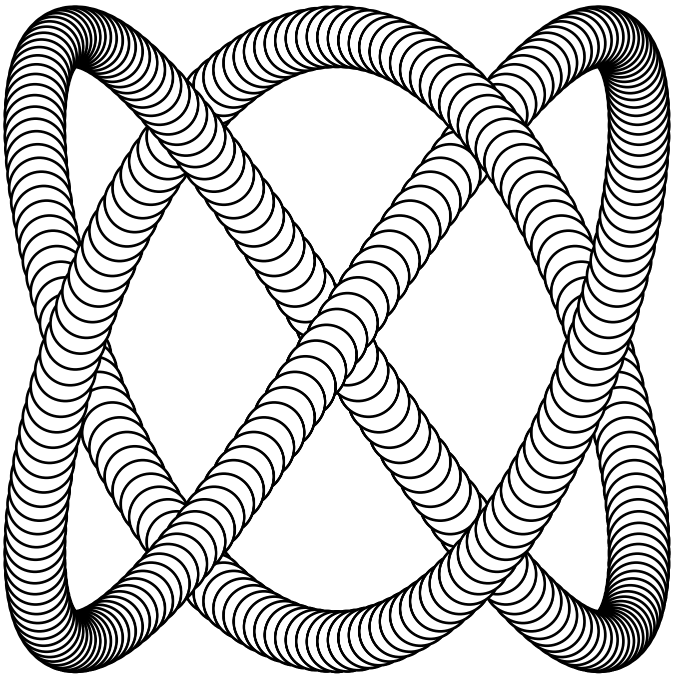
流形与几何初步

梅加强　著



前言

“流形” 是英文单词 Manifold 的中文译名, 它源于德文术语 Mannigfaltigkeit, 最早出现在 Riemann 1851 年的博士论文中, 用来表示某种属性所能取到的所有值. Poincaré 在发明代数拓扑时实际上已经研究了流形的许多具体例子, 但流形的内在定义是 Weyl 1912 年在其关于黎曼曲面的著作中给出的, 黎曼曲面即是 2 维的定向流形. 现在被人们所广泛采用的微分流形的定义是 Whitney 1936 年提出的, Whitney 的工作大大加深了人们对于流形的认识, 基于流形的近代几何学、拓扑学等由此迅速发展起来.

本书是在作者多年讲课讲稿的基础上修改而成，书中并附有许多习题，它们是本书的不可或缺的补充。

目　录

第一章　微分流形

本章给出微分流形的定义, 研究流形之间的映射及其线性化. 我们列举了许多具体的微分流形的例子, 并将 Lie 群作为重要的例子加以介绍.

§1.1　流形的定义和例子

流形是一种特殊的拓扑空间, 是欧氏空间中曲线, 曲面的推广. 在微积分中, 我们曾研究过曲线的弧长, 曲面的面积等问题. 在古典微分几何中, 我们进一步研究了曲线和曲面的 "弯曲" 性质, 发展出了重要的曲率概念. Gauss 发现, 曲面的曲率实际上只依赖于曲面的第一基本形式, 这为将曲面从欧氏空间中抽象出来进行研究提供了很好的动机. 此外, Gauss-Bonnet 定理将几何量 (曲率) 和拓扑量联系在一起, 从而为用几何手段研究拓扑问题提供了启发. 现代微分几何和拓扑学的主要研究对象就是流形.

回忆一下, 所谓拓扑空间是指一个配对 (X,τ), 其中 X 为一个集合, τ 也是一个集合, 其元素都是 X 中的子集, 并且满足以下条件:

(1) $\varnothing,\ X\in\tau$;

(2) τ 中有限个元素之交仍属于 τ;

(3) τ 中任意多个元素之并仍属于 τ.

这样的 τ 称为 X 上的一个拓扑, τ 中的元素称为开集. 拓扑空间是点集拓扑学或一般拓扑学的主要研究对象, 人们研究连续性质以及在连续变换下保持不变的性质. 为了研究微分性质, 必须对拓扑空间加进一步的限制. 在点集拓扑中, 具有可数拓扑基的拓扑空间称为 A_2 的, 具有 Hausdorff 性质的拓扑空间称为 T_2 的.

定义 1.1.1 (C^r 流形)**.** *设 M 是具有 A_2, T_2 性质的拓扑空间. 如果存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 以及相应的连续映射族 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^n$, 使得*

(1) $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$ 为从 U_α 到欧氏空间开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上的同胚;

(2) 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, 如下的转换映射

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

为 C^r $(r\geqslant 1)$ 映射, 则称 M 为 C^r 流形.

我们称 $\{U_\alpha\}$ 或 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为 M 的局部坐标覆盖, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为一个局部坐标系, U_α 为局部坐标邻域, φ_α 为局部坐标映射. 设 $p\in U_\alpha$, 记 $x^i(p)$ 为 $\varphi_\alpha(p)$ 的第 i 个欧氏坐标, $x^i:U_\alpha\to\mathbb{R}$ 为第 i 个坐标函数, 有时也称 $\{x^i\}=\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$ 为 p 附近的局部坐标. 定义中的 n 称为流形 M 的维数, 记为 $n=\dim M$, 为了强调流形的维数, 有时也把 M 记为 M^n.

我们就流形的概念作一些解释:

- 如果所有的转换映射都只是 C^0(连续) 的, 则称 M 为拓扑流形. 当 $1 \leqslant r < \infty$ 时, 称 M 为 C^r 微分流形. 如果转换映射都是无限次可微的, 则称 M 为 C^∞ 流形或光滑流形. 当转换映射都是实解析 (记为 C^ω) 时, 称 M 为实解析流形.

- 设 U 为 M 上的开集, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ 为连续映射, 且 φ 的像为开集, φ 到其像上是同胚. 如果 φ 和 φ_α 之间的转换映射均为 C^r 的, 则称 (U,φ) 和局部坐标覆盖 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 是 C^r 相容的. 利用选择公理容易证明, 对于任何一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 均存在一个包含它的 "最大" 的局部坐标覆盖 $\mathscr{D}$, 使得任何与 $\mathscr{D}$ 均 C^r 相容的局部坐标系 (U,φ) 都含于 $\mathscr{D}$ 之中. 我们把这样的 $\mathscr{D}$ 称为拓扑流形 M 的一个 C^r 微分构造或微分结构.

- 存在这样的拓扑流形的例子, 该拓扑流形上不存在任何相容的微分构造; 另一方面, 可以证明 (这是微分拓扑学的内容), 给定一个 C^r $(r \geqslant 1)$ 微分构造, 一定存在一个相容的 C^∞ 微分构造. 为了方便起见, 在没有明确说明的情况下, 下面的微分流形是指光滑流形.

例 1.1.1. *欧氏空间及其开集.*

在 $\mathbb{R}^n$ 上取恒同映射 $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 成为微分流形, 恒同映射是其 (整体) 坐标. 显然, $\mathbb{R}^n$ 中的开集也都是 n 维微分流形; 一般地, 微分流形的开子集也继承了微分结构成为微分流形.

我们把上面所定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的微分结构称为标准微分结构. 需要注意的是, 除了标准的微分结构以外, 还存在和标准微分结构不相容的其它微分结构. 例如, 考虑 $\mathbb{R}^1$ 上如下的映射

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \quad \varphi(u) = u^3,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1.$$

显然 φ 为同胚, 因此它定义了 $\mathbb{R}^1$ 上的一个微分结构, 它和标准的微分结构不相容 (为什么?).

例 1.1.2. *单位圆周 S^1.*

记

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\},$$

则 S^1 为 $\mathbb{R}^2$ 的子拓扑空间. 令

$$U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, 2\pi)\}, \quad U_1 = \{e^{i\eta} \mid \eta \in (\pi, 3\pi)\},$$

则 $U_1 = S^1 - \{(1,0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(-1,0)\}$, 因此 $S^1 = U_1 \cup U_2$. 分别在 U_1 和 U_2 上定义映射如下

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\to (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1 \\ e^{i\theta} &\mapsto \theta, \\ \varphi_2 : U_2 &\to (\pi, 3\pi) \subset \mathbb{R}^1 \\ e^{i\eta} &\mapsto \eta, \end{aligned}$$

则 φ_1 和 φ_2 均为同胚, 且转换映射

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \to (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)$$

为

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta + 2\pi, & \theta \in (0,\pi), \\ \theta, & \theta \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

同理可计算 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, 它们均为光滑映射, 因此 S^1 为光滑流形.

可以证明, 在分类的意义下, $\mathbb{R}^1$ 和 S^1 是仅有的两个连通 1 维流形. 为了给流形分类, 我们先引入可微映射的概念.

定义 1.1.2 (C^k 映射)**.** *设 $f : M \to N$ 为两个 C^r 微分流形之间的连续映射, 如果任给 $p \in M$, 以及 $q = f(p) \in N$ 附近的任一局部坐标系 (V, ψ), 均存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ), 使得 $f(U) \subset V$, 且 f 在这两个局部坐标系下的局部表示*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

为 C^k $(k \leqslant r)$ 映射, 则称 f 为流形 M, N 之间的 C^k 映射. C^k 映射的全体记为 $C^k(M,N)$.

显然, C^k 映射的复合仍为 C^k 映射. 注意, C^k 映射的定义虽然用到局部坐标系, 但由于流形定义中要求转换映射都是 C^r 的, 故实际上映射的 C^k 性质不依赖于局部坐标系的选取. 我们在以后定义其它对象的时候, 如果用局部坐标系来定义, 则读者需注意验证该定义是否与局部坐标的选取无关.

定义 1.1.3 (微分同胚)**.** *设 M, N 为 C^r 微分流形, $f : M \to N$ 为同胚映射. 如果 f 及其逆映射 f^{-1} 均为 C^r 映射, 则称 f 为 C^r 微分同胚, 或简称微分同胚.*

当我们不加申明的时候, 光滑流形之间的微分同胚指的是光滑的微分同胚. 我们不区分微分同胚的流形. 特别地, 在同一个拓扑流形上, 如果两个微分结构定义

出的微分流形是微分同胚的, 则我们称这两个微分结构等价, 我们不区分等价的微分结构. 作为习题, 读者可证明上面第一例中 $\mathbb{R}^1$ 上的两个微分结构是等价的. 一般地, Moise 等证明了维数不超过 3 的拓扑流形上存在惟一的一个微分结构. 后来, Milnor 发现在 7 维球面上存在不同于标准微分结构的微分结构, 这个结果当时在数学界引起了不小的轰动. 进一步的研究表明在 7 维球面上一共存在 28 个不同的微分结构, 它们组成一个有限循环群. 人们也早就发现, 除了 $\mathbb{R}^4$ 以外, 欧氏空间上的微分结构都是惟一的. 后来, 由于 Freedman 和 Donaldson 等人的工作, 人们发现在 4 维欧氏空间上甚至存在不可数多个不同的微分结构.

设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为微分流形 M 的局部坐标覆盖. 用分量表示转换映射如下

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)=(y^1,y^2,\cdots,y^n),$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$, y^i 是关于 x^j 的函数 $(1\leqslant i,j\leqslant n)$. 记转换映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 的 Jacobian 为

$$J(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{n\times n},$$

Jacobian 的行列式记为

$$\det J(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(p)=\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)}(\varphi_\alpha(p)),\quad p\in U_\alpha\cap U_\beta.$$

在多元微积分中, 曲线和曲面上的第二型积分都涉及重要的概念:"定向". 对于微分流形, 我们将从不同的角度来介绍这个重要的概念.

定义 1.1.4 (可定向流形)**.** *设 M 为微分流形, 如果存在 M 的局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$, 使得当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, $\det J(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})>0$, 则称流形 M 是可定向的, $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为一个定向坐标覆盖. 如果不存在任何定向坐标覆盖, 则称流形 M 是不可定向的.*

前面两个例子中的欧氏空间和单位圆周都是可定向的微分流形. 下面我们再来看一些流形的例子.

例 1.1.3. *n 维环面 T^n.*

两个微分流形的乘积仍为微分流形, 因此 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ (n 个 S^1 之积) 为 n 维微分流形, 并且是可定向流形, 称为 n 维环面.

例 1.1.4. *n 维球面 S^n.*

记

$$S^n=\{(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})\mid\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}.$$

S^n 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的子拓扑空间. 令

$$U_1 = S^n - \{(0,0,\cdots,-1)\}, \quad U_2 = S^n - \{(0,0,\cdots,1)\}.$$

显然, $S^n = U_1 \cup U_2$. 映射 $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ 和 $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ 分别定义如下

$$\varphi_1(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) = (\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \frac{x^2}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}),$$
$$\varphi_2(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) = (\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \frac{x^2}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}).$$

容易看出 φ_1 和 φ_2 均为同胚, 并且转换映射 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ 为

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^1,y^2,\cdots,y^n) = (\frac{y^1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}, \frac{y^2}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}, \cdots, \frac{y^n}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}).$$

因此 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 为光滑映射, 同理 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 为光滑映射. 这说明, S^n 为 n 维光滑流形. 不难验证它是可定向的紧致连通流形.

例 1.1.5. n 维实投影空间 RP^n.

记

$$RP^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim,$$

其中, 等价关系 $\sim$ 定义如下

$$x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \ x \sim y \Longleftrightarrow \text{存在非零实数 } \lambda \text{ 使得 } x = \lambda \cdot y.$$

即商空间 RP^n 中的点可以看成经过原点的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的直线. 记 x 的等价类为 $[x]$, 定义投影映射 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to RP^n$ 为

$$\pi(x) = [x].$$

RP^n 商的拓扑定义为商拓扑, 即

$$V \text{ 为 } RP^n \text{ 中开集} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(V) \text{ 为 } \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ 中开集}.$$

RP^n 也可以看成 S^n 的商空间:

$$RP^n = S^n/\sim,$$

其中 $x \sim y$ 当且仅当 $y = -x$. 容易看出, 在商拓扑下, RP^n 为 A_2 和 T_2 的. 下面我们说明 RP^n 上有自然的微分流形结构. 为此, 对 $k = 1,2,\cdots,n+1$, 令

$$U_k = \{[x] \in RP^n \mid x = (x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}), \ x^k \neq 0\},$$

由等价关系的定义知 U_k 是定义好的开集, 并且 $RP^n=\overset{n+1}{\underset{k=1}{\cup}}U_k$. 映射 $\varphi_k:U_k\to\mathbb{R}^n$ 定义为

$$\varphi_k([x])=(x^1/x^k,x^2/x^k,\cdots,x^{k-1}/x^k,x^{k+1}/x^k,\cdots,x^{n+1}/x^k).$$

由等价关系的定义知 φ_k 是定义好的同胚映射. 当 $k\neq l$ 时, $U_k\cap U_l\neq\varnothing$. 为了计算转换映射, 记 x^i/x^j 为 ${}_j\xi^i$, 则

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1})=({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{l+1},\cdots,{}_l\xi^{n+1}),$$

因为

$$\begin{aligned}{}_l\xi^h&=x^h/x^l=(\frac{x^h}{x^k})/(\frac{x^l}{x^k})={}_k\xi^h/{}_k\xi^l,\quad h\neq l,k,\\ {}_l\xi^k&=x^k/x^l=1/(\frac{x^l}{x^k})=({}_k\xi^l)^{-1},\end{aligned}$$

故转换映射均为光滑映射, 这说明 RP^n 为光滑流形.

可以证明, 当 n 为奇数时, RP^n 为可定向流形; 当 n 为偶数时, RP^n 为不可定向流形. RP^n 称为 n 维实投影空间, 当 $n=2$ 时, 也称 RP^2 为实投影平面.

例 1.1.6. 流形的连通和.

设 M_1 和 M_2 均为 n 维微分流形, 取 $p_1\in M_1,p_2\in M_2$, 分别在 M_1 和 M_2 上取 p_1 附近的局部坐标系 (U_1,φ_1) 和 p_2 附近的局部坐标系 (U_2,φ_2), 使得 $\varphi_1(p_1)=\varphi_2(p_2)=0$, 且

$$\varphi_1(U_1)=\varphi_2(U_2)=B_2(0)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n(x^i)^2<4\}.$$

记

$$A(\frac{1}{2},2)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\frac{1}{4}<\sum_{i=1}^n(x^i)^2<4\},$$

并令 $V_1=\varphi_1^{-1}(A(\frac{1}{2},2))$, $V_2=\varphi_2^{-1}(A(\frac{1}{2},2))$. 考虑映射

$$\phi:A(\frac{1}{2},2)\to A(\frac{1}{2},2),\quad\phi(x)=x[\sum_{i=1}^n(x^i)^2]^{-1},$$

ϕ 为微分同胚, 因而映射 $\varphi_2^{-1}\circ\phi\circ\varphi_1:V_1\to V_2$ 也是微分同胚. 商空间

$$M_1-\varphi_1^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)})\coprod M_2-\varphi_2^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)})/\sim$$

是通过粘接映射 $\varphi_2\circ\phi\circ\varphi_1^{-1}$ 定义的, 即

$$x\in M_1,y\in M_2,\ x\sim y\iff x\in V_1,y\in V_2,\ y=\varphi_2\circ\phi\circ\varphi_1^{-1}(x).$$

通过这个办法我们得到了一个新的微分流形, 并且在微分同胚的意义下其微分结构不依赖于坐标邻域的选取, 记为 $M_1 \# M_2$, 称为 M_1 和 M_2 的连通和. 不难证明, $M_1 \# M_2$ 与 $M_2 \# M_1$ 微分同胚, $M^n \# S^n$ 与 M^n 自身微分同胚.

特别地, 任给 $g \geqslant 1$, g 个 2 维环面 T^2 的连通和仍为 2 维紧致连通流形, g 个投影平面 RP^2 的连通和也是 2 维紧致连通流形. 可以证明, 加上 2 维球面, 这些就是所有的 2 维紧致连通流形了, 有时又称它们为曲面或 2 维曲面.

本节最后我们来介绍什么是流形的定向以及定向和流形连通性的关系. 首先有如下简单的引理:

引理 1.1.1. *连通的拓扑流形必为道路连通的.*

证明. 设 M 为连通的拓扑流形. $\forall\, p \in M$, 令

$$C_p = \{q \in M \mid \text{ 存在一条道路连接 } p \text{ 和 } q\}.$$

因为 $p \in C_p$, 故 C_p 非空. 又由于拓扑流形局部上和欧氏空间同胚, 即是局部道路连通的, 因此 C_p 为非空开集.

按照定义易见, 当 $p \neq q$ 时, 要么 $C_p = C_q$, 要么 $C_p \cap C_q = \varnothing$. 因此, 如果 $C_p \neq M$, 则 $M - C_p = \bigcup\limits_{q \notin C_p} C_q$ 也是开集, 这和 M 的连通性相矛盾. 这说明 $C_p = M$, $\forall\, p \in M$. 因此 M 是道路连通的. □

设 M 为微分流形, 如果 M 的两个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) 满足

$$\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p) > 0, \ \forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

则称这两个局部坐标系是同向的. 和前面微分结构的定义类似, 我们有如下定向的定义.

定义 1.1.5 (定向)**.** *设 M 为可定向微分流形, $\mathscr{D}$ 为一个定向坐标覆盖. 如果任何一个与 $\mathscr{D}$ 中局部坐标系都同向的局部坐标系均包含于 $\mathscr{D}$ 内, 则称 $\mathscr{D}$ 为 M 的一个定向.*

由选择公理可知, 任给 M 的一个定向坐标覆盖, 总存在一个包含此坐标覆盖的 "最大" 定向坐标覆盖, 即定向. 定向这个概念很早就被数学家所意识到了, 但直到 Poincaré 发明代数拓扑的时候才被大家真正认识清楚. 在学习多元函数积分的时候我们曾用 "左手法则" 或 "右手法则" 来决定定向. 代数拓扑学的发展告诉我们, 定向实际上是一个拓扑的性质 (即流形是否可定向与微分结构无关), 它由第一 Stiefel-Whitney 示性类决定. 我们在后面将从另外的角度来重新解释定向这个概念.

