 在 (16.31) 中将变量 t 变为 $1/t$ 可得

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \int_0^\infty t^{1-s/2} \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) t^{-2} dt = \int_0^\infty t^{(1-s)/2-1} \tilde{\varphi}(t) dt \\ &= \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s). \end{aligned}$$

这就得到了 (16.29) 式. □

Riemann 实际上发现 (16.29) 式在复平面中成立. 同时, 他还提出了以下猜测:

Riemann 假设. $\zeta(s)$ 的非平凡零点都落在 $x = 1/2$ 这条平面直线上.

这个猜测与数论中的许多问题密切相关, 是数学中最著名的未解决问题之一.

(4) 圆周上的热传导问题.

设单位圆周 S^1 上分布着某种物质, 在初始时刻 $t = 0$ 时物质的温度为 $f(x)$, 其中 $x \in S^1$. 我们可以将 S^1 上的函数视为 \mathbb{R} 上周期为 2π 的周期函数. 所谓热传导问题就是: 在时刻 $t > 0$ 时, 物质的温度等于多少? 这也就是 Fourier 当初所考虑过的问题.

以 $u(x, t)$ 记时刻 $t > 0$ 时 $x \in S^1$ 处的温度. 温度的变化遵循着一定的物理规律, 用数学方程可描述为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (16.32)$$

其中 $u(x, t)$ 关于变量 x 周期为 2π , 且 $u(x, 0) = f(x)$. 我们用所谓的“分离变量法”来寻找方程的解. 即寻找形如

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

的解. 将上式代入方程 (16.32) 得

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

如果存在常数 λ , 使得

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

则 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 是 (16.32) 的解. 因为 $X(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 根据第四章第五节的讨论可知, $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. 此时 $X(x)$ 是 $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 的线性组合, 或者说是 e^{inx} 和 e^{-inx} 的线性组合, 而 $T(t)$ 是 $e^{-n^2 t}$ 的常数倍. 总之, $u(x, t)$ 可取为下面的形式解:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \quad (16.33)$$

由于 $u(x, 0) = f(x)$, 因此在上式中应取 c_n 为 f 的 Fourier 系数.

如果 f 为 Riemann 可积函数, 则 $\{c_n\}$ 有界. 当 $t > 0$ 时, 易见 (16.33) 右端一致收敛, 并且和函数 $u(x, t)$ 关于 x, t 任意次可导, 由此可验证 $u(x, t)$ 的确是方程 (16.32) 的解. 为了检验初始条件 $u(x, 0) = f(x)$ 是否成立, 我们下面假设 f 是连续函数. 注意, 因为连续函数的 Fourier 展开不必收敛 (Fourier 当初并未考虑到这个问题), 因此我们不能在 (16.33) 中简单地取 $t = 0$. 我们将要说明的是

$$\text{当 } f \text{ 连续时, } \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x), \quad \forall x \in S^1.$$

为此我们将 (16.33) 改写如下

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right] e^{-n^2 t} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{in(x-y)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (16.34)$$

其中 H_t 就是 (16.27) 中的函数, 现在我们称之为圆周的热核. 我们已经知道 H_t 是正函数, 它还具有以下性质 (对照 (16.16)):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x) dx = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\eta < |x| \leq \pi} H_t(x) dx = 0, \quad \eta > 0. \quad (16.35)$$

先看第一条性质, 当 $t > 0$ 时, 由 (16.27) 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1. \end{aligned}$$

至于第二条性质, 先将 H_t 改写为

$$H_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + E_t(x),$$

其中 $E_t(x)$ 可如下估计 ($0 < t < 1$)

$$\begin{aligned} 0 < E_t(x) &= \sum_{|n| \geq 1} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{2n^2}{t}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{n^2}{t}} e^{-\frac{n^2}{t}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-n^2} e^{-\frac{1}{t}} = Ct^{-1/2} e^{-1/t}. \end{aligned}$$

再由

$$\int_{\eta < |x| \leq \pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \sqrt{4\pi} \int_{\frac{\eta}{\sqrt{4t}} < |y| \leq \frac{\pi}{\sqrt{4t}}} e^{-y^2} dy \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+)$$

即知 (16.35) 中 $H_t(x)$ 的第二条性质成立. 利用 (16.35), 由 f 的连续性可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y) f(y) dy = f(x), \quad \forall x \in S^1.$$

由 (16.34) 知 $u(x, t)$ 满足初始条件.

解的惟一性: 如果 u_1, u_2 均满足方程 (16.32) 以及具有相同初始条件, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 也满足 (16.32) 且 $u(x, 0) = 0$. 考虑

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x, t) dt,$$

则 (用到 u 的周期性)

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ &= u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

由 $E(0) = 0$ 即知 $E(t) \leq 0$, 从而 $u(x, t) \equiv 0$, 这说明满足相同初始条件的光滑解是惟一的.

(5) 直线上的热传导问题.

现在我们考虑直线 \mathbb{R} 上的热传导问题. 给定 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$, 问题是解热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (16.36)$$

其中 $u(x, 0) = f(x)$.

