数学分析习题: 第 12 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.5

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 研究下列函数在原点的可微性:

   (1) $f(x,y)=|xy|$, (2) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, (3) $f(x,y)=\sqrt{x}\cos y$,

   (4) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   (5) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

2. 计算下列映射在指定点的微分:

   (1) $f(x,y)=(xy^2-3x^2,3x-5y^2)$, $(x,y)=(1,-1)$;

   (2) $f(x,y,z)=(xyz^2-4y^2,3xy^2-y^2z)$, $(x,y)=(1,-2,3)$;

   (3) $f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $(r,\theta)=(r_0,\theta_0)$;

   (4) $f(x,y)=(\sin x+\cos y,\cos(x+y))$, $(x,y)=(0,0)$.

3. 求复合映射 $f\circ g$ 在指定点的 Jacobi 矩阵:

   (1) $f(x,y)=(xy,x^2y)$, $g(s,t)=(s+t,s^2-t^2)$, $(s,t)=(2,1)$;

   (2) $f(x,y)=(e^{x+2y},\sin(y+2x))$, $g(u,v,w)=(u+2v^2+3w^3,2v-u^2)$, $(u,v,w)=(1,-1,1)$;

   (3) $f(x,y,z)=(x+y+z,xy,x^2+y^2+z^2)$, $g(u,v,w)=(e^{v^2+w^2},\sin uw,\sqrt{uv})$, $(u,v,w)=(2,1,3)$.

4. 求复合偏导数:

(1) $z = h(u, x, y),\ y = g(u, v, x),\ x = f(u, v)$, 求 z'_u, z'_v;

(2) $z = f(u, x, y),\ x = g(v, w),\ y = h(u, v)$, 求 z'_u, z'_v, z'_w.

5. 计算下列函数的全微分:

(1) $z = x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4$, (2) $z = \dfrac{xy}{x^2 + 2y^2}$, (3) $z = \log(x^4 - y^3)$,

(4) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, (5) $z = \cos(x + \log y)$, (6) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$,

(7) $z = \arctan(x + y)$, (8) $z = x^y$, (9) $z = e^{x+2y} + \sin(y + 2x)$.

6. 证明, 如果 $f(x, y)$ 关于变量 x 连续, 且 f'_y 有界, 则 f 为二元连续函数.

7. 证明, 如果 $u(x, y)$ 满足方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则 $v(x, y) = u(x^2 - y^2, 2xy)$ 和 $w(x, y) = w(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ 也满足此方程.

8. 证明, 函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

满足如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. 设 f 为多元函数, 其偏导数均连续, 求在给定的任何一点处方向导数的最大值和最小值.

思考题:

1. 设二元函数 f 的 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近连续, 证明 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

2. 设 f'_x 和 f'_y 在 (x_0, y_0) 处可微, 证明

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$