例 1.1.7. *$\mathbb{R}^n$ 上的不同定向.*

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上如下坐标映射 $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$:

$$\rho(x)=(x^1,x^2,\cdots,x^{n-1},-x^n),$$

$(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个定向坐标覆盖, 它决定的定向和由恒同映射决定的定向不同. 一般地, 如果 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是流形 M 的一个定向坐标覆盖, 则 $\{(U_\alpha,\ \rho\circ\varphi_\alpha)\}$ 也是定向坐标覆盖, 它们决定了两个不同的定向.

引理 1.1.2. *连通的可定向微分流形恰好有两个定向.*

证明. 设 $\mathscr{D}$ 为可定向流形 M 的一个定向. 根据上面的讨论, 坐标反射 ρ 决定了另一定向, 记为 $\mathscr{D}^-$. 现设 $\tilde{\mathscr{D}}$ 为 M 的另一定向, 我们来定义函数 $f:M\to\mathbb{R}$. 任给 $p\in M$, 则存在局部坐标系 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$ 和 $(V,\psi)\in\tilde{\mathscr{D}}$, 使得 $p\in U\cap V$. 令

$$f(p)=\det J(\psi\circ\varphi^{-1})(p)|\det J(\psi\circ\varphi^{-1})(p)|^{-1}.$$

由于 $\mathscr{D}$ 和 $\tilde{\mathscr{D}}$ 均为定向, 故 $f(p)$ 与局部坐标的选取无关, 是 M 上定义好的局部常值函数. 如果 M 是连通的, 则 f 为常值函数, 从而 $f\equiv 1$ 或 $f\equiv -1$. 当 $f\equiv 1$ 时 $\tilde{\mathscr{D}}=\mathscr{D}$; 当 $f\equiv -1$ 时, $\tilde{\mathscr{D}}=\mathscr{D}^-$. □

推论 1.1.3. *设 $\mathscr{D}$ 为流形 M 的一个定向, (U,φ) 为 M 的一个局部坐标系. 如果 U 连通, 则要么 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$, 要么 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^-$.*

习题 1.1

1. 如果 M, N 均为 C^r 流形, 则 $M\times N$ 也是 C^r 流形, 且
$$\dim M\times N=\dim M+\dim N.$$
2. 证明, 在本节第一例中, $\mathbb{R}^1$ 上的两个不相容微分构造定义出的微分流形是微分同胚的.
3. 按照定义说明微分流形的局部坐标映射实际上是从坐标邻域到其像的微分同胚.
4. 证明, 微分同胚的流形具有相同的维数.
5. 证明微分流形转换映射的 Jacobian 行列式在定义域内是处处非零的.
6. 证明, 如果流形 M, N 均可定向, 则 $M\times N$ 也是可定向流形; 反之, 如果 $M\times N$ 可定向, 则 M 和 N 都是可定向的.

7. 通过计算转换映射的 Jacobian 行列式证明 n 维球面都是可定向的微分流形.
8. 证明, 如果微分流形被两个局部坐标邻域所覆盖, 并且它们的交集连通, 则该流形必定是可定向的.
9. 将上一题推广至三个坐标邻域, 此时如何判断流形是否可定向? 更多的坐标邻域呢?
10. 证明奇数维的实投影空间是可定向的微分流形, 并证明投影平面不可定向.
11. 证明, 可定向微分流形的连通和仍可定向; 不可定向情形如何?

§1.2 子流形

前一节我们按照定义列举了微分流形的一些例子. 为了得到更多的例子, 我们来研究流形之间的映射, 其中一个重要的工具就是逆映射定理. 我们先看一个简单的例子.

例 1.2.1. *可逆线性映射.*

考虑线性映射 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 从线性代数我们知道,

$$A \text{ 可逆 } \iff \det A\neq 0 \iff A \text{ 为单射}.$$

从微分流形的角度, 我们也可以说 A 是微分同胚当且仅当 A 是满秩的.

$\mathbb{R}^n$ 到自身的线性映射可用矩阵表示, 矩阵可看成 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的元素, 因而可以定义范数. 如果 $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为线性映射, 范数 $\|B\|<1$, 则 I_n-B 可逆, 其中 I_n 为单位矩阵. 事实上, 设 $(I_n-B)x=0$, 则

$$\|x\|=\|Bx\|\leqslant\|B\|\|x\|,\quad (1-\|B\|)\|x\|\leqslant 0.$$

即 $x=0$, I_n-B 为单射, 从而为线性同构.

定义 1.2.1 (映射的秩)**.** *设 $f:M\to N$ 为两个微分流形之间的 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $p\in M$, $q=f(p)\in N$. 分别取 p 附近的局部坐标系 (U,φ) 以及 q 附近的局部坐标系 (V,ψ), 令*

$$\mathrm{rank}_p f=\mathrm{rank}J(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

称为 f 在 p 处的秩.

请读者自行验证上述映射秩的定义与局部坐标系的选取无关, 是定义恰当的量. 下面的定理本质上就是多元函数的反函数定理.

定理 1.2.1 (逆映射定理)**.** 设 $f: M^n \to N^n$ 为微分流形之间的 C^k $(k \geqslant 1)$ 映射, 且 $\mathrm{rank}_p f = n$. 则存在 p 的开邻域 U 和 $q = f(p)$ 的开邻域 V, 使得 $f|_U : U \to V$ 为 C^k 的微分同胚.

证明. 因为要证明的是局部结果, 我们不妨假设 $M^n = N^n = \mathbb{R}^n$, $p = q = 0$. 通过复合一个可逆的线性映射, 我们也不妨假设 f 在原点的 Jacobian 为单位矩阵, 即 $Jf(0) = I_n$. 这时, 在原点附近 f 是恒同映射的小扰动, 扰动项可定义为

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由 $Jg(0) = 0$ 知存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$\|Jg(x)\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall\ x \in \overline{B_\epsilon(0)}.$$

由多元向量值函数的拟微分平均值定理, 有

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant \|Jg(\xi)\|\|x_1 - x_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall\ x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}.$$

设 $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_\epsilon(0). \tag{1.1}$$

这等价于在 $B_\epsilon(0)$ 中寻求 $g_y(x) = x + y - f(x)$ 的不动点. 我们利用压缩映像原理来找不动点. 首先有

$$\|g_y(x)\| \leqslant \|y\| + \|g(x)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \epsilon, \quad \forall\ x \in \overline{B_\epsilon(0)}. \tag{1.2}$$

这说明 $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset B_\epsilon(0)$. 映射 $g_y : \overline{B_\epsilon(0)} \to B_\epsilon(0) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ 为压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \ \forall\ x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}.$$

从而 (1.1) 在 $\bar{B}_\epsilon(0)$ 中有惟一的解, 记为 x_y. 由 (1.2) 知 $x_y \in B_\epsilon(0)$.

记 $U = f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)) \cap B_\epsilon(0)$, $V = B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$. 则上面的论述表明, $f|_U : U \to V$ 为一一的 C^k 映射, 其逆 $h(y) = x_y$ 满足方程

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{1.3}$$

我们有

(1) $h : V \to U$ 为连续映射: 当 $y_1, y_2 \in V$ 时

$$\begin{aligned}\|h(y_1) - h(y_2)\| &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|h(y_1) - h(y_2)\|.\end{aligned}$$

从而 $\|h(y_1)-h(y_2)\|\leqslant 2\|y_1-y_2\|$, 即 h 为 Lipschitz 连续映射.

(2) $h:V\to U$ 为可微映射: 设 $y_0\in V$, 则对 $y\in V$ 有

$$\begin{aligned}h(y)-h(y_0)&=(y-y_0)-[g(h(y))-g(h(y_0))]\\&=(y-y_0)-Jg(h(y_0))\cdot(h(y)-h(y_0))+o(\|h(y)-h(y_0)\|).\end{aligned}$$

由 (1) 就得到

$$[I_n+Jg(h(y_0))]\cdot(h(y)-h(y_0))=(y-y_0)+o(\|y-y_0\|),$$

即

$$h(y)-h(y_0)=[I_n+Jg(h(y_0))]^{-1}\cdot(y-y_0)+o(\|y-y_0\|).$$

(3) $h:V\to U$ 为 C^k 映射. 事实上, 由 (2) 知

$$Jh(y)=[I_n+Jg(h(y_0))]^{-1}=[Jf(h(y))]^{-1},\quad \forall\ y\in V.$$

由 f 为 C^k 映射及上式可依次提升 h 的可微次数, 最后就知道 h 为 C^k 映射. □

我们将利用逆映射定理来研究一些特殊映射的局部性态.

定义 1.2.2 (浸入, 嵌入和淹没)**.** *设 $f:M^m\to N^n$ 为微分流形之间的 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射. 如果 $\mathrm{rank}_p f\equiv m$, $\forall\ p\in M$, 则称 f 为 C^k 浸入 (immersion); 如果 f 为 C^k 浸入, 且 f 是从 M 到其像 $f(M)$ 上的同胚, 则称 f 为 C^k 嵌入 (embedding); 如果 $\mathrm{rank}_p f\equiv n$, $\forall\ p\in M$, 则称 f 为 C^k 淹没 (submersion).*

当我们不强调映射的可微次数时, 通常简称上述几种映射分别为浸入, 嵌入和淹没. 下面我们来举几个例子.

例 1.2.2. *不是单射的浸入.*

考虑映射 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$,

$$f(t)=(\cos t,\sin t),\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

易验证 $\mathrm{rank} f\equiv 1$, 因此 f 为光滑浸入. 显然, $f(\mathbb{R}^1)=S^1$, f 不是单射, 因此不是嵌入.

例 1.2.3. *单浸入, 但不是嵌入的例子.*

考虑映射 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$,

$$f(t)=(\frac{t^3+t}{t^4+1},\frac{t^3-t}{t^4+1}),\quad t\in\mathbb{R}.$$

f 为单射, 且 $\mathrm{rank} f\equiv 1$. 因此 f 为一个单浸入, 但它也不是嵌入, 因为 $f(\mathbb{R}^1)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, 双纽线为紧致子集.

例 1.2.4. 环面的嵌入.

考虑映射 $f: T^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta,\ (a + b\cos\phi)\sin\theta,\ b\sin\phi),\quad \theta, \phi \in [0, 2\pi].$$

f 为光滑嵌入, 其像为 $\mathbb{R}^3$ 中的轮胎面.

例 1.2.5. 标准嵌入.

设 $m \leqslant n$, 考虑映射 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^m) = (x^1, x^2, \cdots, x^m, 0, 0, \cdots, 0).$$

显然 f 为光滑嵌入.

例 1.2.6. 标准淹没.

设 $m \geqslant n$, 考虑映射 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^m) = (x^1, x^2, \cdots, x^n).$$

显然 f 为光滑淹没.

定理 1.2.2 (浸入的局部标准型). 设 $f: M^m \to N^n$ 为微分流形之间的浸入. 则对任意 $p \in M$, 存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ) 以及 $q = f(p)$ 附近的局部坐标系 (V, ψ), 使得 f 的局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ 形如例 1.2.5 中的映射, 即

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \cdots, x^m) = (x^1, x^2, \cdots, x^m, 0, 0, \cdots, 0).$$

证明. 因为要证明的是一个局部的结果, 如同逆映射定理的证明那样, 不妨设 $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $p = 0$, $q = 0$. 用分量形式表示映射 f 为

$$f(x) = (f_1(x^1, x^2, \cdots, x^m), f_2(x^1, x^2, \cdots, x^m), \cdots, f_n(x^1, x^2, \cdots, x^m)).$$

由假设, 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$$

秩为 m. 通过调整坐标次序, 我们可以假设矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$$

在 0 处非退化. 定义映射 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 如下

$$g(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (f_1, f_2, \cdots, f_m, f_{m+1} + x^{m+1}, f_{m+2} + x^{m+2}, \cdots, f_n + x^n).$$

在 0 处 g 的 Jacobian 形如

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{m\times m} & 0 \\ * & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

因而在原点处非退化. 由逆映射定理, 存在原点的开邻域 U' 及 V, 使得 $g|_{U'}: U' \to V$ 为微分同胚. 记 $g|_{U'}$ 之逆为 $\psi: V \to U'$, 则 (V, ψ) 为 $0 \in \mathbb{R}^n$ 附近的局部坐标系. 令

$$U = \{(x^1, x^2, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid (x^1, x^2, \cdots, x^m, 0, 0, \cdots, 0) \in U'\},$$

则 U 为 $0 \in \mathbb{R}^m$ 的局部坐标邻域, 于是 $f|_U : U \to V$ 有如下局部表示:

$$\begin{aligned} \psi \circ f:\ U \subset \mathbb{R}^m &\ \to\ U' \subset \mathbb{R}^n \\ (x^1, x^2, \cdots, x^m) &\ \mapsto\ \psi(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (x^1, x^2, \cdots, x^m, 0, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

这就证明了我们所要的结果. □

由浸入映射的局部标准型立即得到如下推论

推论 1.2.3. *微分流形之间的浸入映射在局部上必为嵌入.*

类似地, 我们也可以得到淹没的局部标准型.

定理 1.2.4 (淹没的的局部标准型)**.** *设 $f: M^m \to N^n$ 为微分流形之间的淹没. 则对任意 $p \in M$, 存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ) 以及 $q = f(p)$ 附近的局部坐标系 (V, ψ), 使得 f 的局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ 是标准的淹没, 即*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \cdots, x^m) = (x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n).$$

这个定理的证明同样是应用逆映射定理, 我们留给读者完成 (可参考下面关于常秩映射的内容), 这里仅罗列一个可以立即得到的推论.

推论 1.2.5. *微分流形之间的淹没映射必为开映射, 即将开集映为开集.*

定义 1.2.3 (子流形)**.** *设 M, N 为微分流形, 作为集合, $M \subset N$. 如果包含映射 $i: M \to N$ 为浸入, 则称 M 为 N 的浸入子流形或子流形; 如果包含映射 $i: M \to N$ 为嵌入, 则称 M 为 N 的正则子流形.*

我们要特别提醒读者注意的是, 浸入子流形的拓扑一般来说不是从母流形诱导而来的, 比如在例 1.2.2 中我们可以视双纽线为平面 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形, 但其拓扑不是 $\mathbb{R}^2$ 的子拓扑.

引理 1.2.6. *设 M, N 为微分流形, $f: M \to N$ 为单的浸入映射. 在 $f(M)$ 上通过 f 定义一个微分结构, 使得 $f: M \to f(M)$ 为微分同胚, 则 $f(M)$ 为 N 的浸入子流形. 如果进一步, f 为嵌入, 则 $f(M)$ 为 N 的正则子流形.*

证明. 记 $i: f(M) \to N$ 为包含映射. 考虑复合映射

$$f: M \to f(M) \xrightarrow{i} N,$$

由于 $f: M \to f(M)$ 为微分同胚, 故 $i: f(M) \to N$ 为单浸入, 从而 $f(M)$ 为浸入子流形. 如果 $f: M \to N$ 为嵌入, 则 $i: f(M) \to N$ 为嵌入, 从而 $f(M)$ 为正则子流形. $\square$

根据这个引理, 当 $f: M \to N$ 为单浸入时, 我们也称 M 为 N 的浸入子流形; 而当 $f: M \to N$ 为嵌入时, 我们也称 M 为 N 的正则子流形.

定理 1.2.7 (正则子流形的结构). *微分流形 M^m 为 N^n 的正则子流形 $\Longleftrightarrow$ M 为 N 的子拓扑空间, 且对任意 $p \in M$, 存在 N 中含有 p 的局部坐标邻域 U 和坐标映射 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$, 使得*

$$M \cap U = \{q \in U \,|\, x^i(q) = 0,\ m+1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

证明. ($\Longrightarrow$) 设 M 为 N 的正则子流形, 则包含映射 $i: M \to N$ 为嵌入. 由嵌入的定义即知 M 的流形拓扑和它从 N 诱导的子拓扑一致. 根据浸入的局部标准型, 任给 $p \in M$, 在 M 和 N 上分别存在含 p 的局部坐标邻域 (U_1, φ) 和 (V_1, ψ), 使得 $U_1 \subset V_1$, 且

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1}: \ \varphi(U_1) \subset \mathbb{R}^m \quad &\to \quad \psi(V_1) \subset \mathbb{R}^n \\ (x^1, x^2, \cdots, x^m) \quad &\mapsto \quad (x^1, x^2, \cdots, x^m, 0, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

映射 ψ 用分量表示为 $\psi(q) = (x^1(q), x^2(q), \cdots, x^n(q))$, $q \in V_1$. 令

$$U' = \{q \in V_1 \,|\, (x^1(q), x^2(q), \cdots, x^m(q)) \in \varphi(U_1)\} \subset V_1,$$

因为 M 为 N 的子拓扑空间, 故我们可取 N 中含有 p 的开邻域 $U \subset U'$, 使得

$$M \cap U \subset U_1.$$

我们把 V_1 上的坐标映射限制到 U 上作为 U 上的坐标映射. 当 $q \in M \cap U$ 时, $q \in U_1$. 根据 U_1 和 V_1 的选取, $x^i(q) = 0$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. 即

$$M \cap U \subset \{q \in U \,|\, x^i(q) = 0,\ m+1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

另一方面, 设 $q \in U$, 且 $x^i(q) = 0$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. 由 $U \subset U'$ 知

$$(x^1(q), x^2(q), \cdots, x^m(q)) \in \varphi(U_1).$$

记 $q'=\varphi^{-1}(x^1(q),x^2(q),\cdots,x^m(q))\in U_1$, 则

$$\begin{aligned}\psi(q')&=\psi\circ\varphi^{-1}(x^1(q),x^2(q),\cdots,x^m(q))\\&=(x^1(q),x^2(q),\cdots,x^m(q),0,0,\cdots,0)\\&=(x^1(q),x^2(q),\cdots,x^m(q),x^{m+1}(q),x^{m+2}(q),\cdots,x^n(q))\\&=\psi(q).\end{aligned}$$

这说明 $q=q'\in U_1\subset M$, 即

$$\{q\in U\,|\,x^i(q)=0,\ m+1\leqslant i\leqslant n\}\subset M\cap U.$$

这就得到了欲证等式的证明.

($\Longleftarrow$) 如果 M 满足题设, 则首先在 M 取子拓扑, 其次把 $M\cap U$ 上的局部坐标取为 N 在 U 上局部坐标的前 m 个分量, 则容易验证 M 为微分流形, 且 M 到 N 的包含映射为嵌入. □

下面的定理给出了一大类正则子流形的构造方法.

定理 1.2.8 (常秩映射). *设 $f:M^m\to N^n$ 为微分流形之间的光滑映射. 如果存在常数 l, 使得 $\mathrm{rank}_pf=l$, $\forall\ p\in M$, 则对每个固定的 $q\in N$, q 在 f 下的原像*

$$f^{-1}(q)=\{p\in M\,|\,f(p)=q\}$$

要么为空集, 要么为 M 的正则子流形, 其维数为 $m-l$.

