南 京 大 学 数 学 系 试 卷

2005 / 2006 学年 第 二 学期　　课 程 名 称 流形与几何

试卷类型 A 卷 考试形式 开卷　　使 用 班 级 硕士及博士研究生

命 题 人 梅加强　　考 试 时 间 2006 年 6 月 20 日

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	阅卷人
得 分												

班级________ 学号________ 姓名________

装 订 线

说明：

1. **请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。**
2. **本试卷共** 8**题，满分** 100 **分，考试时间** 150 **分钟。**

1. 叙述微分流形的定义并举一个非平凡的例子.（10分）

2. 叙述微分流形余切丛的定义并给出其局部平凡化和连接函数.（15分）

3. 记 $\mathrm{O}(2,1)=\{A\in M_{3\times 3}|AI_{2,1}A^T=I_{2,1}\}$, 这里 $M_{3\times 3}$ 是 3 阶实方阵全体, $I_{2,1}$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1,1,-1\}$.

(i) 证明 $\mathrm{O}(2,1)$ 是 3 维李群; (ii) 证明 $\mathrm{O}(2,1)$ 有 4 个连通分支. (20分)

4. 考虑映射 $\pi: SO(n)\to S^{n-1}$, π 把正交方阵 A 映为 A 的最后一列. 证明, $(SO(n),S^{n-1},\pi)$ 为纤维丛, 其纤维和结构群均为 $SO(n-1)$. (15分)

5. 设 M 为紧流形, p,q 为 M 上两个不同的点. 分别给定 p 处的切向量 X_p 及 q 处

切向量 X_q. 证明

(i) 存在连接 p,q 的光滑曲线 σ, 使得 $\dot{\sigma}(0)=X_p,\ \dot{\sigma}(1)=X_q$;

(ii) 存在 M 上的光滑向量场 X, 使得 $X(p)=X_p,\ X(q)=X_q$;

(iii) 存在微分同胚 $\phi: M\to M$, 使得 $\phi(p)=q$. （10分）

6. 设 A 为 n 阶实方阵, 把它视为如下线性映射：$A: R^n\to R^n,\ x\mapsto A\cdot x$, 这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 看成列向量. 证明

$$A^*(dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge x_n)=(\det A)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge x_n$$

（10分）

7. 证明任何微分流形上都存在黎曼度量.（10分）

8. 在上半欧氏空间 $H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ 上定义黎曼度量为

$$g = \frac{1}{x_n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$$

试求黎曼流形 (H^n, g) 的截面曲率.（10分）