数学分析习题: 第 1 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.2

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且存在 $M>0$, 使得
$$|f'(x)| \leqslant M, \quad \forall\, x \in [a,b].$$
证明
$$\left|f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}M(b-a), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

2. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得
$$f(\xi)+f'(\xi)=0. \quad \text{(提示: 对某个辅助函数 } g(x)f(x) \text{ 用微分中值定理.)}$$

3. 设 $a_1 \in (0,\pi)$, $a_{n+1} = \sin a_n$, $n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$. (提示: 对 na_n^2 想办法用 L'Hospital 法则.)

4. 设函数 f 在点 x_0 处 2 阶可导, 证明
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

5. 设函数 f 在点 x_0 处 2 阶可导, 且 $f''(x_0)\neq 0$. 由微分中值定理, 当 h 充分小时, 存在 $\theta=\theta(h)$, $0<\theta<1$, 使得
$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0+\theta h)\cdot h.$$
证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}$.

思考题:

1. 设函数 f 在点 x_0 处可导, $x_n < x_0 < y_n$, 且 $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0).$$

2. 设函数 f 在 (a, b) 上可微, 且 $a < x_i \leqslant y_i < b$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 证明, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)] = f'(\xi) \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i).$$