证明. 记 $S=f^{-1}(q)$, 设 S 不是空集, $p\in S$. 我们将证明存在 p 附近在 M 上的局部坐标系 (U,φ) 以及 q 附近在 N 上的局部坐标系 (V,ψ), 使得 $\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^m$, $\psi(q)=0\in\mathbb{R}^n$, $f(U)\subset V$, 且 f 的局部表示 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 形如

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,x^2,\cdots,x^m)=(x^1,x^2,\cdots,x^l,g^{l+1}(x^1,x^2,\cdots,x^l),\cdots,g^n(x^1,x^2,\cdots,x^l)).$$

这个等式的证明和前面浸入映射的标准型的证明类似, 不妨设 $M=\mathbb{R}^m$, $N=\mathbb{R}^n$, $p=0\in\mathbb{R}^m$, $q=0\in\mathbb{R}^n$. f 用分量表示为

$$f(x^1,x^2,\cdots,x^m)=(f_1(x^1,x^2,\cdots,x^m),\cdots,f_n(x^1,x^2,\cdots,x^m)).$$

由假设, 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$$

秩为 l. 通过调整坐标次序, 不妨设矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant l\\1\leqslant j\leqslant l}}$$

在原点非退化. 定义映射 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为

$$g(x^1,x^2,\cdots,x^m)=(f_1,f_2,\cdots,f_l,\ x^{l+1},\cdots,x^m).$$

g 在原点处的 Jacobian 形如

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{l\times l} & * \\ 0 & I_{m-l}\end{bmatrix}$$

因而在原点是非退化的. 由逆映射定理, 存在 $0\in\mathbb{R}^m$ 的开邻域 U 和 V 使得 $g|_U:U\to V$ 为微分同胚, 不妨设 V 为凸邻域, 记 $g|_U$ 为 φ, 则 φ 为 $p=0$ 附近的局部坐标映射. 在此局部坐标映射下, f 的局部表示 $f\circ\varphi^{-1}$ 形如

$$f\circ\varphi^{-1}(x^1,x^2,\cdots,x^m)=(x^1,x^2,\cdots,x^l,\ g^{l+1},\cdots,g^n),$$

其中 g^i $(l+1\leqslant i\leqslant n)$ 为 $(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 的函数. 由 $\mathrm{rank}J(f\circ\varphi^{-1})|_V\equiv l$ 知

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j}=0,\quad \forall\ l+1\leqslant i\leqslant n,\ l+1\leqslant j\leqslant m.$$

由 V 为凸域知

$$g^i=g^i(x^1,x^2,\cdots,x^l),\quad l+1\leqslant i\leqslant n.$$

从而有

$$\begin{aligned}S\cap U&=\{s\in U\,|\,f(s)=0\}\\&=\{s\in U\,|\,x^1(s)=\cdots=x^l(s)=0,\\&\qquad g^{l+1}(x^1(s),\cdots,x^l(s))=\cdots=g^n(x^1(s),\cdots,x^l(s))=0\}\\&=\{s\in U\,|\,x^1(s)=\cdots=x^l(s)=0\}\end{aligned}$$

由正则子流形的结构定理即知 S 为 M 的正则子流形, 且维数为 $m-l$. □

注. 由定理的证明知, 只要在 $f^{-1}(q)$ 的某个开邻域内 $\mathrm{rank}f$ 为常数就可以说明 $f^{-1}(q)$ 为正则子流形. 因为矩阵在微扰之下秩不会变小, 因此当 $\mathrm{rank}f$ 在 $f^{-1}(q)$ 上恒为 n 时, $\mathrm{rank}f$ 在 $f^{-1}(q)$ 的开邻域内也恒为 n, 因而 $f^{-1}(q)$ 是维数为 $m-n$ 的正则子流形, 此时我们称 q 为 f 的正则值. 为了方便起见, 当 $f^{-1}(q)$ 为空集时也说 q 为正则值.

例 1.2.7. 二次型决定的超曲面.

设 A 为非退化的 $n+1$ 阶实对称矩阵, 其二次型定义了一个光滑函数 φ_A:

$$\varphi_A(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})=\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}x^ix^j,$$

当 $s\neq0$ 时, $\varphi_A^{-1}(s)$ 要么为空集, 要么为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中维数为 n 的正则子流形 (超曲面). 例如, n 维球面就可以通过取 A 为单位矩阵得到.

例 1.2.8. 特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$.

我们将 n 阶实方阵看成 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的点, n 阶实方阵全体 $M_{n\times n}$ 等同于 $\mathbb{R}^{n^2}$, 考虑函数 $f: M_{n\times n}\to\mathbb{R}$, $f(A)=\det A$. 根据行列式的定义, f 为光滑映射. 我们来说明 $\mathrm{rank} f$ 在 $SL(n,\mathbb{R})=f^{-1}(1)$ 上秩为 1. 事实上, 记 E_{ij} $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 为在 (i,j) 位置为 1, 其它位置为 0 的 n 阶方阵, E_{ij} 可视为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的一个单位向量, 沿 E_{ij} 求多元函数 f 的偏导数如下:

$$\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(A)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det(A+tE_{ij})=A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是矩阵 A 在 (i,j) 位置的代数余子式. 因此, 如果 $\det A\neq 0$, 则上述偏导数不全为零. 特别地, f 在 $SL(n,\mathbb{R})$ 上秩为 1, 因而 $SL(n,\mathbb{R})$ 是维数为 n^2-1 的正则子流形.

例 1.2.9. 一类二维曲面.

考虑光滑映射 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=(x^2+y^2)^2+z^2$. 显然, 当 $p\neq 0$ 时, $\mathrm{rank}_p F=1$. 因此当 $r>0$ 时, $S_r=F^{-1}(r^2)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中正则子流形. 请读者自行验证所有的 S_r 都和 2 维球面 S^2 微分同胚.

习题 1.2

1. 叙述隐函数定理, 并用逆映射定理证明之.
2. 双纽线能成为 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形吗? 说明你的理由.
3. 说明 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^2(x+1)\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形, 并画出它的图像.
4. 设 α 为正无理数, 考虑映射 $f:\mathbb{R}^1\to S^1\times S^1$, $f(t)=(e^{i2\pi t},\ e^{i2\pi\alpha t})$. 证明 f 为单浸入, 且其像在 $S^1\times S^1$ 中稠密; 推广这个结果, 证明存在单浸入 $f:\mathbb{R}^1\to T^n$, 使得 $f(\mathbb{R}^1)$ 在 T^n 中稠密.
5. S^n 能否嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中?
6. 通过把平面上的一个圆周绕某个坐标轴旋转得到 2 维环面到 $\mathbb{R}^3$ 的嵌入. 推广这一过程, 证明 n 维环面均可嵌入到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中.
7. 证明, C^k 映射限制到正则子流形上仍为 C^k 映射.
8. 设 $f:M\to N$ 为微分流形之间的光滑映射, 证明 f 的图像

   $$\Gamma_f=\{(p,q)\in M\times N \mid f(p)=q\}$$

   为乘积流形 $M\times N$ 的正则子流形.

9. 设 $f: M \to M$ 为微分流形到自身的光滑映射, 且 $f \circ f = f$. 证明, 如果 M 连通, 则 $f(M)$ 为 M 的正则子流形.

10. 在关于常秩映射的定理中, 进一步证明在适当的局部坐标系中, f 的局部表示形如

$$(x^1, x^2, \cdots, x^m) \mapsto (x^1, x^2, \cdots, x^l, 0, 0, \cdots, 0).$$

这个结果称为**秩定理** (Rank Theorem).

11. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中如下集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid [y^2 + x(x-1)]^2 + z^2 = r^2\},$$

证明, 当 $r > 0$ 充分小时, 上面的集合为正则子流形, 且微分同胚于 T^2. 一般地, 设 $g > 1$, 令

$$P_g(x) = x(x-1)^2(x-2)^2 \cdots (x-g+1)^2(x-g),$$

P_g 是关于 x 的次数为 $2g$ 的多项式. 试说明当 $r > 0$ 充分小时,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^2 + P_g(x))^2 + z^2 = r^2\}$$

为紧致连通的正则子流形.

§1.3 单位分解

在前一节中, 通过研究映射的局部性态我们可以得到微分流形的许多例子, 特别是在欧氏空间中可以构造丰富的例子. 通过继续研究一类特殊的映射, 本节将说明任何抽象的微分流形都可以视为欧氏空间中的正则子流形. 我们要用到的工具是所谓的单位分解, 即把 1 这个常值函数分解为若干光滑函数的和, 要求这些光滑函数分别只在指定的开集内不为零. 我们先从一个例子开始.

例 1.3.1. 一个特殊的光滑函数.

考虑一元函数 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

这个函数在整个 $\mathbb{R}$ 上都是光滑函数: 只要归纳地在 0 处计算 $e^{-\frac{1}{x}}$ 的各阶右导数, 发现它们均为零即可.

从这个例子出发, 下面我们来构造一些特殊的光滑函数.

引理 1.3.1 (鼓包函数)**.** (1) 在 $\mathbb{R}^1$ 上存在光滑函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$h(x)=0,\ \forall\ |x|\geqslant 1;\ h(x)\in(0,1],\ \forall\ x\in(-1,1);\ h(x)=1,\ \forall\ x\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}].$$

(2) 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在光滑函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)=0,\ \forall\ \|x\|\geqslant 1;\ f(x)\in(0,1],\ \forall\ \|x\|<1;\ f(x)=1,\ \forall\ \|x\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

证明. (1) 设 φ 为第一例中的光滑函数, 令 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(1-x)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

则 g 也是光滑函数, 且

$$x\leqslant 0\ 时\ g(x)=0;\ 0<x<1\ 时\ g(x)>0;\ x\geqslant 1\ 时\ g(x)=1.$$

再令 $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$g_1(x)=g(2x+2),\ x\in\mathbb{R},$$

则 g_1 为光滑函数, 且

$$x\leqslant -1\ 时\ g_1(x)=0;\ -1<x<-\frac{1}{2}\ 时\ g_1(x)>0;\ x\geqslant -\frac{1}{2}\ 时\ g_1(x)=1.$$

最后, 令 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$h(x)=g_1(|x|)=\begin{cases}g_1(x), & x\leqslant 0\\ g_1(-x), & x>0\end{cases}$$

则 h 即为所求光滑函数.

(2) 令 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=h(\|x\|),\ x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 h 为 (1) 中光滑函数, $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准范数. 注意到在原点附近 f 恒为 1, 故 f 为整个 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数, 且满足我们的要求. □

这个引理中的光滑函数的特点是只在某个开邻域上非零, 这样的函数有时也称为截断函数. 我们回忆一下函数支集的定义: 设 $\varphi(x)$ 为 M 上的实函数, 令

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x\in M\mid\varphi(x)\neq 0\}},$$

称 $\operatorname{supp}\varphi$ 为函数 φ 的支集, 函数在其支集外为零.

下面我们引入单位分解的概念, 在此之前我们再回忆一下局部有限这个概念: 给定拓扑空间上的子集族 $\{A_\alpha\}$, 如果对于拓扑空间中的任意一点, 均存在这个点的一个开邻域, 使得此开邻域只和有限个 A_α 有非空交, 则称 $\{A_\alpha\}$ 为局部有限的子集族.

定义 1.3.1 (单位分解). 设 $\{U_\alpha\}$ 为微分流形 M 的开覆盖. 如果存在至多可数的光滑函数族 $\{g_i : M \to \mathbb{R}\}$ 满足以下条件

(1) $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1,\ \forall\ x \in M$;

(2) 对每一个 g_i, 均存在 $\alpha(i)$, 使得 $\operatorname{supp} g_i \subset U_{\alpha(i)}$;

(3) $\{\operatorname{supp} g_i\}$ 为 M 上的局部有限子集族;

(4) $\sum\limits_i g_i(x) \equiv 1,\ \forall\ x \in M$.

则称为 $\{g_i\}$ 为从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的一个单位分解.

下面我们说明微分流形上的单位分解总是存在的.

引理 1.3.2 (穷竭). 对于任何微分流形, 均存在一列开集 G_i, 使得 $\bar{G}_i$ 都是紧致的, 且

$$\bar{G}_i \subset G_{i+1},\ i \geqslant 1;\ \ \bigcup_i G_i = M.$$

证明. 如果流形 M 是紧致的, 则没有什么需要证的. 一般地, 任给 $x \in M$, 我们取包含 x 的局部坐标邻域 V_x, 使得 $\bar{V}_x$ 是紧致的. 由于 M 具有可数的拓扑基, 根据点集拓扑学中的 Lindelöf 引理, 存在至多可数个 x_i, 使得 $\{V_{x_i}\}$ 为 M 的开覆盖. 下面我们递归地定义开集 G_i. 首先, 令 $G_1 = V_{x_1}$. 假设 $G_1, G_2, \cdots, G_i$ 均已定义好, 则考虑紧致集合 $\bigcup\limits_{k \leqslant i} \bar{G}_i$, 必定存在 I, 使得

$$\bigcup_{k \leqslant i} \bar{G}_i \subset \bigcup_{j \leqslant I} V_{x_j},$$

令 $G_{i+1} = \bigcup\limits_{j \leqslant I} V_{x_j}$, 不难看出 $\{G_i\}$ 即为满足要求的一列开集. □

定理 1.3.3 (单位分解的存在性). 对于微分流形 M 的任何开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 均存在从属于它的单位分解.

证明. 设 G_i 为上一个引理中的一列开集 (穷竭), 令 $A_i = \bar{G}_i - G_{i-1}$ $(G_0 = \varnothing)$. A_i 为紧致闭集, 且 $\{A_i\}$ 为 M 的一个覆盖. 固定一个 A_i, 任给 $x \in A_i$, 选取 x 的局部坐标系 (U_x, φ_x), 使得

(1) $\varphi_x(U_x) = B_2(0)$;

(2) 存在 $\alpha(x)$, 使得 $U_x \subset U_{\alpha(x)}$;

(3) $U_x \cap A_j = \varnothing,\ \forall\ |j - i| > 1$.

设 f 为引理 1.3.1 中定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的鼓包函数, 定义函数 $f_x : M \to \mathbb{R}$ 为

$$f_x(p) = \begin{cases} f(\varphi_x(p)), & p \in U_x, \\ 0, & p \in M - U_x. \end{cases}$$

显然 f_x 为 M 上的光滑函数. 令 $V_x=\varphi_x^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))$, 则 $f_x(p)=1, \forall\, p\in V_x$. 由于 A_i 是紧致集合, 故存在 A_i 中的有限个点 $x_1^i, x_2^i, \cdots, x_{k(i)}^i$, 使得

$$A_i\subset\bigcup_{j\leqslant k(i)} V_{x_j^i}.$$

根据上面局部坐标邻域的选取我们知道, $\{\mathrm{supp} f_{x_j^i}\}$ 是局部有限的, 因此和函数

$$\psi(x)=\sum_{j\leqslant k(i)} f_{x_j^i}$$

为 M 上定义好的光滑函数, 并且在 M 上恒为正. 从而 $\{f_{x_j^i}\psi^{-1}\}$ 为所求的从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. □

注. 从上面的证明可以看出, 我们构造的单位分解中的光滑函数的支集都是紧致的. 另外, 我们找到的开覆盖 $\{U_{x_j^i},\ j\leqslant k(i)\}$ 是开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的一个局部有限的加细 (fine). 记 $\Gamma'=\{\alpha(x_j^i),\ j\leqslant k(i)\}$, 当 $\alpha\in\Gamma'$ 时, 令

$$g_\alpha=\sum_{\alpha(x_j^i)=\alpha} f_{x_j^i}\psi^{-1},$$

当 $\alpha\notin\Gamma'$ 时, 令 $g_\alpha=0$. 则 $\{g_\alpha\}$ 为 M 上的光滑函数族, $0\leqslant g_\alpha\leqslant 1$, $\sum\limits_\alpha g_\alpha=1$, 且 $\mathrm{supp} g_\alpha\subset U_\alpha$. 有时也称 $\{g_\alpha\}$ 为从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 (广义) 单位分解.

下面来介绍单位分解的一些初步的应用.

定理 1.3.4 (Whitney)**.** *任意紧致微分流形 M^n 均可嵌入到某个欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中.*

证明. 因为 M 是紧致的, 故象证明单位分解的存在性那样, 我们可取 M 的有限个局部坐标系 $\{(U_i,\varphi_i), 1\leqslant i\leqslant k\}$, 使得 $\varphi_i(U_i)=B_2(0)$, 且 $\{V_i=\varphi_i^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))\}$ 为 M 的开覆盖. 如前那样, 在 M 上定义光滑函数 f_i, 使得

$$f_i|_{V_i}\equiv 1,\ \ \mathrm{supp} f_i\subset\varphi_i^{-1}(B_1(0)).$$

定义 $F: M\to\mathbb{R}^{kn}\times\mathbb{R}^k$ 为

$$F(x)=(f_1(x)\varphi_1(x), f_2(x)\varphi_2(x),\cdots, f_k(x)\varphi_k(x), f_1, f_2,\cdots, f_k),$$

其中, 通过零延拓, 我们将 $f_i\varphi_i$ 视为 M 上的光滑函数.

(1) F 为单射. 事实上, 如果 $F(x)=F(y)$, 则 $f_i(x)=f_i(y)$, $1\leqslant i\leqslant k$. 设 $x\in V_i$, 则 $f_i(x)=1$, 从而 $f_i(y)=f_i(x)=1$, 因此由 $f_i(x)\varphi_i(x)=f_i(y)\varphi_i(y)$ 知 $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$, 即 $x=y$.

(2) F 的 Jacobian 非退化. 事实上, 由于在 V_i 上 f_i 恒为 1, 故由 F 的定义即知 F 在 V_i 上为嵌入.

现在我们得到了从 M 到 $\mathbb{R}^N$, $N = k(n+1)$ 的一个单的浸入 F, 由于 M 为紧致流形, 容易知道此时的单浸入 F 必为嵌入. □

注. 在 F 的定义中, 可以把 F 的最后 k 个坐标取为从属于 $\{V_i\}$ 的单位分解, 这样可以将 M 嵌入到 $k(n+1)-1$ 维欧氏空间中. 一般地, 如果流形 M 能被有限个局部坐标邻域覆盖, 则根据上面的构造, M 可以单浸入到欧氏空间中. 事实上, 可以证明, 任何 n 维微分流形必定可以被至多 $n+1$ 个局部坐标邻域所覆盖, 因而可以单浸入到欧氏空间中. 不过 Whitney 在 1944 年就已证明任何 n 维光滑流形均可嵌入到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中.

命题 1.3.5 (光滑延拓)**.** *(1) 设 A 为微分流形 M 上的闭集, 如果 U 为 A 的开邻域, 则存在光滑函数 $\phi : M \to \mathbb{R}$, 使得 $\phi|_A \equiv 1$, $\mathrm{supp}\phi \subset U$;*

(2) 设 B 为 M 的子集, $f : B \to \mathbb{R}$ 为实函数. 如果对任意 $x \in B$, 均存在开邻域 U_x, 以及光滑函数 $f_x : U_x \to \mathbb{R}$, 使得 $f_x|_{B\cap U_x} = f|_{B\cap U_x}$, 则存在 B 的开邻域 V 以及光滑函数 $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$, 使得 $\tilde{f}|_B = f$.

证明. (1) 考虑 M 的开覆盖 $\{U, M-A\}$, 设 $\{\phi, \psi\}$ 为从属于它的单位分解, 则由 $\mathrm{supp}\psi \subset M - A$ 知 $\psi|_A = 0$, 从而 $\phi|_A = 1$. ϕ 就是欲求的函数.

(2) 考虑 $V = \bigcup_{x\in B} U_x$, $\{U_x, x \in B\}$ 为 V 的开覆盖, 设 $\{g_i\}$ 为从属它的单位分解. 对每个 i 取定 $x_i \in B$, 使得 $\mathrm{supp}g_i \subset U_{x_i}$. 则 $g_i f_{x_i}$ 可零延拓为 V 上的光滑函数, 令

$$\tilde{f}(x) = \sum_i g_i(x) f_{x_i}(x), \ x \in V.$$

则 $\tilde{f}$ 即为所求函数. □

延拓定理中的 (2) 对于映射也成立, 特别地有

命题 1.3.6. *设 M 为 N 的闭正则子流形, $f : M \to S$ 为光滑映射, 则存在 N 上的光滑映射 $\tilde{f} : N \to S$, 使得 $\tilde{f}|_M = f$.*

证明. 根据正则子流形的结构定理, M 上的光滑映射总是可以做局部光滑延拓, 因而最后可以延拓到 N 上. □

设 $f_0, f_1 : X \to Y$ 为拓扑空间 X, Y 之间的连续映射, 如果存在连续映射 $F : X \times [0,1] \to Y$ 使得

$$F(x,0) = f_0(x), \ F(x,1) = f_1(x), \ \forall\, x \in X,$$

则称 f_0 和 f_1 是同伦的, F 是 f_0 和 f_1 之间的同伦.

