数学分析习题: 第 6 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.4

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n 2^n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

2. 求下列幂级数的收敛半径, 并判断它们在收敛区间端点的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}, \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n,$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n, \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$$

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}, \qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\log\frac{n^2+\alpha^2}{n^2})x^n,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

3. 求幂级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}x^n$$
的收敛半径, 其中 α 为正实数.

4. 利用幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in(-1,1)$ 证明
$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

5. 利用幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$ 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ 的和 (提示: 对 x 求导再求和).

6. 求下列级数之和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n,\quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n.$$

7. 证明

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\log 2.$$

8. 设 $a_n>0$, 且幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R. 证明

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n.$$

注意上式中的后者可能是发散的, 此时要证明的是左式极限为 $+\infty$.

思考题:

1. 证明, 如果 na_n 为单调收敛于 0 的数列, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛.

2. 构造一个光滑函数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得 $0\leqslant\phi\leqslant 1$, 且

$$\phi(x)=1,\ 当\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}];\ \phi(x)=0,\ 当\ |x|\geqslant 1.$$

3. 设 a_n $(n\geqslant 0)$ 为一列实数, 令

$$\xi_n=n+\sum_{i=0}^{n}|a_i|,$$

证明下面的函数项级数 (ϕ 是上题中的光滑函数)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\phi(\xi_nx)x^n$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛, 和函数 f 为光滑函数, 且 f 在 0 处的各阶导数为

$$f^{(n)}(0)=a_n,\ \forall\ n\geqslant 0.$$