数学分析习题: 第 13 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.5

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设多元函数 f 在道路连通的开集 D 上连续, 并且偏导数都存在且恒为零, 证明 f 为常数.

2. 举一个二元函数的例子, 它存在偏导数, 且偏导数恒为零, 但函数本身不是常值函数.

3. 设 k 为非负整数, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 证明
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot a^\alpha.$$

4. 记 $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$, 利用归纳法证明
$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x - a))(x - a)^\alpha.$$

5. 设 f 在 a 处存在直到 m 阶的各种偏导数, 且在 a 附近, 有
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha (x - a)^\alpha + o(\|x - a\|^m),$$
证明
$$c_\alpha = \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m.$$

6. 对下列函数在指定点作 Taylor 展开:

(1) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5,\ (x,y)=(1,-2)$;

(2) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz,\ (x,y,z)=(1,1,1)$;

(3) $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n,\ \ m,n$ 为正整数, $(x,y)=(0,0)$;

(4) $f(x,y)=e^{x+y}$, $(x,y)=(0,0)$.

7. 设 A 为 n 阶可逆方阵, 证明, 存在 $\epsilon(A)>0$, 使得当 $\|B\|<\epsilon(A)$ 时, $A+B$ 也是可逆方阵.

8. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为可微映射, 且

$$\|Jf(x)\|\leqslant q<1,\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n,$$

证明 f 存在惟一的不动点.

9. 研究下列函数在指定点的邻域内是否可以将 y 解为 x 的函数:

(1) $f(x,y)=x^2-y^2,\ \ (x,y)=(0,0)$;

(2) $f(x,y)=\sin[\pi(x+y)]-1,\ \ (x,y)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$;

(3) $f(x,y)=xy+\log xy-1,\ \ (x,y)=(1,1)$;

(4) $f(x,y)=x^5+y^5+xy-3,\ \ (x,y)=(1,1)$.

10. 计算指点点处的偏导数:

(1) $z^y-xz^3-1=0,\ \ \frac{\partial z}{\partial y}(1,2,1)$;

(2) $x^2+2y^2+3z^2+xy-z=9,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2,1)$.

思考题:

1. 证明, $\mathbb{R}^n$ 中即开又闭的集合只有空集和 $\mathbb{R}^n$ 本身.

2. 设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f:U\to V$ 为可微映射, 且 $\det Jf(x)\neq 0$, $\forall\ x\in U$. 如果 f 的逆映射存在且连续, 则其逆映射一定也是可微的.