命题 1.3.7 (同伦的光滑化)**.** 设 $f_0, f_1 : M \to N$ 是微分流形之间同伦的光滑映射, 则存在光滑映射 $F : M \times \mathbb{R} \to N$, 使得

$$F(x,t) = f_0(x),\ \forall\ x \in M,\ t \leqslant 0;\ F(x,t) = f_1(x),\ \forall\ x \in M,\ t \geqslant 1.$$

证明. 略. □

命题 1.3.8 (光滑逼近)**.** 设 $f : M \to \mathbb{R}^k$ 为微分流形 M 上的连续映射, 则任给 M 上的正连续函数 $\epsilon : M \to \mathbb{R}$, 存在光滑映射 $g : M \to \mathbb{R}^k$, 使得

$$\|g(x) - f(x)\| \leqslant \epsilon(x),\ \forall\ x \in M.$$

证明. 由 f, ϵ 的连续性知, 任给 $x \in M$, 存在 x 的开邻域 U_x, 使得

$$\epsilon(y) \geqslant \frac{1}{2}\epsilon(x),\ \forall\ y \in U_x;\quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\epsilon(x),\ \forall\ y \in U_x.$$

取从属于开覆盖 $\{U_x, x \in M\}$ 的单位分解 $\{g_i\}$, 对每个 i, 取 $x_i \in M$, 使得 $\operatorname{supp} g_i \subset U_{x_i}$. 定义 M 上的光滑映射 $g : M \to \mathbb{R}^k$ 如下

$$g(x) = \sum_i g_i(x) f(x_i),\ x \in M.$$

则有

$$\begin{aligned}
\|g(x) - f(x)\| &\leqslant \sum_i g_i(x) \|f(x_i) - f(x)\| \\
&= \sum_{g_i(x) \neq 0} g_i(x) \|f(x_i) - f(x)\| \\
&\leqslant \sum_{g_i(x) \neq 0} g_i(x) \cdot \frac{1}{2}\varepsilon(x_i) \\
&\leqslant \sum_{g_i(x) \neq 0} g_i(x) \cdot \varepsilon(x) = \epsilon(x).
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\sum_i g_i = 1$. □

命题 1.3.9. 设 $f : M \to N$ 为微分流形之间的连续映射, 则存在光滑映射 $g : M \to N$, 使得 g 和 f 同伦.

证明. 略. □

对于一个连续映射, 如果紧致集的原像仍为紧致的, 则称该连续映射是逆紧 (proper) 的.

命题 1.3.10 (逆紧函数的存在性)**.** 微分流形上总存在光滑的逆紧函数.

证明. 设 M 为微分流形, 取其局部坐标覆盖 $\{U_i\}$, 使得 $\bar{U}_i$ 是紧致的. 设 $\{g_i\}$ 为从属于 $\{U_i\}$ 的广义单位分解, 令 $\rho: M \to \mathbb{R}$ 为

$$\rho(x) = \sum_i i g_i(x), \ x \in M.$$

跟据单位分解的性质, ρ 为定义好的光滑函数. 如果 $g_i(x) = 0$, $i < k$, 则

$$\rho(x) = \sum_i i g_i(x) = \sum_{i \geqslant k} i g_i(x) \geqslant k \sum_{i \geqslant k} g_i(x) = k.$$

这说明

$$\rho^{-1}[0,k] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in M \mid g_i(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bar{U}_i,$$

即紧致集在 ρ 的原像下是紧致的. 这就证明了光滑逆紧函数的存在性. □

注. 如果 $\rho: M \to \mathbb{R}$ 为逆紧光滑函数, 则 $G_i = \rho^{-1}(-i, i)$ 组成了 M 的穷竭.

习题 1.3

1. 令 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \in \mathbb{R} - (a,b). \end{cases}$$

证明 f 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数.

2. 设 h 是 $\mathbb{R}$ 上我们所得到的鼓包函数. 任取一列实数 $\{a_n,\ n \geqslant 0\}$, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(\xi_n x)}{n!} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $\xi_n = n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. 证明 f 为光滑函数, 且

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad n \geqslant 0.$$

3. 设 $\{A_\alpha\}$ 为 M 上局部有限子集族, 则 $\{\bar{A}_\alpha\}$ 也是局部有限的, 并且

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \bar{A}_\alpha.$$

4. 设 A, B 为 M 上的闭集, 且 $A \cap B = \varnothing$, 则存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 使得

$$f|_A \equiv 1, \quad f|_B \equiv 0.$$

5. 设 A 为 M 上的闭集, 则存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 使得

$$\{x \in M \mid f(x) = 0\} = A.$$

6. 设 $\{U_\alpha\}$ 为 M 上局部有限的开覆盖, $\epsilon_\alpha > 0, \forall\, \alpha$. 则对任意连续映射 $f: M \to \mathbb{R}^k$, 存在光滑映射 $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}^k$ 使得

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\| < \epsilon_\alpha, \quad \forall\, x \in U_\alpha.$$

7. 设 $f: M \to N$ 为单浸入, 如果 f 是逆紧的, 则 f 为嵌入.

8. 设微分流形 M 可以单浸入到欧氏空间中, 则 M 一定也可以嵌入到欧氏空间中.

9. 证明, 连通的微分流形必有连通的穷竭族, 即穷竭中的开集可以取为连通的.

§1.4 切空间和切映射

研究映射的一个办法就是对其做线性化, 这就是微分的思想. 在此之前, 我们还得对空间进行线性化. 对于微分流形, 线性化以后的对象就是切空间, 这是一个和流形本身维数相等的向量空间. 我们先从切向量的定义开始.

定义 1.4.1 (切向量)**.** *记 $C^\infty(M)$ 为微分流形 M 上光滑函数的全体组成的向量空间. 设 $p \in M$, 如果线性映射 $X_p: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件*

$$X_p(fg) = f(p)X_pg + g(p)X_pf, \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M),$$

则称 X_p 为 M 在 p 处的切向量. 切向量的全体组成的向量空间称为 p 处的切空间, 记为 T_pM.

根据定义, 切向量作用在常值函数上为零. 切向量作用在函数上就如同多元函数沿一个方向求方向导数. 我们知道, 一个函数在某一点的导数只跟它在这一点附近的值有关. 对于切向量的作用来说, 这一点也是对的.

引理 1.4.1. *设 f, g 为光滑函数, 且在 p 的一个开邻域中 $f = g$. 则对任意的切向量 X_p, 均有*

$$X_pf = X_pg.$$

证明. 令 $h = f - g$, 只要证明 $X_ph = 0$ 即可. 由假设, h 在 p 的邻域 U_p 内恒为零, 我们取 M 上的光滑函数 φ, 使得 $\varphi(p) = 1$, $\mathrm{supp}\varphi \subset U_p$, 则显然 $\varphi h \equiv 0$. 于是

$$0 = X_p(\varphi h) = \varphi(p)X_ph + h(p)X_p\varphi = X_ph.$$

这就证明了引理. □

根据这个引理, 切向量也可以作用于局部光滑函数上: 设 f 是在 p 附近有定义的光滑函数, 把 f 延拓为 M 上的光滑函数 $\tilde{f}$, 使得在 p 附近 $\tilde{f}=f$, 则定义 $X_pf=X_p\tilde{f}$, 这个定义和 f 的延拓无关.

设 (U,φ) 为 p 附近的局部坐标系, $\{x^i\}_{i=1}^n$ 为坐标函数, 我们现在在 p 处定义 n 个切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 如下:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_pf=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$

其中 f 是 M 上的任意光滑函数 (只要在 p 附近 C^1 就可以). 容易验证这样定义的 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ 满足切向量的要求. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_px^j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

故 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 在 T_pM 中线性无关. 我们有

命题 1.4.2. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1}^n$ 为 T_pM 的一组基, 特别地, T_pM 是维数为 $\dim M$ 的有限维向量空间.

证明. 只要证明任何切向量 X_p 均可由 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1}^n$ 张成即可. 事实上, 下面我们证明

$$X_p=\sum_{i=1}^n(X_px^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

记 $x=\varphi(q)\in\varphi(U)$, $a=\varphi(p)$, 则

$$\begin{aligned}f(q)=f\circ\varphi^{-1}(x)&=f\circ\varphi^{-1}(a)+\int_0^1[\frac{d}{dt}f\circ\varphi^{-1}(a+t(x-a))]dt\\&=f\circ\varphi^{-1}(a)+\sum_{i=1}^n(x^i-a^i)g_i(x),\end{aligned}$$

其中,

$$g_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(a+t(x-a))dt.$$

g_i 仍为光滑函数, 且

$$g_i(a)=\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(a)=\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_pf.$$

由切向量的定义, 有

$$X_pf=X_p(\sum_{i=1}^n(x^i-a^i)g_i(x))=\sum_{i=1}^n(X_px^i)g_i(a)=\sum_{i=1}^n(X_px^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_pf,$$

这个等式对任何 f 都成立, 因此这就证明了 X_p 可由 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1}^n$ 张成. □

注意, 在上面的证明过程中, 函数 g_i 仍具有光滑性, 这只对于光滑流形成立. 因此, 对于 C^1 的微分流形, 我们不能象上面一样证明切空间的维数有限性. 为此此我们再从别的角度考察一下切空间.

首先, 如果 (U,φ), (V,ψ) 均为 p 附近的局部坐标系, 坐标函数分别记为 x^i 与 y^j, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 坐标转换映射 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 的分量记为 f_i, $1\leqslant i\leqslant n$. 则由刚才证明的命题, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^j}|_p &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^j}|_p(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y^j}(\psi(p))\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,\end{aligned}$$

写成向量的形式为

$$(\frac{\partial}{\partial y^1}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}|_p) = (\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)\cdot J(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(p)),$$

这是 T_pM 的基的变换公式. 因此, 如果 $X_p\in T_pM$, 在这两组基下分别表示为

$$\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial y^j}|_p = X_p = \sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,\quad a^i,b^j\in\mathbb{R},$$

则其系数满足如下转换关系

$$(a^1,\cdots,a^n)^T = J(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(p))(b^1,\cdots,b^n)^T,$$

或

$$(b^1,\cdots,b^n)^T = J(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(a^1,\cdots,a^n)^T.$$

这些转换公式也可以用来给出切向量和切空间的一种等价定义.

切向量和切空间也可以用流形上的光滑曲线来定义. 设 $p\in M$, 一条经过 p 的光滑曲线是指光滑映射 $\sigma:(-a,a)\to M$, 使得 $\sigma(0)=p$. 定义 $\sigma'(0)\in T_pM$ 如下:

$$\sigma'(0)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[f\circ\sigma(t)],\quad \forall\ f\in C^\infty(M).$$

容易验证 $\sigma'(0)$ 为 p 处的切向量, 称为 σ 的初始切向量, 也记为 $\dot\sigma(0)$.

在局部坐标系 (U,φ) 中, σ 可局部表示为

$$\varphi\circ\sigma(t) = (x^1\circ\sigma(t),\cdots,x^n\circ\sigma(t)),\quad t\in(-a,a).$$

则

$$\begin{aligned}\sigma'(0)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[f\circ\sigma(t)] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[f\circ\varphi^{-1}(x^1\circ\sigma(t),\cdots,x^n\circ\sigma(t))]\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(p)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x^i\circ\sigma(t)).\end{aligned}$$

因此 $\sigma'(0)$ 可以表示为

$$\sigma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x^i \circ \sigma(t))\frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

反之, 任给 p 处的切向量 X_p, 设 $X_p = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 不妨设 $\varphi(p) = 0$, 则 $\sigma(t) = \varphi^{-1}(a^1 t, a^2 t, \cdots, a^n t)$ 就是经过 p 的光滑曲线, 且 $\sigma'(0) = X_p$.

利用上面的叙述, 我们可以重新描述切向量和切空间: 考虑经过 p 的所有光滑曲线 σ, 如果两条这样的曲线 σ_1, σ_2 满足下面的条件

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x^i \circ \sigma_1(t) - x^i \circ \sigma_2(t)) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则称 σ_1 和 σ_2 等价, 记为 $\sigma_1 \sim \sigma_2$, 曲线的一个等价类称为 p 处的切向量. 切空间则可以定义为

$$T_pM = \{\text{经过 } p \text{ 的光滑曲线}\}/\sim.$$

不难验证, 切空间的这几种等价描述都是等价的.

定义 1.4.2 (切映射)**.** *设 $f : M \to N$ 为微分流形之间的光滑映射, $p \in M$. 任给 p 处的切向量 X_p, 定义 $f(p)$ 处的切向量 $f_{*p}(X_p)$ 如下*

$$f_{*p}(X_p)g = X_p(g \circ f), \quad \forall\ g \in C^\infty(N).$$

这样我们就定义了线性映射 $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$, 称为 f 在 p 处的切映射或微分, 有时也把 f_{*p} 记为 df_p.

切映射具有以下性质:

- 恒同映射 $id : M \to M$ 的切映射均为恒同映射;
- 如果 $f : M \to N$, $g : N \to S$ 均为微分流形之间的光滑映射, 则它们之间复合映射的切映射为切映射的复合:

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p};$$

- 设 σ 是经过 p 的光滑曲线, $\sigma'(0) = X_p$, 则

$$f_{*p}(X_p) = (f \circ \sigma)'(0).$$

事实上, 由定义, 我们如下计算

$$\begin{aligned} f_{*p}(X_p)g &= X_p(g \circ f) = \sigma'(0)(g \circ f) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g \circ f \circ \sigma(t)) \\ &= (f \circ \sigma)'(0)g. \end{aligned}$$

设 (U,φ) 为 p 附近的局部坐标系, (V,ψ) 为 $f(p)$ 处的局部坐标系, 坐标函数分别为 x^i, y^j, $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$. 在这两个局部坐标系下, f 的局部表示可写为

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,x^2,\cdots,x^m)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)).$$

在切空间 T_pM 和 $T_{f(p)}N$ 中分别有基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}\}$. 在这两组基下, 线性映射 f_{*p} 可以表示为一个矩阵. 我们计算如下:

$$\begin{aligned}
f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p)g &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(g\circ f)=\frac{\partial}{\partial x^i}(g\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\\
&=\frac{\partial}{\partial x^i}(g\circ\psi^{-1}(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)))(\varphi(p))\\
&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial g\circ\psi^{-1}}{\partial y^j}(\psi(f(p)))\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(\varphi(p))\\
&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(\varphi(p))\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)}g.
\end{aligned}$$

因此

$$f_{*p}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(\varphi(p))\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)},$$

写成矩阵形式为

$$(f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p))=(\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{f(p)},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{f(p)})J(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

根据切映射的上述表示, 我们可以重新给出浸入和淹没等概念: 微分流形之间的光滑映射 $f:M\to N$ 为浸入当且仅当 f 的切映射总是单线性映射; f 为淹没当且仅当其切映射总是满线性映射. 特别地, 如果 $f:M^m\to N^n$ 为浸入, 则 $f_{*p}(T_pM)$ 为 $T_{f(p)}N$ 的 m 维子向量空间. 例如, 当包含映射 $I:M\to N$ 为嵌入, 即 M 为 N 的正则子流形时, T_pM 为 T_pN 的 m 维子向量空间.

例 1.4.1. *欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的切空间.*

设 $p\in\mathbb{R}^n$, 则 $T_p\mathbb{R}^n=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x^i|_p}\}_{i=1}^n$, 而基向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ 作用在函数上就是求偏导数. 利用整体坐标 $\{x^i\}$, 我们通常把切空间 $T_p\mathbb{R}^n$ 和作为向量空间的 $\mathbb{R}^n$ 等同起来:

$$\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\longleftrightarrow(a^1,a^2,\cdots,a^n)\in\mathbb{R}^n.$$

因此, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的正则子流形, 其切空间也就可以看成 $\mathbb{R}^n$ 中的子向量空间了.

例 1.4.2. *n 维球面 S^n 的切空间.*

设 $p\in S^n$, σ 是 S^n 上经过 p 的光滑曲线. 把 σ 看成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的曲线, 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标下, σ 可局部表示为

$$\sigma(t)=(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^{n+1}(t)),\quad t\in(-\epsilon,\epsilon).$$

记 $v=\sigma'(0)$, 则 $v=\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)'(0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, 为了简单起见, 也记

$$v=((x^1)'(0),\cdots,(x^{n+1})'(0))\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

由于 $\|\sigma(t)\|\equiv 1$, 故

$$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)'(0)x^i(0)=0,$$

即 $\langle v,p\rangle=0$, 其中 $\langle,\rangle$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准内积. 这说明

$$T_pS^n\subset\{v\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,\langle v,p\rangle=0\},$$

因为上式两边是维数相同的向量空间, 故上式实际上是等式.

例 1.4.3. *行列式映射的秩.*

考虑映射 $f:GL(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $f(A)=\det A$. $GL(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ 为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的开集, f 为光滑映射. 当 $A\in GL(n,\mathbb{R})$ 时, 对 $h\in M_{n\times n}$, 有

$$\det(A+th)=\det A\det(I_n+tA^{-1}h)=\det A(1+t\cdot\mathrm{tr}A^{-1}h+o(t)),\quad t\in\mathbb{R},$$

因此 f 的在 A 处的切映射 $f_{*A}:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$ 为

$$f_{*A}h=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det(A+th)=\det A\,\mathrm{tr}(A^{-1}h),$$

从上式易见 f 的秩为 1.

例 1.4.4. *设 $f:M^m\to N^n$ 为光滑映射, 其秩恒为 l. 取 $q\in N$, 设 $S=f^{-1}(q)\neq\varnothing$, 我们已经知道此时 S 为 M 的正则子流形. 设 $p\in S$, 下面来求 S 在 S 处的切空间 T_pS.*

注意到 $f(S)\equiv q$, 因此, 如果 σ 是 S 中经过 p 的光滑曲线, 则

$$f_{*p}(\sigma'(0))=(f\circ\sigma)'(0)=0,$$

这说明 $T_pS\subset\ker f_{*p}$. 又因为 $\mathrm{rank}f=l$, 故 $\dim\ker f_{*p}=\dim M-l=\dim S$, 从而有

$$T_pS=\ker f_{*p}=\{v\in T_pM\,|\,f_{*p}(v)=0\}.$$

定义 1.4.3 (横截相交). 设 $f: M \to N$ 为微分流形之间的光滑映射, S 为 N 的正则子流形. 如果对满足条件 $p \in M$, $f(p) = q \in S$ 的任意点 p, 均有

$$f_{*p}(T_pM) + T_qS = T_qN,$$

则称 f 和 S 横截相交, 有时记为 $f \pitchfork S$. 当 $f(M) \cap S = \varnothing$ 时也称 f 和 S 横截相交.

例 1.4.5. 横截相交与正则值.

设 $f: M \to N$ 为光滑映射, 则 f 和 N 中的 0 维流形 q 横截相交当且仅当 q 为 f 的正则值; 如果 M, S 均为 N 的正则子流形, 且对任何 $p \in M \cap S$, 均有

$$T_pM + T_pS = T_pN,$$

则称 M, S 横截相交, 记为 $M \pitchfork S$. 例如, 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 经过原点的直线和单位圆周就是横截相交的.

引理 1.4.3. 设 $0 \in \mathbb{R}^k$ 为光滑映射 $g: N \to \mathbb{R}^k$ 的正则值, 且 $S = g^{-1}(0)$. 则映射 $f: M \to N$ 和 S 横截相交当且仅当 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是复合映射 $g \circ f$ 的正则值.

