数学分析习题: 第 4 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.3

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n. 如果 $S_{2n} \to S$, 且 $a_n \to 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 用裂项法证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ 收敛并求和.

3. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2)$ 是发散的.

4. 证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛.

5. 判断下列级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}.$$

6. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}, \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^p \ (a > 1), \qquad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n},$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin\frac{1}{n})^p, \qquad (6) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n.$$

7. 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 总是收敛的;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 试用积分法判别法证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{S_n}$ 也发散, 其中 S_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和.

9. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \dfrac{1}{n^q}$ $(p > 0, q > 0)$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}$ $(a > 0)$.

10. ($*$ 这一题这一周可以不做, 到**下周**再做) 判断下列级数的敛散性, 如果收敛的话是条件收敛还是绝对收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n!}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1 - \cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}})$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+x^2})$,

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{n} - 1)$, (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{x+\frac{1}{n}}}, x \in \mathbb{R}$.

思考题:

1. 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 总是收敛的;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 设 $a_n > 0$, na_n 单调趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明 $n \log n \cdot a_n \to 0$.

3. 设 $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 也收敛.