# 数学分析习题: 第 2 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.3

**说明:** 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

**习题:**

1. 对公式

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

进行分部积分从而得到 $f$ 的 Taylor 展开余项

$$R_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n].$$

2. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶可微, 且 $f'' \geqslant 0$. 证明,

(1) $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$;

(2) $f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$, $\forall\ x_1 < x_2$, 以及 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

3. 将下列函数在 $x_0 = 0$ 处做 Taylor 展开直到 $x^4$ 项:

$$(a)\, x\cot x, \quad (b)\, e^{\sin x}, \quad (c)\, \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}, \quad (d)\, \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

4. 将下列函数在 $x_0 = 0$ 处做 Taylor 展开直到 $x^6$ 项:

$$(a)\, e^{2x-x^2}, \quad (b)\ \ln(\cos x), \quad (c)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. 将下列函数在 $x_0 = 0$ 处做 Taylor 展开:

$$(a)\ \sinh^{-1} x, \quad (b)\ \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (c)\ \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

6. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[(1+\frac{1}{x})^x - e]$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{1/x^2}$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\{\frac{e}{2}x + x^2[(1+\frac{1}{x})^x - e]\}$,

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\sin x}{x})^{1/x^2}$.

7. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}]$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[(1+\frac{1}{x})^x - ex\log(1+\frac{1}{x})]$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \cot x)$.

8. 利用 Taylor 公式计算 $\log 1.2$ 的近似值, 要求精确到小数点后第三位.

**思考题:**

1. 设 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且

$$f(a)=0, \quad |f'(x)| \leqslant |f(x)|, \quad \forall\, x\in[a,+\infty).$$

证明 $f\equiv 0$.

2. 设 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微, 且

$$M_0 = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| < \infty, \quad M_2 = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)| < \infty.$$

证明 $M_1 = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| < \infty$, 且

$$M_1^2 \leqslant 2M_0\cdot M_2.$$