证明. $0 \in \mathbb{R}^k$ 是复合映射 $g \circ f$ 的正则值当且仅当对任意 $p \in (g \circ f)^{-1}(0)$ 均有

$$(g \circ f)_{*p}(T_pM) = g_{*f(p)}f_{*p}(T_pM) = T_0\mathbb{R}^k,$$

由于 $T_{f(p)}S = \ker g_{*f(p)}$, $g_{*f(p)}(T_{f(p)}N) = T_0\mathbb{R}^k$, 故上式等价于

$$f_{*p}(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N,$$

即等价于 f 与 S 横截相交. □

定理 1.4.4. 设 $f: M^m \to N^n$ 为光滑映射, S 为 N 的正则子流形. 如果 f 与 S 横截相交, 则 $f^{-1}(S)$ 为 M 的正则子流形, 且

$$\dim M - \dim f^{-1}(S) = \dim N - \dim S.$$

证明. 设 $p \in f^{-1}(S)$, 记 $q = f(q) \in S$. 因为 S 为正则子流形, 由正则子流形的结构定理, 存在 q 在 N 中的局部坐标邻域 U_q, 以及淹没 $g: U_q \to \mathbb{R}^k$ $(k = \dim N - \dim S)$, 使得

$$S \cap U_q = g^{-1}(0).$$

根据前面的引理, $0 \in \mathbb{R}^k$ 为复合映射 $g \circ f$ 的正则值, 从而在 p 的开邻域 $f^{-1}(U_q)$ 中 $f^{-1}(S)$ 为正则子流形, 维数为 $\dim M - k = \dim M - \dim N + \dim S$. □

有时, 我们把 $\dim N - \dim S$ 称为子流形 S 的余维数, 记为 codim$S$. 用余维数的记号, 则上面的结果可写为

$$\mathrm{codim} f^{-1}(S) = \mathrm{codim} S.$$

例 1.4.6. 线性空间的横截相交.

设 U, V 为向量空间 W 的子向量空间, 则 U, V 横截相交当且仅当 $U+V = W$, 此时

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim W,$$

或改写为

$$\mathrm{codim} U \cap V = \mathrm{codim} U + \mathrm{codim} V.$$

定理 1.4.5 (横截相交的稳定性)**.** *设 M, P, S, N 为微分流形, 其中 M 为紧致流形, S 为 N 的闭正则子流形. 设 $f : M \times P \to N$ 为光滑映射, 取 $p \in P$, 定义 $f_p : M \to N$, $f_p(x) = f(x, p)$, $\forall\ x \in M$. 则集合*

$$\Omega = \{p \in P \,|\, f_p \text{ 和 } S \text{ 横截相交}\}$$

为开集.

证明. 设 $p_0 \in \Omega$, 我们要证明, 对于 p_0 附近的点 p, f_p 也和 S 横截相交. 用反证法, 假设不然, 则存在 $p_i \in P$, 使得 $p_i \to p_0$, 但 f_{p_i} 和 S 不是横截相交的. 此时, 存在 $x_i \in M$, 使得 $f(x_i, p_i) = y_i \in S$, 且

$$f_{*(x_i,p_i)}(T_{x_i}M) + T_{y_i}S \neq T_{y_i}N, \quad i \geqslant 1. \tag{1.4}$$

因为 M 是紧致的, $\{x_i\}$ 存在收敛子列, 不妨设其本身收敛, $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$. 此时 $(x_i, p_i) \to (x_0, p_0)$. 由于 S 是 N 中闭集, 故 $y_i = f(x_i, p_i) \to y_0 = f(x_0, p_0) \in S$. 由于 S 为 N 的正则子流形, 我们可以取 y_0 的局部坐标邻域 V 以及光滑淹没 $\psi : V \to \mathbb{R}^k$, 使得 $0 \in \mathbb{R}^k$ 为 ψ 的正则值且 $S \cap V = \psi^{-1}(0)$. 由 f_{p_0} 和 S 横截相交知, $0 \in \mathbb{R}^k$ 为复合映射 $\psi \circ f(\cdot, p_0)$ 的正则值. 因为矩阵的秩在微扰下不会变小, 故 i 充分大时, $0 \in \mathbb{R}^k$ 为复合映射 $\psi \circ f(\cdot, p_i)$ 的正则值, 且 $y_i \in V$. 这和 (1.4) 相矛盾. □

这个定理说明, 横截相交经过微扰以后仍为横截相交. 反之, 可以证明任何光滑映射总可以通过微扰使之和给定的正则子流形横截相交.

习题 1.4

1. 对于 C^1 的微分流形, 应如何定义切向量和切空间?

2. 本节哪些结论对于 C^k $(k \geqslant 1)$ 也成立?

3. 用光滑曲线的等价观点给出切空间的定义, 证明其为有限维向量空间, 维数和流形的维数相同.

4. 设 M 为微分流形, 则 $\Delta = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x = y\}$ 为 $M \times M$ 的正则子流形, 计算其切空间.

5. 考虑映射 $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, $f(A) = AA^T$. 说明这是光滑映射, 求其切映射, 并计算 f 在 $f^{-1}(I_n) = O(n)$ 上的秩.

6. 考虑映射 $f : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$, $f(A) = A^{-1}$. 说明 f 为光滑映射, 计算其切映射.

7. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为光滑映射. 证明, 如果其切映射都是正交变换, 则 f 本身也是正交变换.

8. 设 $f : M^m \to N^n$ 为光滑映射, S 为 N 的正则子流形. 证明 f 和 S 横截相交当且仅当 f 的图像 $\mathrm{graph}(f)$ 和 $M \times S$ 在 $M \times N$ 中横截相交.

9. 设 $f : M \to M$ 为光滑映射. 如果在 f 的每一个不动点 $p \in M$ 处, f 的切映射 $f_{*p} : T_pM \to T_pM$ 没有不动点, 则称 f 为 Lefshetz 映射. 证明, 如果 M 为紧流形, 则 Lefshetz 映射的不动点最多只有有限个.

10. 设 $f : M_1 \to N$, $g : M_2 \to N$ 为微分流形之间的光滑映射, 如果对于任何满足条件 $f(x) = g(y) = z$ 的点, 均有
$$f_{*x}(T_xM_1) + g_{*y}(T_yM_2) = T_zN,$$
则称映射 f 和 g 横截相交. 证明, 如果 f, g 横截相交, 则
$$\{(x, y) \in M_1 \times M_2 \,|\, f(x) = g(y)\}$$
为 $M_1 \times M_2$ 的正则子流形, 维数为 $\dim M_1 + \dim M_2 - \dim N$.

§1.5 Sard 定理及应用

在前节最后我们定义了横截相交的概念并证明了横截相交性具有微扰不变性, 即它是一个 "一般" 的 (generic) 性质, 或者说映射和正则子流形处于一般 (通有) 的位置 (general position). 一般性是微分拓扑学里的重要概念, 一个映射本身的性质可能很坏, 但往往能在这个映射附近找一个性质较好的映射, 这里要用到的一个基本工具就是 Sard 定理.

定义 1.5.1 (零测集)**.** *设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的子集, 如果任给 $\epsilon > 0$, 均存在覆盖 A 的至多可数个开立方体, 使得这些立方体的体积之和小于 ϵ, 则称 C 为 $\mathbb{R}^n$ 的零测集.*

$\mathbb{R}^n$ 中的零测集具有以下性质:

- 零测集的子集显然为零测集;
- 至多可数个零测集之并仍为零测集;
- $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集不是零测集. 事实上, 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, 取闭的立方体 $V \subset U$, 如果 S_i 是覆盖 U 的一列立方体, 则由于 V 为紧致集合, 故存在有限个 S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, 使得 $V \subset \cup_{i=1}^k S_i$. 从而 S_i 的特征函数之和在 V 上大于或等于 1, 积分表明
$$\sum_{i\geqslant 1} \mathrm{vol}(S_i) \geqslant \sum_{i=1}^k \mathrm{vol}(S_i) \geqslant \mathrm{vol}V > 0,$$
因而 V 不能为零测集, 当然 U 也就不是零测集.
- 当 $m < n$ 时, $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的零测集. 事实上, 不妨设 $m = n-1$, 因为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 可以表示为可数个边长为单位长的 $n-1$ 维立方体之并, 故只须证明这样的一个 $n-1$ 维立方体 I 为 $\mathbb{R}^n$ 中零测集即可. 对 $\forall\, \epsilon > 0$, I 均包含于 n 维立方体 $I \times [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ 中, 后者的体积为 ϵ. 因为 ϵ 是任取的, 故 I 在 $\mathbb{R}^n$ 中为零测集.

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为映射, 且存在 $K > 0$, 使得
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant K\|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$
则称 f 为 Lipschitz 映射. 如果上式只在某子集上成立, 则称 f 在该子集上为 Lipschitz 映射.

命题 1.5.1. *$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz 映射将零测集映为零测集; $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射将零测集映为零测集.*

证明. 先看 Lipschitz 映射. 设 f 满足条件 (1.5), 则易见一个体积为 v 的立方体在 f 下的像包含于体积至多为 $(K\sqrt{n})^n v$ 的立方体中, 从而由零测集的定义知, f 把零测集映为零测集. 根据拟微分平均值定理可知 C^1 的映射局部上是 Lipschitz 映射, 故 C^1 映射将零测集也映为零测集. □

推论 1.5.2. *设 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m < n)$ 为 C^1 映射, 则 $f(\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集.*

证明. 记 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是向前 m 个坐标分量的投影映射, 则 $f\circ\pi$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的的 C^1 映射, 由上面零测集的性质和刚才的命题, $f(\mathbb{R}^m)=f\circ\pi(\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. □

定义 1.5.2 (流形上的零测集)**.** *设 C 为微分流形 M^n 中的子集, 如果存在 M 的局部坐标覆盖 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, 使得对每个 α, $\varphi(C\cap U_\alpha)$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集, 则称 C 为 M 的零测集.*

从上面欧氏空间中零测集的性质易见, 微分流形上零测集的定义是恰当的, 并且 C 为零测集当且仅当它在每一个局部坐标邻域内均为零测集. 以下事实对于微分流形上的零测集也是对的:

- 零测集的子集为零测集; 至多可数个零测集之并仍为零测集;
- 微分流形上的非空开集不是零测集;
- 如果 M 为 N 的浸入子流形, $\dim M<\dim N$, 则 M 为 N 的零测集;
- 同维数的微分流形之间的 C^1 映射把零测集映为零测集;
- 如果 $f:M\to N$ 为 C^1 映射, $\dim M<\dim N$, 则 $f(M)$ 为 N 中零测集.

设 $f:M\to N$ 为光滑映射, 如果在点 $p\in M$ 处 f 的切映射 f_{*p} 不是满射, 则称 p 为 f 的**临界点**, 临界点的像称为临界值.

定理 1.5.3 (Sard)**.** *设 $f:M\to N$ 为微分流形之间的光滑映射, 则 f 的临界值为 N 的零测集.*

证明. 由零测集的上述性质, 我们不妨设 $M=\mathbb{R}^m$, $N=\mathbb{R}^n$. 对 m 用数学归纳法. $m=0$ 是显然的. 记 C 为 f 的临界值全体, 只要证明, 对任意的 $y\in C$, 存在 y 的开邻域, 使之与 C 的交集为零测集. 令

$$C_s=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f \text{ 在 } x \text{ 的所有 } k \text{ 阶偏导数均为零}, \ 1\leqslant k\leqslant s.\}.$$

显然 $C\supset C_1\supset C_2\supset\cdots$ 为一列闭集, 我们要证明 $f(C_s-C_{s+1})$ 都是零测集.

(1) $f(C-C_1)$ 为零测集. 事实上, 设 $x_0\in C$, $x_0\notin C_1$, 则 f 在 x_0 的一阶偏导数不全为零, 不妨设 $\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\neq 0$. 考虑映射 $g_0:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$,

$$g_0(x)=(f_1(x),x^2,x^3,\cdots,x^m),$$

则 g_0 在 x_0 处秩为 m, 由逆映射定理, 存在 x_0 的开邻域 U 和 V, 使得 $g_0|_U : U \to V$ 为微分同胚, 记其逆为 h_0, 则

$$f \circ h_0(x) = (x^1, f_2 \circ h_0(x), \cdots, f_m \circ h(x)),$$

且 $f(C \cap h_0(V)) = f \circ h_0(h_0^{-1}(C) \cap V)$. 如果令

$$k_t(x^2, x^3, \cdots, x^m) = (f_2 \circ h_0(t, \cdots, x^m), \cdots, f_m \circ h_0(t, \cdots, x^m)),$$

则

$$h_0^{-1}(C) \cap V = \bigcup_t \{t\} \times \mathrm{Crit}(k_t),$$

其中 $\mathrm{Crit}(k_t)$ 表示 k_t 的临界点集. 根据归纳假设, $k_t(\mathrm{Crit}(k_t))$ 在 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中均为零测集, 从而

$$f(C \cap h_0(V)) = \bigcup_t \{t\} \times k_t(\mathrm{Crit}(k_t))$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集 (参见习题).

(2) $f(C_s - C_{s+1})$ 为零测集. 设 $x_0 \in C_s - C_{s+1}$, 不失一般性, 我们假设 $\frac{\partial f'}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$, 其中

$$f' = \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_m} f}{\partial (x^1)^{i_1} \cdots \partial (x^m)^{i_m}}, \quad i_1 + \cdots + i_m = s.$$

和前面一样, 考虑映射 $g_s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,

$$g_s(x) = (f'(x), x^2, \cdots, x^m),$$

g_s 在 x_0 附近为微分同胚, 记其逆为 $h_s : V \to \mathbb{R}^m$. 令 $k_s = f \circ h_s$ 并记

$$k' = k_s|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V}.$$

显然, $g_s(C_s \cap h_s(V)) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V$, 并且

$$f(C_s \cap h_s(V)) \subset k'(\mathrm{Crit}(k'))$$

由归纳假设, $f(C_s \cap V)$ 为零测集.

(3) 当 s 充分大时, $f(C_s)$ 为零测集. 设 $x_0 \in C_s$, $s > \frac{m}{n} - 1$. 取以 x_0 为中心的立方体 I, I 的边长为 δ. 由多元函数的 Taylor 展开容易知道, 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M \|x - y\|^{s+1}, \quad \forall\, x \in C_s \cap I, \ y \in I.$$

将 I 等分为 N^m 个边长为 $\frac{\delta}{N}$ 的立方体, 如果 I' 是等分后的一个小立方体, 则由上面的不等式知, 当 $I' \cap C_s \neq \varnothing$ 时, $f(I')$ 含于边长不超过

$$2M\sqrt{m}(\frac{\delta}{N})^{s+1}$$

的立方体中, 从而 $f(C_s \cap I)$ 含于总体积不超过

$$N^m \cdot [2M\sqrt{m}(\frac{\delta}{N})^{s+1}]^n = [2M\sqrt{m}\delta^{s+1}]^n \cdot N^{m-n(s+1)}$$

的立方体之并中. 当 $s > \frac{m}{n} - 1$ 时, 上式在 $N \to \infty$ 时趋于零, 这说明 $f(C_s \cap I)$ 为零测集. 以上三步合起来就得到了定理的证明. □

注. 这个定理对于 C^k 映射 $(k > \max\{\dim M - \dim N, 0\})$ 也是成立的. 上面的这个对于光滑映射的证明取自 Milnor [10].

下面我们介绍 Sard 定理的几个应用.

引理 1.5.4. 设 $f : M \times P \to \mathbb{R}^k$ 为光滑映射, $0 \in \mathbb{R}^k$ 为 f 的正则值. 则集合

$$\{p \in P \mid 0 \text{ 为 } f_p(\cdot) = f(\cdot, p) : M \to \mathbb{R}^k \text{ 临界值}\}$$

为 P 的零测集

证明. 记 $S = f^{-1}(0)$, S 为 $M \times P$ 的正则子流形, 我们把从 $M \times P$ 到 P 的投影限制在 S 上得到的映射记为 $\pi : S \to P$. 于是, 0 为 f_p 的正则值当且仅当 $\forall\, x \in M$, $(x, p) \in S$, 成立

$$f_{*(x,p)}(T_{(x,p)}M \times \{p\}) = T_0\mathbb{R}^k$$

因为 $f_{*(x,p)}(T_xM \times P) = T_0\mathbb{R}^k$ 以及 $\ker f_{*(x,p)} = T_{(x,p)}S$, 故上式等价于

$$T_{(x,p)}M \times \{p\} + T_{(x,p)}S = T_{(x,p)}M \times P$$

这又等价于 (上式两边用投影的切映射作用, 并注意投影的切映射的零空间为 M 的切空间)

$$\pi_{*(x,p)}T_{*(x,p)}S = T_pP$$

即等价于 p 为 π 的正则值. 由 Sard 定理即知本引理成立. □

定理 1.5.5 (横截性定理)**.** 设 $f : M \times P \to N$ 为光滑映射, Z 为 N 正则子流形. 设 f 与 Z 横截相交, 则集合

$$\{p \in P \mid f_p(\cdot) = f(\cdot, p) : M \to N \text{ 不与 } Z \text{ 横截相交}\}$$

为 P 的零测集.

证明. 因为可数个零测集之并仍为零测集, 而 Z 可以被 N 的至多可数个局部坐标邻域覆盖, 故不妨设 $Z = g^{-1}(0)$, 其中 $g : N \to \mathbb{R}^k$ 为一个淹没. 因此 $0 \in \mathbb{R}^k$ 为复合映射 $g \circ f$ 的正则值, 而 f_p 和 Z 横截相交当且仅当 $0 \in \mathbb{R}^k$ 为 $g \circ f_p$ 的正则值. 现在问题就转化为前一引理了. □

例 1.5.1. 映射的微扰.

设 $f : M^m \to \mathbb{R}^n$ 为光滑映射, Z 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形, 令

$$F : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(p, a) = f(p) + a,$$

F 为淹没, 因此和 Z 横截相交. 由横截性定理, 对于几乎所有的 $a \in \mathbb{R}^n$, $f(p) + a : M \to \mathbb{R}^n$ 都和 Z 横截相交, 换言之, 可对 f 作任意小的扰动, 使之和正则子流形 Z 横截相交.

定理 1.5.6. *n 维紧致微分流形均可浸入到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中, 并且可以嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中.*

证明. 设 M 为 n 维紧致微分流形, 根据我们在前面证明的结果, M 可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中. 我们不妨假设 M 为 $\mathbb{R}^N$ 的正则子流形. 设 $v \in S^{N-1}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的单位向量. 定义投影 $\pi_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ 为

$$\pi_v(x) = x - \langle x, v\rangle v, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

我们将证明, 如果 $N > 2n$, 则对几乎所有的 $v \in S^{N-1}$, π_v 限制在 M 上为浸入; 如果 $N > 2n + 1$, 则对几乎所有的 v, π_v 限制在 M 上为嵌入.

先假设 $N > 2n + 1$, 考虑映射 $f : M \times M - \Delta \to S^{N-1}$:

$$f(x, y) = (x - y)\|x - y\|^{-1}, \quad x \neq y \in M.$$

其中 $\Delta = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x = y\}$. 由于 M 为 $\mathbb{R}^N$ 的正则子流形, f 是光滑映射. 因为 $\dim(M \times M - \Delta) = 2n < \dim S^{N-1}$, 故 f 的像在 S^{N-1} 中为零测集, 即几乎所有的单位向量都不在 f 或 $-f$ 的像中. 对于这样的单位向量 v, π_v 必为单射: 如果 $\pi_v(x) = \pi_v(y)$, 则 $\pi_v(x - y) = 0$, 从而 $x - y = tv$, $t \in \mathbb{R}$. 如果 $x \neq y$, 则 $f(x, y) = v$ 或 $-f(x, y) = v$, 这和 v 的选取相矛盾.