以下假设 f 连续, 且 f 在 \mathbb{R} 上绝对可积. 像在圆周上所做过的那样, 当 $\omega \in \mathbb{R}$ 时, $e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x}$ 均满足 (16.36). 此时, (16.33) 中关于 n 的求和现在应写为关于 ω 的积分:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} c(\omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

由于要求 $u(x, 0) = f(x)$, 对比 Fourier 反演公式可知在上式中应取 $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$. 由于 \hat{f} 为有界连续函数, 故当 $t > 0$ 时, 所构造的函数 $u(x, t)$ 关于 x, t 是光滑的, 并且的确满足方程 (16.36).

为了验证初始条件, 先将 $u(x, t)$ 改写如下:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega(x-y)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy. \end{aligned}$$

这种表达形式也可以这样得到: 对 (16.36) 两边关于 x 做形式上的 Fourier 变换, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \cdot \hat{u}(\omega, t),$$

从而解出 $\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t}$. 以 $t = 0$ 代入知应取 $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\omega^2 t},$$

根据 Fourier 变换的卷积性质再一次得到

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0. \quad (16.37)$$

利用上式不难验证 $u(x, t) \rightarrow f(x)$ ($t \rightarrow 0^+$). 此外, 如果 f^2 在 \mathbb{R} 上可积, 则利用 Plancherel 公式可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega, t) - \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 |e^{-\omega^2 t} - 1|^2 d\omega \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

解的惟一性: 跟圆周的情形不同, 如果不对 $u(x, t)$ 关于 x 的增长性附加进一步的限制, 那么 (16.36) 的解不是惟一的, 例如 $\frac{x}{t}G_t(x)$ 就是初始条件为零的另一个解. 如果 $u, \frac{\partial u}{\partial x}$ 关于 x 为缓降函数, 则可类似于圆周的情形证明这种解是惟一存在的.

(6) 单位圆盘上的 Dirichlet 问题.

考虑平面单位圆盘 \mathbb{D} 上热传导问题. 如果在边界 S^1 上给定温度分布函数 f , 则经过很长一段时间以后, 达到平衡状态的物质的温度分布函数 $u(x, y)$ 在圆盘内部满足方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (16.38)$$

其中 Δ 是平面 Laplace 算子, 满足 $\Delta u = 0$ 的函数称为调和函数. 方程 (16.38) 连同边值条件 $u|_{S^1} = f$ 称为 (圆盘上的) Dirichlet 问题.

我们仍用分离变量法来解 (16.38), 不过, 为了利用边值条件, 采用如下极坐标

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

要方便一些. 此时方程 (16.38) 可以写成

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

以 $u(r, \theta) = R(r)S(\theta)$ 代入上式得

$$S''(\theta) + \lambda S(\theta) = 0, \quad r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0,$$

其中 λ 为常数. 由于 S 是关于 θ 的周期函数, 周期为 2π , 因此只能取 $\lambda = n^2, n \in \mathbb{Z}$. 此时

$$S(\theta) = C_1 e^{-in\theta} + C_2 e^{in\theta}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

关于 $R(r)$ 的方程, 当 $n = 0$ 时

$$r(rR')' = 0,$$

此时 $R(r) = C_1 + C_2 \ln r$. 当 $n \neq 0$ 时, 令 $g(r) = r^{-n}R(r)$, 代入方程化简后得

$$r^{n+2}g'' + (2n+1)r^{n+1}g' = 0,$$

这说明

$$(r^{2n+1}g')' = (2n+1)r^{2n}g' + r^{2n+1}g'' = 0,$$

于是

$$g(r) = C_1 r^{-2n} + C_2, \quad R(r) = r^n g(r) = C_1 r^{-n} + C_2 r^n.$$

如果要求 u 在圆盘内部有界, 则我们必须舍弃象 $\ln r, r^{-1}$ 这样的解. 因此, 我们寻找的解应形如

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (16.39)$$

由于我们希望 $u(1, \theta) = f(\theta)$, 在上式中就应取 c_n 为 f 的 Fourier 系数. 以下假设 f 为连续函数, 则 $\{c_n\}$ 有界, 从而 (16.39) 式右端在圆盘内部是内闭一致收敛的, 和函数 $u(r, \theta)$ 在圆盘内部是光滑函数, 且可逐项求导. 于是可验证 (16.39) 式给出了方程 (16.38) 的一个解.

(16.39) 式也可以改写为

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \cdot r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt, \end{aligned}$$

即

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt, \quad (16.40)$$

其中 P_r 是 Poisson 核, 请读者验证它具有以下性质 ($0 < r < 1$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\eta < |\theta| \leq \pi} P_r(\theta) d\theta = 0.$$

利用这些性质和 (16.40) 可得

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r, \theta) = f(\theta),$$

且极限关于 θ 是一致, 这说明我们找到的解满足边值条件.

