数学分析习题: 第 11 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.5

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设 f 为多元函数, 证明如果 u, v 为单位向量, 且 $u=-v$, 则 $\frac{\partial f}{\partial u}=-\frac{\partial f}{\partial v}$.

2. 计算偏导数:

   (1) $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $f'_x(3,4), f'_y(0,1)$,

   (2) $f(x,y,z)=(\cos x/\sin y)e^z$, 求 $(\pi,\frac{\pi}{2},\log 3)$ 处的一阶偏导数,

   (3) $f(x,y)=\sin(x^2y)$, 求 $(1,1)$ 处的偏导数.

3. 求下列函数的一阶偏导数:

   (1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$, (2) $z=\tan\dfrac{x^2}{y}$, (3) $z=\cos(x^2+y^2)$,

   (4) $z=\log(x+\dfrac{y}{x^2})$, (5) $z=x^2y^{3/2}$, (6) $z=x^y$,

   (7) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, (8) $z=e^{xy+yz+zx}$, (9) $z=\log(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

4. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

   (1) x^2y^3, (2) $\log xy$, (3) $\arcsin(x_1^2+\cdots+x_n^2)$,

   (4) e^{x^y}, (5) $\tan(\arctan x+\arctan y)$, (6) e^{x^2+xyz}.

5. 设 $z=f(xy)$, 证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$, 证明

$$u'_x=v'_y,\quad u'_y=-v'_x.$$

7. 记 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 称为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的 Laplace 算子, 证明上题中的 u,v 满足方程

$$\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}=0,\quad \Delta v=v''_{xx}+v''_{yy}=0.$$

8. 记 $r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$, 证明

$$\Delta r^{-1}=0,$$

其中, Δ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 Laplace 算子, $\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}$.

9. 求下列曲线在指定点的切线和法面方程:

(1) $\sigma(t)=(a\cos t\sin t, b\sin^2 t, c\cos t),\ t=\frac{\pi}{4}$,

(2) $\sigma(t)=(t,t^2,t^3),\ t=t_0$.

10. 求下列曲面在指定点的切面和法线:

(1) $\Sigma(u,v)=(u,a\cos v,a\sin v),\ (u,v)=(u_0,v_0)$,

(2) $z=x^2+y^2,\ (x,y,z)=(1,2,5)$,

(3) $\Sigma(u,v)=(a\sin u\cos v,b\sin u\sin v,c\cos u),\ (u,v)=(u_0,v_0)$.

思考题:

1. 设 $f(x,y)$ 分别对于变量 x, y 为连续函数, 证明, 如果 f 对于其中一个变量是单调函数, 则 f 为二元连续函数.

2. 证明, 在本节定理 2(求导次序交换性) 中, 只要两个混合导数 f''_{xy} 和 f''_{yx} 之一在 (x_0,y_0) 连续, 定理结论同样成立.