为了使得 π_v 为浸入, 我们再考虑另一映射 $g : T_1M \to S^{N-1}$, $g(x, w) = w$. 其中, 我们将 $\mathbb{R}^N$ 的切空间和它自身等同, 而令

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\quad T_1M = \{(x, w) \in TM \,|\, w \in T_xM,\ \|w\| = 1\},$$

T_1M 是 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ 中维数为 $2n - 1$ 的正则子流形, g 为光滑映射. 如果 $N > 2n$, 则由 Sard 定理, g 的像在 S^{N-1} 中为零测集, 如果 v 不在 g 或 $-g$ 的像中, 则

$(\pi_v)_{*x}(w) = w - \langle w, v\rangle v \neq 0$, $\forall\ w \in T_xM$, $\|w\| = 1$. 此时 π_v 为浸入. 这已经说明, M 可以浸入到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中.

如果 $N > 2n+1$, 则可以选取 $v \in S^{N-1}$, 使得 v 不在 $\pm f$, $\pm g$ 的像中, 此时 π_v 将 M 单浸入到 $\mathbb{R}^{N-1}$ 中. 如此重复投影, 最后就可将 M 单浸入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中. 由于 M 是紧致的, 故单浸入必为嵌入. □

注. 如以前所述, Whitney 证明了 n 维微分流形均可嵌入到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中, 并且可以浸入到 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中. 人们猜测, n 维微分流形均可嵌入到 $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)+1}$ 中, 并可浸入到 $2n-\alpha(n)$ 中, 其中 $\alpha(n)$ 表示 n 的二进制展开中 1 的个数. 关于嵌入部分的猜测至今未被解决, 关于浸入部分的猜测由 Cohen 在 1982 年证明是正确的.

下面我们考虑微分流形 M 上的光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$. 此时, p 为 f 的临界点意味着 $f_{*p} \equiv 0$. 设 p 为 f 的临界点, (U, φ) 为 p 附近的局部坐标系, $\varphi(p) = 0$. 记 $\{y^i\}_{i=1}^n$ 为坐标函数, 则

$$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y^i}(\varphi(p)) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

如果 f 的局部表示 $f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p) = 0$ 处的 Hessian 矩阵是非退化的, 则称 p 为 f 的非退化临界点. 不难看出, 临界点是否非退化与坐标系的选取无关. 如果 f 的所有临界点都是非退化的, 则称 f 为 Morse 函数.

引理 1.5.7 (Morse)**.** *如果 p 为光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 的非退化临界点, 则存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ), 使得 f 的局部表示形如*

$$f\circ\varphi^{-1}(y) = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^r)^2 + (y^{r+1})^2 + \cdots + (y^n)^2,$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant n$, r 称为 f 在 p 的 (Morse) 指标.

证明. 不妨假设 $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. 在前节证明微分流形切空间维数有限时, 我们已经知道 f 可以表示为

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x),$$

其中 g_i 为光滑函数, 且 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$, 因而 f 可以继续表示为

$$f(x) = f(0) + \sum_{i,j=1}^n x^i x^j g_{ij}(x),$$

$g_{ij} = g_{ji}$ 仍为光滑函数, 且矩阵

$$\Big(g_{ij}(0)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\Big)(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(0)$$

非退化. 由下面的引理知, 存在 0 附近的 n 阶非退化光滑矩阵 $P(x)$, 使得

$$P(x)\Big(g_{ij}(x)\Big)P(x)^T = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

其中 r 为 $\mathrm{Hess}(f)(0)$ 的负特征值的个数. 现在, 在新的局部坐标

$$(y^1, y^2, \cdots, y^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)P^{-1}(x) = \varphi(x)$$

下有

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^r)^2 + (y^{r+1})^2 + \cdots + (y^n)^2.$$

这就证明了 Morse 引理. □

引理 1.5.8 (Hirsch)**.** *设 $Q(x)$ 是定义在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 附近的光滑的实对称 n 阶方阵, 如果 $Q(0)$ 非退化, 则存在 0 附近的 n 阶非退化光滑矩阵 $P(x)$, 使得*

$$P(x)Q(x)P(x)^T = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

其中 r 为 $Q(0)$ 的负特征值的个数.

证明. 对 n 用数学归纳法. $n = 1$ 时, 条件成为 $Q(0) \neq 0$, 因此在 0 附近 $Q(x) \neq 0$, 令 $P(x) = |Q(x)|^{-\frac{1}{2}}$, 则 $P(x)$ 为所求 1 阶非退化矩阵. 假设引理对 $n-1$ 阶方阵成立, 考虑 n 阶方阵 Q. 不妨假设 $r < n$, 由线性代数, 存在非退化矩阵 P_0, 使得

$$P_0Q(0)P_0^T = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

令 $Q'(x) = P_0Q(x)P_0^T$, 则在 0 附近 $Q'(x)$ 在 (n,n) 位置的元素 $q'_{nn}(x)$ 大于零, 因此再令

$$P_1 = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1,\ |q'_{nn}(x)|^{-\frac{1}{2}})$$

则 $Q''(x) = P_1Q'(x)P_1^T$ 在 (n,n) 位置的元素恒为 1. 考虑矩阵 P_2, 它在对角线上全为 1, 在对角线以下全为 0, 在 (i,n) $(i<n)$ 位置为 $-q''_{in}(x)$, 其中 $q''_{ij}(x)$ 表示 Q'' 在 (i,j) 位置的元素, P_2 在其它位置的元素为零, 则 $P_2Q''P_2^T$ 形如

$$\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对 $n-1$ 阶矩阵 Q_1 用归纳假设, 最后就得到我们所需结论. □

推论 1.5.9. *光滑函数的非退化临界点集是离散的. 特别地, 紧致流形上光滑函数的非退化临界点只有有限个.*

Morse 函数可以用来研究微分流形的拓扑结构. 利用 Sard 定理, 我们可以证明微分流形上总是存在 Morse 函数的.

定理 1.5.10 (Morse 函数的存在性). *设 (U,φ) 为微分流形 M 上的局部坐标系, 紧集 $K\subset U$.*

(1) 如果光滑函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在 K 上的临界点都是非退化的, 则存在 $\delta>0$, 使得满足条件

$$\|J(f\circ\varphi^{-1})-J(g\circ\varphi^{-1})\|<\delta,\quad \|\mathrm{Hess}(f\circ\varphi^{-1})-\mathrm{Hess}(g\circ\varphi^{-1})\|<\delta$$

的光滑函数 $g:U\to\mathbb{R}$ 在 K 上的临界点也都是非退化的;

(2) 设 $f:U\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在光滑函数 $l:U\to\mathbb{R}$, 使得

$$\mathrm{supp} l\subset U,\ \|J(l\circ\varphi^{-1})\|<\epsilon,\quad \|\mathrm{Hess}(l\circ\varphi^{-1})\|<\epsilon$$

且 $f+l$ 在 K 上的临界点都是非退化的.

(3) 设 M 为紧致微分流形, $f:M\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在光滑 Morse 函数 $g:M\to\mathbb{R}$, 使得

$$|g(x)-f(x)|<\epsilon,\quad \forall\ x\in M.$$

证明. (1) 考虑 U 上的函数

$$\|J(f\circ\varphi^{-1})\|+\|\mathrm{Hess}(f\circ\varphi^{-1})\|,$$

f 在 K 上的临界点非退化当且仅当上述函数在 K 上不取零值. 由于 K 的紧致性, 这等价于上述函数在 K 上有正下界. 因此对 f 微扰后的光滑函数在 K 上的临界点也是非退化的.

(2) 不妨假设 $U=\mathbb{R}^n$, $\varphi=id$. 因为 K 为紧致集, 我们可以取 K 的开邻域 V, 使得 $\bar{V}\subset U$ 仍为紧致集. 设 $\phi:M\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 满足以下条件

$$\phi|_V\equiv 1,\ \mathrm{supp}\phi\subset U.$$

对 $a=(a^1,\cdots,a^n)\in\mathbb{R}^n$, 考虑函数 $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$l(x)=a^1x^1+\cdots+a^nx^n$$

以及函数 $f_a:U\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=f(x)+\phi(x)l(x)$. 我们要说明, 对于几乎所有的 $a\in\mathbb{R}^n$, f_a 在 K 上的临界点都是非退化的. 事实上, 考虑映射 $F_a:U\to\mathbb{R}$,

$$F_a(x)=(\frac{\partial f_a}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f_a}{\partial x^n}),$$

F_a 其实就是 f_a 的 Jacobian. 设 $x_0 \in K$, 则 x_0 为 f_a 的临界点当且仅当 $F_a(x_0) = 0$. 由于 $\phi|_V \equiv 1$, 这等价于 $Jf(x_0) + a = 0$; 同理, x_0 非退化当且仅当 $JF_a(x_0) = \mathrm{Hess}(f)(x_0)$ 非退化, 即 $F_a = Jf + a$ 在 x_0 处秩为 n. 根据例 1.5.1, 对于几乎所有的 $a \in \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathbb{R}^n$ 为 $Jf + a$ 的正则值, 对于这样的 a, f_a 在 K 上的临界点都是非退化的.

(3) 重复利用 (1), (2) 即可, 留作习题. □

推论 1.5.11. *设 $f : M \to \mathbb{R}$ 为紧致微分流形 M 上的 Morse 函数, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 Morse 函数 $g : M \to \mathbb{R}$, 使得*

$$\|g(x) - f(x)\| \leqslant \epsilon, \quad \forall\ x \in M,$$

且 g 的临界值互不相同.

证明. 设 x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 为 f 的临界点, 取 x_i 的互不相交的局部坐标邻域 U_i, 设 ϕ_i 为 M 上的光滑函数, 使得

$$\phi_i|_{V_i} \equiv 1, \quad \mathrm{supp}\, \phi_i \subset U_i,$$

其中 V_i 为 x_i 的开邻域, $\bar{V}_i \subset U_i$. 对 $a = (a^1, \cdots, a^k) \in \mathbb{R}^k$, 考虑光滑函数 $g : M \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} a^i \phi_i,$$

由于 f 在紧致集合 $M - \bigcup_i V_i$ 上没有临界点, 故 $\|a\|$ 充分小时, g 在 $M - \bigcup_i V_i$ 上也没有临界点. 在 V_i 上 $g = f + a^i$, 因此 g 的临界点为 $\{x_i\}$. 通过适当选取 a, 使得

$$f(x_i) + a_i \neq f(x_j) + a_j, \quad \forall\ i \neq j,$$

则 g 的临界值互不相同. □

习题 1.5

1. 证明, $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可微映射把零测集映为零测集.
2. 证明, 如果 $\mathbb{R}^1$ 上一个闭区间被若干开区间所覆盖, 则可以从这些开区间中选取有限子覆盖, 使得闭区间上的任何一点最多含于该子覆盖的两个开区间中.
3. 设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 如果对任意 $c \in \mathbb{R}$, $C \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{c\}$ 均为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中零测集, 则 C 为 $\mathbb{R}^n$ 的零测集.

4. 试说明从 m 维微分流形到 n $(m < n)$ 维微分流形之间的光滑映射必定不是满射.

5. 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形, L 为 $\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 维子线性空间. 证明, 存在 $v \in \mathbb{R}^n$, 使得 $(L+v) \cap M$ 为 M 的正则子流形.

6. 设 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$. 证明, 如果 $n \geqslant 2m$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $m \times n$ 的矩阵 A, 使得 $\|A\| \leqslant \epsilon$, 且映射

$$g: U \to \mathbb{R}^n, \quad g(u) = f(u) + Au, \ u \in U$$

为浸入.

7. 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形, 证明 $T_1 M$ 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的正则子流形.

8. 证明, 任何非平凡的线性函数 $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 限制在 S^n 上都是 Morse 函数.

9. 证明, 任何微分流形上均在逆紧的 Morse 函数.

§1.6 Lie 群初步

经过前面几节的介绍, 我们对于微分流形已经有一些感性认识了. 这一节我们继续介绍一类重要的微分流形, 它们兼有微分流形的结构和群的结构, 并且二者相容. 比如, 前面我们曾介绍的一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 和特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$ 就是两个这样的例子.

定义 1.6.1 (Lie 群). *设 G 为群, 群运算记为 $\mu: G \times G \to G$. 如果 G 同时是 C^r 微分流形, 且 μ 为 C^r 映射, 则称 G 为 C^r Lie 群.*

注. 当 G 为拓扑空间, 且群的乘法和逆运算为连续映射时, 称 G 为拓扑群. 如果没有特别申明, 下面我们提到的 Lie 群都是指光滑 Lie 群.

命题 1.6.1. (1) *设 G 为 Lie 群, $g \in G$, 则左移映射 $L_g: G \to G$,*

$$L_g(x) = gx = \mu(g,x), \quad \forall\ x \in G$$

和右移映射 $R_g: G \to G$,

$$R_g(x) = xg = \mu(x,g), \quad \forall\ x \in G$$

均为微分同胚;

(2) *乘积映射 μ 的切映射满足以下关系*

$$\mu_{*(g,h)}(X_g, Y_h) = (R_h)_{*g} X_g + (L_g)_{*h} Y_h.$$

证明. (1) 固定 $g \in G$, 复合映射

$$G \xrightarrow{x \to (g,x)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

为光滑映射, 即左移 L_g 为光滑映射. 显然, L_g 可逆, 且逆映射为左移 $L_{g^{-1}}$, 即逆映射也是光滑的. 从而左移映射为微分同胚. 同理, 右移映射也都是微分同胚.

(2) 设 σ, τ 分别为经过 g, h 的 G 中的光滑曲线, $\sigma'(0) = X_g$, $\tau'(0) = Y_h$. 则

$$\begin{aligned} \mu_{*(g,h)}(X_g, Y_h) &= \mu(\sigma,\tau)'(0) = \mu(\sigma,h)'(0) + \mu(g,\tau)'(0) \\ &= (R_h)_{*g} X_g + (L_g)_{*h} Y_h, \end{aligned}$$

这也说明, 如果 σ, τ 是经过单位元 $e \in G$ 的光滑曲线, 则

$$(\sigma \cdot \tau)'(0) = \sigma'(0) + \tau'(0),$$

其中 $\sigma \cdot \tau$ 表示群的乘积. □

推论 1.6.2. *设 G 为 Lie 群, 则其逆运算 $\nu : G \to G$ 也是光滑映射.*

证明. 在 $(x_0, y_0) = (e, e) \in G \times G$ 附近考虑以下方程的解

$$\mu(x, y) = e,$$

由于 $\mu(e, \cdot)_{*e} = (L_e)_{*e} = id$ 为恒同映射, 特别地是非退化的, 故由隐映射定理 (本章 1.2 节习题), 在 e 附近上述方程的解 $y = \nu(x) = x^{-1}$ 是光滑的, 即逆运算 ν 在单位元 e 的邻域内光滑. 由于

$$(\nu \circ L_g)(x) = x^{-1} \cdot g^{-1} = (R_{g^{-1}} \circ \nu)(x)$$

故 ν 是处处光滑的. □

注意, 对于拓扑群来说, 仅仅假设群的乘法运算的连续性是不能保证逆运算的连续性的.

例 1.6.1. *欧氏加群.*

$\mathbb{R}^1$ 看成实数加群, 显然, 加法运算是光滑的, 因此 $\mathbb{R}^1$ 为 Lie 群. 同理, $\mathbb{R}^n$ 在加法运算下也都是 Lie 群.

例 1.6.2. *单位圆周乘法群.*

S^1 看成复平面上的单位圆周, 复数乘法在 S^1 上定义了群的运算. 复数乘法运算在复平面上是光滑的, 因而限制在正则子流形 S^1 上也是光滑的, 即 S^1 在此运算下成为 Lie 群. 同理, 非零复数全体 $\mathbb{C}^*$ 为复平面上的开集, 在复数乘法运算下为 Lie 群.

例 1.6.3. *Lie 群的乘积.*

设 G, H 为 Lie 群, 则乘积群 $G \times H$ 也是 Lie 群. 特别地, n 维环面 T^n 为 Lie 群, 这是紧致的交换群.

例 1.6.4. *一般线性群.*

记 $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$. $GL(n,\mathbb{R})$ 为 $M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ 中的开集, 且矩阵的乘积运算的分量关于变量是多元多项式, 因而光滑. 这说明 $GL(n,\mathbb{R})$ 为 Lie 群. 类似地, 复 n 阶非退化方阵的全体 $GL(n,\mathbb{C})$ 也是 Lie 群.

例 1.6.5. *特殊线性群.*

记 $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. 我们在本节之前已经证明 $SL(n,\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 及 $GL(n,\mathbb{R})$ 的正则子流形, 群的乘积运算是从 $GL(n,\mathbb{R})$ 上诱导而来, 从而群的运算也是光滑的, 即一般线性群也是 Lie 群.

例 1.6.6. *Heisenberg 群.*

考虑形如下面的实 3 阶方阵全体 H

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

显然, H 与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚. 矩阵的乘积运算也是光滑的, 因此 H 为 Lie 群.

例 1.6.7. *三维球面上的 Lie 群结构.*

我们在 S^3 上定义群的运算如下: 设

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad y = (y^1, y^2, y^3, y^4) \in S^3,$$

令

$$\begin{aligned} x \cdot y = (&x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 - x^4y^4, x^1y^2 + x^2y^1 + x^3y^4 - x^4y^3, \\ &x^1y^3 + x^3y^1 + x^4y^2 - x^2y^4, x^1y^4 + x^2y^3 + x^4y^1 - x^3y^2), \end{aligned}$$

在这个运算下, 单位元和逆元分别为

$$e = (1, 0, 0, 0), \quad x^{-1} = (x^1, -x^2, -x^3, -x^4).$$

这些运算在 $\mathbb{R}^4$ 中显然是光滑的, 从而限制在正则子流形 S^3 上也是光滑的, 即 S^3 为 Lie 群.

注. 可以证明, 只有 $n = 1, 3$ 时, S^n 上才有相容的 Lie 群结构.

下面我们研究 Lie 群之间的同态.

定义 1.6.2 (Lie 群同态)**.** *设 $\varphi: G \to H$ 为 Lie 群之间的群同态, 如果 φ 为光滑映射, 则称 φ 为 Lie 群同态. 如果 Lie 群同态是群的同构, 则称之为 Lie 群同构.*

例 1.6.8. *行列式作为群同态.*

考虑群同态 $\det: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, 在非零实数的全体 $\mathbb{R}^*$ 上定义群的运算为实数的乘法. 显然 det 为 Lie 群同态.

