数学分析习题: 第 8 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.4

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设 $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$ 为三角多项式, 证明, 对任何 Riemann 可积函数 f, 均有
$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx,$$
其中 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 展开的部分和.

2. 证明下列等式:
$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4},\ x\in[-\pi,\pi],$$
$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{12}x-\frac{x^3}{12},\ x\in[-\pi,\pi].$$

3. 利用 $f(x)=x^3$ 的 Fourier 展开及 Parseval 等式求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

4. 利用函数
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant \pi.\end{cases}$$
的 Fourier 展开求下列级数的和
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

5. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微, 且

$$f(-\pi)=f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0.$$

如果 f' 可积并平方可积, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx,$$

并求等号成立的条件.

思考题:

1. 证明

$$(1)\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx=-\frac{\pi^2}{6}, \quad (2)\ \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2}{12}.$$

2. 证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\log(2\cos\frac{x}{2}),\ x\in(-\pi,\pi),$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\log(2\sin\frac{x}{2}),\ x\in(0,2\pi).$$