解的惟一性: 如果 u_1, u_2 均为 Dirichlet 问题的解, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 $\Delta u = 0$. 当 u 连续到圆盘的边界, 且在边界上恒为零时, 我们证明 u 在圆盘内部也恒为零. (反证法) 假设 $p_0 \in \mathbb{D}$, 且 $u(p_0) \neq 0$. 不妨设 $u(p_0) < 0$. 考虑函数

$$v = u - \frac{1}{2} u(p_0) (1 - r^2),$$

则 $v(p_0) < 0, v|_{S^1} = 0$. 由于 v 在闭圆盘上连续, 因此它在圆盘的内部, 比如 q_0 处达到最小值. 此时

$$\Delta v(q_0) \geq 0.$$

另一方面,

$$\Delta v = \Delta u - \frac{1}{2} u(p_0) \Delta(1 - r^2) = 2u(p_0) < 0,$$

这就得出了矛盾. \square

(7) 上半平面上的 Dirichlet 问题.

最后, 我们考虑上半平面 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 的 Dirichlet 边值问题:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (16.41)$$

边值条件为 $u(x, 0) = f(x)$, 其中 f 为 \mathbb{R} 中的连续函数, 并要求 f 绝对可积.

我们来寻找 (16.41) 的解. 对 (16.41) 式关于变量 x 做形式上的 Fourier 变换, 得

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega, y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega, y) = 0.$$

舍弃指数增长的解后, $\hat{u}(\omega, y)$ 可写为

$$\hat{u}(\omega, y) = c(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

考虑边值条件可知, 在上式中应取 $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$. 由于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-|\omega|y},$$

利用 Fourier 变换的卷积性质得

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt. \quad (16.42)$$

当 $y > 0$ 时, 从上式不难验证 $u(x, y)$ 关于 x, y 是光滑的, 且满足方程 (16.41), 它也满足边值条件, 即

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

如果 f 在无穷远处为零, 即 $f(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$, 则上面的极限关于 x 还是一致的, 并且此时 $u(x, y)$ 在无穷远处也是零, 即

$$\lim_{|x|+y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

解的惟一性: 我们证明, 在上半平面上连续到边界的调和函数如果在边界上恒为零, 且在无穷远处趋于零, 则必恒为零. (反证法) 设 $u(x_0, y_0) \neq 0$, 不妨设 $u(x_0, y_0) < 0$. 因为 u 在无穷远处趋于零, 故存在充分大的 $a > |x_0| + |y_0|$, 使得 u 在矩形

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

的边界上满足条件

$$u|_{\partial\Omega} > \frac{1}{2}u(x_0, y_0).$$

令

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{2}u(x_0, y_0)e^{x-a}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

则

$$v|_{\partial\Omega} \geq u|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2}u(x_0, y_0) > u(x_0, y_0) > v(x_0, y_0),$$

这说明 v 在 Ω 的内部某一点, 比如 q_0 处达到最小值. 此时 $\Delta v(q_0) \geq 0$. 另一方面, 在 Ω 内部, 有

$$\Delta v = \frac{1}{2}u(x_0, y_0)e^{x-a} < 0,$$

这就得出了矛盾.

如果不要要求 $u(x, y)$ 在无穷远处的有界性, 则方程 (16.41) 的解不惟一, 例如 $u(x, y) = y$ 是上半平面中的调和函数, 在边界上恒为零, 但它当然不是零函数.

习题 16.4

1. 用 Fourier 积分表示下列函数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad (\alpha > 0).$$

2. 当 $|x| \leq 1$ 时定义 $f(x) = 1 - |x|$; 当 $|x| > 1$ 时定义 $f(x) = 0$. 求 f 的 Fourier 变换.

3. 求下列函数的 Fourier 变换 ($\alpha > 0$):

$$(1) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x; \quad (2) f(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}.$$

4. 求下列积分方程的解:

$$(1) \int_0^\infty f(t) \sin xt dt = e^{-x} \quad (x > 0); \quad (2) \int_0^\infty f(t) \cos xt dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. 证明等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos 2xt dt = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. 设 $\lambda > 0$, 记

$$\Phi_\lambda(t) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{\sin^2 \lambda t}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Φ_λ 称为 Fejér 核. 证明 ($\eta > 0$)

$$\int_{-\infty}^\infty \Phi_\lambda(t) dt = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \eta} \Phi_\lambda(t) dt = 0.$$

7. 设 f 是 \mathbb{R} 中绝对可积的连续函数, 记

$$S(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \lambda \geq 0.$$

利用上题证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} S(\mu, x) d\mu = f(x).$$

8. 对于区间上的特征函数直接验证 Plancherel 等式的正确性.

9. 证明: 连续函数 f 和它的 Fourier 变换 \hat{f} 不能同时具有紧支集, 除非 f 恒为零.

10. 设 f, g 在任何闭区间中 Riemann 可积. 如果 f 有界, g 绝对可积, 证明 $f * g$ 为有界连续函数.

11. 设 f 在 \mathbb{R} 中绝对可积. 如果 f^2 广义可积, 证明 f 满足 Plancherel 等式.

12. 利用 Poisson 求和公式证明, 当 α 不是整数时, 成立

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi \alpha)^2}.$$

13. 证明: 当 $a \in (0, 1)$, $ab \geq 1$ 时, Weierstrass 函数 $W(x)$ 的实部和虚部均为连续函数但无处可导.