引理 1.6.3. *Lie 群同态的秩为常数.*

证明. 设 $\varphi: G \to H$ 为 Lie 群同态. 我们要证明 $\mathrm{rank}_g\varphi = \mathrm{rank}_e\varphi$, $\forall\, g \in G$. 事实上, 考虑左移映射 L_g, 因为 φ 为群同态, 故

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi,$$

因此有切映射的等式

$$\varphi_{*g} \circ (L_g)_{*e} = (L_{\varphi(g)})_{*e} \circ \varphi_{*e}.$$

由于 $(L_g)_{*e}$ 和 $(L_{\varphi(g)})_{*e}$ 均为同构, 故上式表明 $\mathrm{rank}_g\varphi = \mathrm{rank}_e\varphi$. □

推论 1.6.4. *设 $\varphi: G \to H$ 为 Lie 群同态, $h \in H$. 则当 $\varphi^{-1}(h)$ 非空时, 它是 G 的正则子流形, 其维数为 $\dim G - \mathrm{rank}\,\varphi$. 特别地, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$ 既是 G 的子群, 又是 G 的正则子流形.*

证明. 直接利用第二节最后关于常秩映射的定理即可. □

推论 1.6.5. *单的 Lie 群同态必为浸入; 满的 Lie 群同态必为淹没; Lie 群同构必为微分同胚, 即其逆也是 Lie 群同构.*

证明. 如果 $\varphi: G \to H$ 为单的 Lie 群同态, 则 $\ker\varphi = \{0\}$, 由上面的推论,

$$0 = \dim\ker\varphi = \dim G - \mathrm{rank}\,\varphi,$$

即 $\mathrm{rank}\,\varphi = \dim G$, φ 为浸入. 如果 $\varphi: G \to H$ 为满的 Lie 群同态, 则由 Sard 定理, 存在 φ 的正则值 $h \in H$, $\varphi^{-1}(h) \neq \varnothing$, 取 $g \in \varphi^{-1}(h)$, 则 φ_{*g} 为满射, 由前面的引理, φ 的切映射均为满射, 即 φ 为淹没. 如果 φ 为 Lie 群同构, 则 φ 的切映射均为同构, 由逆映射定理, 其逆也是光滑的. □

定义 1.6.3 (Lie 子群)**.** *设 H, G 为 Lie 群, $H \subset G$, $I: H \to G$ 为包含映射. 如果 I 为单的 Lie 群同态, 则称 H 为 G 的 Lie 子群; 如果进一步 I 为嵌入, 则称 H 为 G 的闭 Lie 子群.*

从上面的推论可知, Lie 子群为 (浸入) 子流形, 闭 Lie 子群为正则子流形; 如果 φ 为 Lie 群同态, 则 $\ker\varphi$ 为闭 Lie 子群.

命题 1.6.6. 闭的 *Lie* 子群作为集合必为闭集.

证明. 设 H 为 G 的闭 Lie 子群, 则 H 为正则子流形, 从而存在 G 在 e 附近的局部坐标系 (U,ψ), 使得

$$H\cap U=\{q\in U\,|\,\psi_j(q)=0,\ j>\dim H\}.$$

取 $e\in G$ 的开邻域 W, 使得 $\bar W$ 为紧集, 且 $\bar W\subset U$. 再利用群的运算的连续性, 取 e 的开邻域 V, 使得

$$V^{-1}\cdot V=\{x^{-1}\cdot y\,|\,x,\ y\in V\}\subset W.$$

设 $h_i\in H$ 且 $h_i\to g$, 我们要证明 $g\in H$. 事实上, 因为 $g\cdot V$ 为 g 的开邻域, 故 i 充分大以后, $h_i\in g\cdot V$, 固定一个这样的 h_{i_0}, 则

$$h_{i_0}^{-1}\cdot h_i\in V^{-1}\cdot V\subset W,$$

因此 $h_{i_0}^{-1}\cdot h_i\to h_{i_0}^{-1}\cdot g\in\bar W$. 由 $h_{i_0}^{-1}\cdot h_i\in H\cap W$ 及 W 的选取易见 $h_{i_0}^{-1}\cdot g\in H\cap U$, 从而 $g\in H$. 因此 H 为 G 的闭集. □

下面我们进一步研究切映射为满射的 Lie 群同态. 我们需要下面的一个关于拓扑群的引理.

引理 1.6.7. 设 G 为连通的拓扑群, U 为单位元 e 的一个开邻域, 则

$$\bigcup_{n\geqslant 1}U^n=G,$$

其中 $U^n=\{\tau_1\cdot\tau_2\cdots\tau_n\,|\,\tau_i\in U,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.

证明. 令 $V=U\cap U^{-1}$, 其中 $U^{-1}=\{\tau^{-1}\,|\,\tau\in U\}$. V 也是 e 的开邻域, 并且 $V=V^{-1}$. 令

$$H=\bigcup_{n\geqslant 1}V^n\subset\bigcup_{n\geqslant 1}U^n.$$

H 为 G 的子群, 下面证明 $H=G$. 因为 G 是连通的, 只要说明 H 既是开集又是闭集即可.

H 为开集: 设 $\sigma\in H$, 则存在 $n_0\geqslant 1$, 使得 $\sigma\in V^{n_0}$. 于是

$$\sigma\cdot V=\{\sigma\cdot\tau\,|\,\tau\in V\}\subset V^{n_0+1}\subset H,$$

而 $\sigma\cdot V$ 为 σ 的开邻域, 故 H 为 G 的开子集.

另一方面, 每一个 $\sigma\cdot H$ 均为开子集, 且

$$H=G-\bigcup_{\sigma\notin H}\sigma\cdot H,$$

从而 H 也是 G 的闭子集. 由 H 非空即知 $H=G$. □

命题 1.6.8. *设 $\varphi : G \to H$ 为 Lie 群同态. 如果 H 连通, 且 φ_{*e} 为满射, 则 φ 为满同态.*

证明. 当 φ_{*e} 为满射时 φ 为淹没, 因此 φ 为开映射. 特别地, 存在 $e \in H$ 的开邻域 $V \subset \varphi(G)$. 因为 H 为连通的, 由上面的引理, $H = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} V^n \subset \varphi(G)$. □

如果 Lie 群同态的切映射为同构, 则它具有更多的性质. 我们回忆一下复迭空间和复迭映射的概念. 设 $f : X \to Y$ 为拓扑空间 X, Y 之间的连续满射, 并且 $\forall\, y \in Y$, 存在 y 的开邻域 V_y, 使得

$$f^{-1}(V_y) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

其中 U_α 为 X 中互不相交的开集, 且 $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V_y$ 均为同胚, 则称 f 为复迭映射, X 为 Y 的复迭空间. 当 X 单连通 (基本群为零) 时, 称 X 为万有复迭空间.

例 1.6.9. *考虑 Lie 群同态 $\exp : \mathbb{R}^1 \to S^1$, $\exp(t) = e^{2\pi i t}$, $i = \sqrt{-1}$. $\exp$ 为复迭映射.*

命题 1.6.9. *设 $\varphi : G \to H$ 为连通 Lie 群之间的 Lie 群同态. 则 φ 为复迭映射当且仅当切映射 $\varphi_{*e} : T_eG \to T_eH$ 为同构.*

证明. 设 $\varphi : G \to H$ 为复迭映射, 则 φ 为满射, 因此是淹没. 即 φ_{*e} 为满射. 另一方面, $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$ 为 G 的离散子群, 从而

$$0 = \dim\ker\varphi = \dim G - \dim\operatorname{rank}\varphi,$$

这说明 φ_{*e} 也是单射.

设 $\varphi_{*e} : T_eG \to T_eH$ 为同构, 由前面的结果知 φ 既是淹没, 又为浸入. 因此 φ 为满射, 且为开映射. 由 $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$ 为 0 维正则子流形知, 存在 $e \in G$ 的开邻域 W, 使得 $W \cap \ker\varphi = \{e\}$, 且 $\varphi|_W : W \to \varphi(W)$ 为微分同胚. 我们再取 $e \in G$ 的开邻域 $V \subset W$, 使得 $V^{-1} \cdot V \subset W$. 记 $U = \varphi(V)$, 则 U 为 $e \in H$ 的开邻域, 下面我们证明

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{g\in\ker\varphi} g \cdot V,$$

且 $g_1 \neq g_2 \in \ker\varphi$ 时, $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V = \varnothing$.

显然, 当 $g \in \ker\varphi$ 时, $\varphi(g\cdot V) = \varphi(V) = U$, 且根据 V 的选取知 $\varphi|_{g\cdot V} : g\cdot V \to U$ 为微分同胚. 另一方面, 如果 $\varphi(g) \in U$, 则存在 $v \in V$, 使得 $\varphi(g) = \varphi(v)$, 从而 $gv^{-1} \in \ker\varphi$. 这说明 $g \in (\ker\varphi)V$.

如果 $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V \neq \varnothing$, 则存在 $v_1, v_2 \in V$, 使得 $g_1v_1 = g_2v_2$, 从而 $g_2^{-1}g_1 = v_2v_1^{-1} \in V^{-1} \cdot V$, 即 $g_2^{-1}g_1 \in W \cap \ker\varphi = \{e\}$, $g_1 = g_2$. □

最后, 我们介绍 Lie 群在微分流形上的作用.

定义 1.6.4 (Lie 群作用). *设 G 为 Lie 群, M 为微分流形. 如果光滑映射*

$$F: G \times M \to M, \quad (g,x) \mapsto gx \in M, \quad \forall\, g \in G,\ x \in M$$

满足以下条件

(1) $ex = x, \forall\, x \in M$;

(2) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \forall\, g_1, g_2 \in G,\ x \in M$.

则称 G 左方光滑作用于 M.

我们就这个概念做一些说明:

- 如果 $gx = x, \forall\, x \in M$ 意味着 $g = e$, 则称 G 在 M 上的作用是有效的. 如果对 $g \neq e$, $gx \neq x, \forall\, x \in M$, 则称 G 在 M 上的作用是自由的.

- 对于固定的 $x \in M$, 记 $G_x = \{g \in G \,|\, gx = x\}$, G_x 为 G 的子群, 称为 x 处的迷向子群; 记 $M_x = \{gx \,|\, g \in G\}$, 称为经过 x 的轨道. 如果任给 $x, y \in M$, 均存在 $g \in G$, 使得 $gx = y$, 则称 G 在 M 上的作用是可迁的.

- 对于固定的 $g \in G$, 映射 $F_g : M \to M$, $F_g(x) = gx, \forall\, x \in M$ 是微分同胚. 记 $\mathrm{Diff}(M)$ 为 M 的微分同胚全体在复合运算下组成的群, 则 $g \mapsto F_g$ 是从 G 到 $\mathrm{Diff}(M)$ 的群同态.

例 1.6.10. *Lie 群在自身上的作用.*

Lie 群 G 上的乘积运算 $G \times G \to G$ 可以看成是 Lie 群 G 作用在自身上. 如下的映射

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto ghg^{-1}, \quad g, h \in G$$

也定义了一个光滑作用, 称为 G 的伴随作用.

例 1.6.11. *一般线性群在欧氏空间上的作用.*

$GL(n,\mathbb{R})$ 可自然作用于 $\mathbb{R}^n$ 上:

$$(A,x) \mapsto Ax,\ A \in GL(n,\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

这是一个有效的不可迁作用.

命题 1.6.10. *设 Lie 群 G 光滑作用在微分流形 M 上, 则对任意 $x \in M$, x 处的迷向子群 G_x 为 G 的闭 Lie 子群.*

证明. 设 $x \in M$, 定义映射如下

$$\theta : G \to M,\ \theta(g) = gx;\quad \eta_g : M \to M,\ \eta_g(y) = gy.$$

则 θ, η_g 为光滑映射, 且 η_g 为微分同胚. 注意到 $\theta \circ L_g = \eta_g \circ \theta$, 故

$$\theta_{*gh} \circ (L_g)_{*h} = (\eta_g)_{*hx} \circ \theta_{*h},\quad h \in G.$$

因为左移 L_g 也是微分同胚, 故上式说明

$$\mathrm{rank}_{gh}\theta = \mathrm{rank}_h\theta,\quad \forall\ g, h \in G.$$

因此 θ 在 G 上的秩为常数, $G_x = \theta^{-1}(x)$ 为 G 的正则子流形. 显然 G_x 为 G 的子群, G_x 中群的乘法运算是 G 中乘法运算在 G_x 上的限制, 因而也是光滑的, 这说明 G_x 为闭的 Lie 子群. □

例 1.6.12. 一般线性群在矩阵加群上的作用.

考虑 $GL(n,\mathbb{R})$ 在 $M_{n\times n}$ 上的作用:

$$(A, K) \mapsto AKA^T,\ A \in GL(n,\mathbb{R}),\ K \in M_{n\times n}.$$

由刚才的命题, 对于任何固定的 $K \in M_{n\times n}$, 迷向子群

$$GL(n,\mathbb{R})_K = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AKA^T = K\}$$

为 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭 Lie 子群.

特别地, 当 $K = I_n$, 相应的迷向子群

$$O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n\}$$

为闭 Lie 子群, 这是实的正交群. 根据刚才的命题, 其维数为 $n^2 - \mathrm{rank}\theta$, 其中 θ 为如下映射

$$\theta : GL(n,\mathbb{R}) \to M_{n\times n},\ \theta(A) = AA^T,\ \forall\ A \in GL(n,\mathbb{R}).$$

θ 的秩是常数, 我们只需在 $A = I_n$ 处做计算即可, 而在 I_n 处 θ 的切映射为

$$\theta_{*I_n} : M_{n\times n} \to M_{n\times n},\ h \mapsto h + h^T,\ \forall\ h \in M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}.$$

容易看出 $\mathrm{rank}\theta_{*I_n} = \frac{1}{2}n(n+1)$, 因此

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

$O(n)$ 是紧致的, 且利用实正交矩阵的标准型不难证明它具有两个连通分支

$$O^+(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} = SO(n) \ (\text{ 特殊正交群}),$$
$$O^-(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}.$$

其它的特殊情性有:

$$K = J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

相应的迷向子群为 $Sp(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid AJA^T = J\}$, 称为辛群, 这是维数为 $2n^2+n$ 的连通 Lie 群;

$$K = L = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}_{n\times n},$$

相应的迷向子群称为 Lorentz 群.

完全类似地, 把实数 $\mathbb{R}$ 换成复数 $\mathbb{C}$, 实矩阵换成复矩阵, 我们可以得到许多其它 Lie 群的例子.

例 1.6.13. 复一般线性群的作用.

记 $M(n,\mathbb{C})$ 为 n 阶复方阵的全体, 它可以和 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 等同. 考虑如下作用

$$\begin{aligned} F: GL(n,\mathbb{C}) \times M(n,\mathbb{C}) &\to M(n,\mathbb{C}) \\ (A,K) &\mapsto AKA^* \end{aligned}$$

其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置. 于是对任何固定的 $K \in M(n,\mathbb{C})$, 迷向子群

$$GL(n,\mathbb{R})_K = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AKA^* = K\}$$

为闭 Lie 子群.

特别地, $K = I_n$ 时, 迷向子群为酉群

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^* = I_n\},$$

它是紧致连通的维数为 n^2 维的 Lie 群, 特殊酉群 $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ 为它的闭 Lie 子群.

习题 1.6

1. 计算 Lie 群的逆映射的切映射.
2. Lie 群的含单位元 e 的连通分支也是 Lie 群, 且 Lie 群的各分支之间是微分同胚的.

3. 证明, 连通拓扑群的离散正规子群必定含于其中心内.

4. 证明, 拓扑群的基本群是交换群.

5. 证明, 一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 恰有两个道路分支 (提示: 考虑矩阵的极分解); 证明复的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$ 是道路连通的.

6. 试说明可逆实上三角 n 阶方阵的全体组成一个 Lie 群.

7. 用例 1.6.8 说明 $SL(n,\mathbb{R})$ 为 Lie 群, 并计算其维数.

8. 说明 Lie 群同态的像是 Lie 子群.

9. 说明微分流形的复迭空间仍具有自然的微分结构, 并且任何为微分流形均存在单连通的复迭流形.

10. 说明 Lie 群的复迭空间仍然具有自然的 Lie 群结构.

11. 证明 $SL(2,\mathbb{R})$ 同胚于 $D^2 \times S^1$, 其中 D^2 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘.

12. 证明 $SO(2)$ 与 S^1 微分同胚, $SO(3)$ 与 RP^3 微分同胚, $SU(2)$ 与 S^3 微分同胚.

13. 证明 $U(n)$ 微分同胚于 $S^1 \times SU(n)$.

第二章　流形上的微积分

本章考虑流形上的微积分. 在数学分析中, 我们研究欧氏空间以及函数或向量值的函数; 对于微分流形上的微积分, 我们研究的对象是函数的推广, 即各种向量丛的截面, 特别是张量丛的截面, 即张量场. 其中, 微分形式是一类特殊的张量场, 我们将考虑微分形式的积分, 并证明微积分的基本定理, 即重要的 Stokes 积分公式.

§2.1　切丛和切向量场

设 M 为微分流形, 我们在前一章定义了切空间和切向量, 现在我们进一步把它们整体化. 首先定义微分流形的切丛. 任给 $p \in M$, 记 T_pM 为 p 处的切空间, 令

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM,$$

TM 就是 M 上所有切向量组成的集合, 下面我们在 TM 上定义拓扑. 定义投影映射 $\pi : TM \to M$　为

$$\pi(X_p) = p, \quad \forall\ X_p \in T_pM.$$

设 (U, φ) 为 M 的任一局部坐标系, 其坐标函数为 $\{x^i\}_{i=1}^n$, 定义映射 θ 如下

$$\begin{aligned} \theta : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_pM \quad &\to \quad U \times \mathbb{R}^n \\ X_p \quad &\mapsto \quad (p, X_p(x^1), X_p(x^2), \cdots, X_p(x^n)). \end{aligned}$$

θ 为一一满射, 它诱导了 $\pi^{-1}(U)$ 上的拓扑, 使得在这个拓扑下 θ 为同胚. 一般地, 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为 M 的局部坐标覆盖, 则我们这样定义 TM 上的拓扑: V 为 TM 上的开集当且仅当 $\theta_\alpha(V \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ 均为开集. 不难验证这是 TM 上定义好的一个拓扑, 在这个拓扑下 π 为开映射, TM 为 A_2 和 T_2 的.

下面我们说明 TM 具有微分结构. 事实上, $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), (\varphi_\alpha, id) \circ \theta_\alpha)\}$ 就组成一个坐标覆盖, 其中复合映射

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha, id) \circ \theta_\alpha : \pi^{-1}(U) \quad &\to \quad \mathbb{R}^{2n} \\ X_p \quad &\mapsto \quad (\varphi(p), X_p(x^1), X_p(x^2), \cdots, X_p(x^n)) \end{aligned}$$

为 $\pi^{-1}(U)$ 上的坐标映射. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 记

$$\begin{aligned} g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \quad &\to \quad GL(n, \mathbb{R}) \\ p \quad &\mapsto \quad J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)), \end{aligned}$$

$g_{\beta\alpha}$ 为光滑映射. 简单的计算表明, $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$ 上的坐标转换映射形如

$$\begin{aligned}[(\varphi_\beta, id)\circ\theta_\beta]\circ[(\varphi_\alpha, id)\circ\theta_\alpha]^{-1}:\ &\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n\\ &(x,a)\ \mapsto(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x),\ g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x))a),\end{aligned}$$

因而是光滑的. 这就说明 TM 为 $2n$ 维的光滑流形, 并且在上面的微分结构下, 投影 π 是光滑映射.

定义 2.1.1 (切丛)**.** *如上定义的微分流形 TM 称为 M 的切丛, π 称为切丛的投影.*

有了切丛的概念, 我们就可以定义切向量场了.

定义 2.1.2 (向量场)**.** *设 $X: M\to TM$ 为 C^k 映射, 如果 $\pi\circ X = id_M$ 为 M 上的恒同映射, 则称 X 为 M 上的 C^k 切向量场, 有时简称向量场.*

粗略地说, 向量场 X 就是在每一点 $p\in M$ 指定 p 处的一个切向量 X_p 的映射. 显然, 我们可以局部地定义 C^k 向量场. 下面的引理就给出了向量场可微程度的判别办法.

引理 2.1.1. *设 M 为微分流形, U 为 M 上的开集. 则*

(1) X 为 U 上的 C^k 切向量场当且仅当对 M 的任意局部坐标系 (V,ψ),

$$X(p) = X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\quad p\in U\cap V,$$

其中 $a^i = X(x^i)$ 为 $U\cap V$ 上的 C^k 函数;

(2) X 为 U 上的光滑切向量场当且仅当对任意光滑函数 $f: U\to\mathbb{R}$, Xf 为 U 上光滑函数, 其中

$$Xf(p) = X_pf,\quad p\in U.$$

证明. (1) 只要将 X 在 TM 和 M 的局部坐标系下写出局部表示即可, 细节留给读者.

