数学分析习题: 第 9 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.4

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设 $\langle,\rangle$ 为向量空间 X 上的内积, $x, y \in X$, $y \neq 0$. 在下面的不等式

$$\langle x - ty, x - ty\rangle \geqslant 0$$

中令 $t = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ 从而证明 Schwarz 不等式.

2. 证明内积空间满足如下的平行四边形公式:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall\ x,\ y.$$

3. 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 令

$$I_n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x_i - a_i| \leqslant r,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

称为 n 维正方体. 证明正方体都是闭集. 把上式中的 $\leqslant$ 换成 $<$ 得到的集合称为开立方体, 证明它们的确是开集.

4. 设 A 为度量空间 (X, ρ) 的子集, 在 $A \times A$ 上定义如下映射 ρ_A:

$$\rho_A(a_1, a_2) = \rho(a_1, a_2),$$

证明 ρ_A 为 A 上的度量, 称为诱导度量.

5. 证明 Cauchy 点列如果有收敛子列, 则其自身也是收敛的.

6. 证明, 有限个紧致集合之交集和并集仍为紧致集合.

7. 设 $f: X \to Y$ 为从度量空间到度量空间的映射. 证明,

   (1) f 为连续映射的充分必要条件是开集的原像还是开集;

   (2) f 为连续映射的充分必要条件是闭集的原像还是闭集.

8. 举例说明, 从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射不一定把闭集映为闭集 (提示: 考虑一元函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像, 并向 x 轴作投影).

9. 证明, 不存在从单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续单射 (提示: 考虑 $f(x) - f(-x)$, 交换 x 和 $-x$ 并考虑符号的变化.)

10. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

$$(1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$(3) \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \log(x^2+y^2), \qquad (4) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

11. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

    (1) $\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $\quad \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$,

    (2) $\lim_{x\to+\infty} \lim_{y\to 0} \frac{x^y}{1+x^y}$, $\quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y}$,

    (3) $\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y}$, $\quad \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y}$,

    (4) $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1+xy}$, $\quad \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to 0} \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1+xy}$.

思考题:

1. 证明, $\mathbb{R}^n$ 中的开球不能写成若干个互不相交的闭球的并.

2. (1) 证明, 在 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中去掉有限个点后剩下的集合是道路连通的.

   (2) 利用你已经证明的事实证明, 从 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射不可能为单射.

3. 设 $f(0) = 0$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为保持距离的映射, 即

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

   证明 f 为正交线性变换.