(2) 如果 X 为 U 上光滑向量场, 则对任意局部坐标系 (V,φ) 有

$$Xf = (\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i})f = \sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i},$$

即 Xf 为光滑函数.

反之, 如果对任意光滑函数 f, Xf 均为光滑函数, 则由于我们只需考虑局部性质, 故对于 U 内的局部光滑函数, Xf 也是局部光滑函数. 特别地, 对于局部坐标函数 x^i, $X(x^i)$ 为局部光滑函数, 由 (1) 即知 X 是光滑的. □

以后我们将看到, 切丛是一个特殊的向量丛, 而切向量场就是向量丛的一个截面. 恒为零的向量场显然是光滑的, 这是零截面, 它的像是 TM 的正则子流形且与 M 微分同胚, 有时就用 M 表示. M 上的光滑向量场的全体记为 $C^\infty(M;TM)$.

例 2.1.1. 基向量场.

如果 $\{x^i\}$ 为 U 上的局部坐标函数, 则

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: U \to \pi^{-1}(U), \quad p \to \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

为 U 上的局部光滑向量场.

例 2.1.2. 梯度场.

$\mathbb{R}^n$ 上的整体坐标给出了 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的整体坐标, $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 X 形如

$$X(x) = (x, X_x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $X_x \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, 因此, 我们通常就用映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场. 例如, 如果 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则

$$\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$$

定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量场, 称为 f 的梯度场.

定义 2.1.3 (Lie 括号)**.** *设 X, Y 为 M 上的光滑向量场, 给定 $p \in M$, 定义*

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad \forall\ f \in C^\infty(M).$$

根据下面的计算, $[X,Y]_p \in T_pM$, 因而 $[X,Y]$ 定义了一个新的光滑向量场, 称为 X 和 Y 的 Lie 括号积.

我们来说明 $[X,Y]_p$ 为切向量. 显然, $[X,Y]_p$ 是线性算子, 我们只需验证其导子性质: 对于光滑函数 f, g, 计算如下

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\
&= X_p(f \cdot Yg + g \cdot Yf) - Y_p(f \cdot Xg + g \cdot Xf) \\
&= f(p)X_p(Yg) + (Y_pg) \cdot X_pf + g(p)X_p(Yf) + (Y_pf)X_pg \\
&\quad - f(p)Y_p(Xg) - (X_pg)(Y_pf) - g(p)Y_p(Xf) - (X_pf)(Y_pg) \\
&= f(p)(X_p(Yg) - Y_p(Xg)) + g(p)(X_p(Yf) - Y_p(Xf)) \\
&= f(p)[X,Y]_pg + g(p)[X,Y]_pf.
\end{aligned}$$

这说明 $[X,Y]_p$ 的确为切向量, 对于光滑函数 f, $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ 亦为光滑函数, 由上面的引理知 $[X,Y]$ 为光滑向量场. 显然, 对于局部的光滑向量场, 我们也可以定义 Lie 括号积运算. Lie 括号运算具有以下性质:

- (反称性和双线性性) $[X,Y] = -[Y,X]$, $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z]$, $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $X,Y,Z \in C^\infty(M;TM)$;
- $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$, 其中 f,g 为任意光滑函数;
- (Jacobi 恒等式) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$;
- $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, 其中 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 为局部坐标;
- 设向量场 X, Y 有如下局部表示

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

  则 $[X,Y]$ 有如下局部表示

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

这些性质的证明都是直接的, 我们留给读者. 这些性质表明, 光滑向量场的全体在 Lie 括号运算下是一个 Lie 代数. 所谓 Lie 代数是指某个域 F 上的向量空间 V 连同运算

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\to V \\ (X,Y) &\mapsto [X,Y] \end{aligned}$$

且运算 $[,]$ 满足以下条件:

(1) $[X,Y] = -[Y,X]$, $\forall\ X,Y \in V$;

(2) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z]$, $\forall\ \lambda,\mu \in F$, $X,Y,Z \in V$;

(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$, $\forall\ X,Y,Z \in V$.

如果 W 为 V 的子线性空间, 且 W 关于运算 $[,]$ 是封闭的, 则称 W 为 Lie 子代数.

下面我们考察映射和向量场之间的关系. 首先, 如果 $f: M \to N$ 为光滑映射, 则定义整体的切映射 $f_*: TM \to TN$ 如下

$$f_*|_{T_pM} = f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N.$$

由切丛上微分结构的定义直接验证 f_* 为光滑映射, 且 $f \circ \pi = \pi \circ f_*$.

定义 2.1.4 (f 相关)**.** 设 $f: M \to N$ 为光滑映射, $X: M \to TM$, $Y: N \to TN$ 分别为 M, N 上的光滑向量场. 如果 $f_* \circ X = Y \circ f$, 则称向量场 X 与 Y 是 f 相关的.

注. 如果 φ 是 N 上的光滑函数, 则向量场 X 与 Y 是 f 相关的意味着

$$X_p(\varphi \circ f) = Y_{f(p)}\varphi, \quad \forall\, p \in M.$$

上式也可以改写为

$$X(\varphi \circ f) = (Y\varphi) \circ f,$$

这也可以作为 f 相关的定义.

命题 2.1.2. 设 X_1, X_2 为 M 上的光滑向量场, Y_1, Y_2 为 N 上的光滑向量场, 如果 X_i 和 Y_i 是 f 相关的, $i = 1, 2$, 则 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 也是 f 相关的.

证明. 给定 N 上的光滑函数 φ, 我们有如下计算:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]_p(\varphi \circ f) &= X_1(X_2(\varphi \circ f)) - X_2(X_1(\varphi \circ f)) \\ &= X_1((Y_2\varphi) \circ f) - X_2((Y_1\varphi) \circ f) \\ &= Y_1(Y_2(\varphi)) \circ f - Y_2(Y_1(\varphi) \circ f \\ &= ([Y_1, Y_2]\varphi) \circ f, \end{aligned}$$

即 $f_* \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f$. □

一般地, 如果 X 为 M 上的光滑向量场, 则 $f_* \circ X$ 不一定是 Y 上的向量场. 如果 $f: M \to N$ 是微分同胚, 则我们可以定义一个 "前推" 映射, 它把 M 上的向量场映为 N 上的向量场: 如果 X 为 M 上的向量场, 则令

$$f_*X: N \to TN, \quad q \to f_{*f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)},$$

此时 f_*X 为 N 上定义好的光滑向量场, 且

推论 2.1.3. 设 $f: M \to N$ 为微分同胚, X, Y 为 M 上的光滑向量场, 则

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

例 2.1.3. 沿曲线的向量场.

设 $\sigma: I \to M$ 为光滑曲线, Y 为 M 上的切向量场. 在区间 I 上取参数 t, 则 $\frac{\partial}{\partial t}$ 为 I 上的光滑向量场, 它和 Y 是 σ 相关的当且仅当

$$Y_{\sigma(t)} = \sigma'(t), \quad t \in I.$$

定义 2.1.5 (积分曲线). *设 X 为光滑向量场, $\sigma:(a,b)\to M$ 为光滑曲线. 如果*

$$\sigma'(t)=X_{\sigma(t)},\quad \forall\ t\in(a,b),$$

则称 σ 为 X 的积分曲线或流线.

例 2.1.4. 矩阵的指数次幂.

设 $A\in M_{n\times n}$, 定义

$$e^A=I_n+A+\frac{1}{2}A+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots,$$

则 $e^A\in GL(n,\mathbb{R})$. 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义向量场 X_A 如下:

$$X_A(v)=Av,\quad v\in\mathbb{R}^n,$$

则 $\sigma(t)=e^{tA}v_0$ $(t\in\mathbb{R})$ 为 X_A 的积分曲线.

定理 2.1.4 (积分曲线的存在惟一性). *设 X 为光滑向量场, 则对任意 $p\in M$, $c\in\mathbb{R}$, 存在 $\epsilon>0$ 以及惟一的积分曲线 $\sigma:(c-\epsilon,c+\epsilon)\to M$, 使得 $\sigma(c)=p$.*

证明. 取 p 附近的局部坐标系 (U,φ), 在 U 内 X 可以表示为

$$X=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 a^i 均为 U 中光滑函数. 则在 U 内 σ 为经过 p 的积分曲线当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x^i\circ\sigma(t)=a^i(x^1\circ\sigma,x^2\circ\sigma,\cdots,x^n\circ\sigma),\\ \quad x^i\circ\sigma(c)=x^i(p),\quad i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

由常微分方程组解的存在惟一性 (参见本书附录) 知, 这个方程组在局部上的解是存在惟一的. □

根据常微分方程组的理论, 积分曲线 σ 光滑依赖于 c 和 p. 特别地, 对于紧致集合 K, 存在 K 的开邻域 V, 以及 $\epsilon>0$, 使得对任意 $q\in V$, 均存在经过 q 的积分曲线

$$\sigma_q:(-\epsilon,\epsilon)\to M,\quad \sigma_q(0)=q.$$

利用常微分方程组解的存在惟一性就得到以下结果

定理 2.1.5. *设 X 为 M 上的光滑向量场, $p\in M$. 则存在 p 的开邻域 V 及 $\epsilon>0$, 使得存在光滑映射 $\phi:(-\epsilon,\epsilon)\times V\to M$ 满足以下条件*

(1) $\phi(\cdot,q)$ 是经过 q 的积分曲线, $\forall\ q\in V$.

(2) $\phi(0,q)=q$, $\forall\ q\in V$; 且当 $|s|,|t|,|s+t|<\epsilon$ 时, 如果 $q,\phi_t(q)=\phi(t,q)\in V$, 则

$$\phi_{s+t}(q)=\phi_s\circ\phi_t(q).$$

(3) $\phi_t:V\to\phi_t(V)$ 为微分同胚, $|t|<\epsilon$.

我们把定理中的 $\{\phi_t\}$ 称为由 X 生成的一族局部单参数变换群.

定义 2.1.6 (单参数变换群). 依赖于参数 $t\in\mathbb{R}$ 的一族微分同胚 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 如果满足下列条件

(1) $\phi:\mathbb{R}\times M\to M$, $\phi(t,p)=\phi_t(p)$, 为光滑映射;

(2) $\phi_0=id$;

(3) $\phi_{s+t}=\phi_s\circ\phi_t$, $\forall\ s,t\in\mathbb{R}$.

则之称为光滑单参数变换群.

如果用 Lie 群作用的语言来说, 则光滑单参数变换群可以看成实数加群 $\mathbb{R}$ 在 M 上的一个光滑作用. 一族光滑的单参数变换群在 M 上决定了光滑向量场

$$X(p)=(\phi(t,p))'(0),$$

且 $\phi(\cdot,p)$ 是 X 的经过 p 的积分曲线. 反之, 如果向量场 X 生成了 M 的单参数变换群, 则称 X 为 M 上的完备向量场, 这等价于说 X 的积分曲线都可以定义在整个 $\mathbb{R}$ 上.

例 2.1.5. 不完备的向量场.

在 $(0,1)$ 上考虑向量场 $X=\frac{\partial}{\partial t}$, 则经过 $t_0\in(0,1)$ 的积分曲线为 $\sigma_{t_0}(t)=t+t_0$, σ_{t_0} 的定义域显然不能为整个 $\mathbb{R}$. 因此 X 不是完备的.

对于 M 上的光滑向量场 X, 记

$$\operatorname{supp}X=\overline{\{p\in M\mid X(p)\neq 0\}},$$

称为 X 的支集. 我们有

定理 2.1.6. 微分流形上具有紧致支集的光滑向量场都是完备的.

证明. 设 X 为 M 上的光滑向量场, 且其支集 $K=\operatorname{supp}X$ 紧致. 由前面的说明, 存在 $\epsilon>0$ 以及包含 K 的开邻域 V, 使得 X 生成了局部单参数变换群 $\{\phi_t\}|_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, ϕ_t 均为从 V 到 $\phi_t(V)$ 的微分同胚. 我们把 ϕ_t 的定义延拓到 K 之外:

$$\phi_t(p)=p,\quad p\notin K.$$

延拓后 ϕ_t 的定义是恰当的, 且仍为光滑映射. 这样我们得到了光滑映射 $\phi:(-\epsilon,\epsilon)\times M\to M$, 使得每个 $\phi_t=\phi(t,\cdot)$ 都是从 M 到 M 的微分同胚.

现在我们对于 $|t|\geqslant\epsilon$ 定义 ϕ_t. 如果 $|t|\geqslant\epsilon$, 我们把 t 写成如下形式

$$t=k(\frac{\epsilon}{2})+r,\ k \text{ 为整数},\ |r|<\frac{\epsilon}{2}.$$

令

$$\phi_t=\begin{cases}\phi_{\frac{\epsilon}{2}}\circ\cdots\phi_{\frac{\epsilon}{2}}\circ\phi_r, & k\geqslant 0 \text{ 时 } \phi_{\frac{\epsilon}{2}} \text{ 复合 } k \text{ 次},\\ \phi_{-\frac{\epsilon}{2}}\circ\cdots\phi_{-\frac{\epsilon}{2}}\circ\phi_r, & k<0 \text{ 时 } \phi_{-\frac{\epsilon}{2}} \text{ 复合 } -k \text{ 次}.\end{cases}$$

则可以验证 $\{\phi_t\}$ 是定义好的由 X 生成的单参数变换群. □

推论 2.1.7. 紧致微分流形上的光滑向量场都是完备的.

利用 (局部) 单参数变换群我们可以重新给出向量场的 Lie 括号积的一个解释. 设 X, Y 为 M 上的光滑向量场, X 生成的局部单参数群为 $\{\varphi_t\}$. 对 $p\in M$, 定义

$$(L_XY)(p)=\lim_{s\to 0}\frac{(\varphi_{-s})_*Y_{\varphi(s)}-Y_p}{s}=\frac{d}{dt}\Big|_{s=0}(\varphi_{-s})_*Y_{\varphi(s)},$$

其中极限是在切空间 T_pM 中求的, 我们称 L_XY 是 Y 关于 X 的 Lie 导数.

引理 2.1.8. 设 $f:(-\epsilon,\epsilon)\times M\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 $f(0,p)=0$, $\forall\ p\in M$. 则存在光滑函数 $g:(-\epsilon,\epsilon)\times M\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(s,p)=sg(s,p),\quad g(0,p)=\frac{\partial f}{\partial s}(0,p),\quad \forall\ p\in M.$$

证明. 由微积分基本公式, 有

$$\begin{aligned}f(s,p)=f(s,p)-f(0,p)&=\int_0^1\frac{d}{dt}f(st,p)dt\\&=s\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}f(st,p)dt\\&=sg(s,p).\end{aligned}$$

其中 $g(0,p)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}f(0,p)dt=\frac{\partial f}{\partial s}(0,p)$. □

定理 2.1.9. 设 X, Y 如上, 则

(1) $L_XY=[X,Y]$;

(2) 设 $h:M\to M$ 为微分同胚, 则

$$h_*X=X\Longleftrightarrow\varphi_s\circ h=h\circ\varphi_s,\quad\forall\ s.$$

证明. (1) 对任意 $p \in M$, 设 f 为 p 附近的光滑函数, 由上面的引理,

$$f \circ \varphi_t - f = tg_t, \quad g_0 = Xf.$$

我们计算如下:

$$\begin{aligned}
(L_X Y)(p)f &= \lim_{s \to 0} \frac{(\varphi_{-s})_* Y_{\varphi(s)} - Y_p}{s} f \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [Y_{\varphi(s)}(f \circ \varphi_{-s}) - Y_p f] \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [Y_{\varphi(s)}(f) - Y_p f] - \lim_{s \to 0} Y_{\varphi(s)}(g_{-s}) \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [Yf(\varphi(s)) - Yf(p)] - Y_p(g_0) \\
&= X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X, Y]_p f.
\end{aligned}$$

(2) 考虑 M 上的微分同胚族 $\{h \circ \varphi_t \circ h^{-1}\}$, 这仍为单参数变换群, 且由向量场 $h_* X$ 生成, 因此 $h_* X = X$ 当且仅当

$$h \circ \varphi_t \circ h^{-1} = \varphi_t,$$

即 h 和 φ_t 均可交换. □

推论 2.1.10. *设 X, Y 如上, Y 生成的局部单参数变换群为 $\{\psi_t\}$, 则*
(1) $[X, Y] = 0$ 当且仅当 $(\varphi_s)_* Y = Y, \ \forall\, s$;
(2) $[X, Y] = 0$ 当且仅当 $\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s, \ \forall\, s, t$.

证明. (1) 如果 $(\varphi_s)_* Y = Y$, 则由 Lie 导数的定义,

$$(L_X Y)(p) = \lim_{s \to 0} \frac{(\varphi_{-s})_* Y_{\varphi(s)} - Y_p}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{Y_p - Y_p}{s} = 0.$$

反之, 如果 $[X, Y] = 0$, 则 $T_p M$ 中的曲线 $((\varphi_t)_* Y)_p$ 关于 t 的导数为零, 因而恒为 Y_p, 即 $(\varphi_t)_* Y = Y$.

(2) 利用 (1) 和上面定理中的 (2) 即可. □

下面我们用上述结果研究 Lie 群.

定义 2.1.7. *设 M 为微分流形, 如果存在光滑映射 $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$, 使得对任意 $p \in M$, $f|_{T_p M} : T_p M \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$ 为线性同构, 则称 M 是可平行化的.*

引理 2.1.11. *如果 M 可平行化, 则映射 f 为微分同胚; 并且 M 可平行化当且仅当 M 上存在处处线性无关的 n 个光滑切向量场.*

证明. 设 M 是可平行化的, $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ 为可平行化映射. 由定义, f 是光滑的一一满射. 下面说明 f 是非退化的, 即 f_* 总是满射, 这样由逆映射定理

即知 f 为微分同胚. 事实上, 任取 $X_p \in TM$, 记 $f(X_p) = (p, v)$, 根据定义, 显然 $f_{*X_p}(T_{X_p}TM) \supset \{0\} \times T_v\mathbb{R}^n$. 另一方面, 记 $\pi_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M$ 为向 M 的投影, 则 $\pi_1 \circ f = \pi$. 由于 π_* 为满射, 故 $(\pi_1)_* \circ f_{*X_p}(T_{X_p}M) = T_pM$, 这说明 f_* 为满射.

设 M 可平行化, 则 f 为微分同胚, 记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 令

$$X_i : M \to TM, \quad X_i(p) = f^{-1}(p, e_i), \ p \in M,$$

则 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为 M 上处处线性无关的光滑向量场.

反之, 如果 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为 M 上处处线性无关的光滑向量场, 则对任意 $X_p \in TM$, X_p 可表示为

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \cdot X_i(p).$$

令

$$f : TM \to M \times \mathbb{R}^n, \ f(X_p) = (p, a^1(p), a^2(p), \cdots, a^n(p)),$$

f 就是可平行化映射. □

下面我们说明 Lie 群都是可平行化的. 设 G 为 Lie 群, 给定单位元 e 处的切向量 X_e, 令

$$X(g) = (L_g)_* X_e, \quad g \in G.$$

则 $X(g)$ 为 g 处切向量, 且

$$(L_h)_* X(g) = (L_h)_*(L_g)_* X_e = (L_{hg})_* X_e = X(hg), \quad \forall\ h \in G.$$

映射 $g \to X(g)$ 定义了 G 上的向量场 X, 且 $(L_h)_* X = X$, 称之为 G 上的左不变向量场.

命题 2.1.12. (1) *Lie 群 G 上的左不变向量场为光滑向量场;*
(2) *左不变向量场都是完备的向量场;*
(3) *左不变向量场的 Lie 括号积仍为左不变向量场;*
(4) *Lie 群都是可平行化的.*

证明. (1) 设 $X_e \in T_eG$ 生成的左不变向量场为 X, 任给 G 上的光滑函数 f, 有

$$Xf(g) = X(g)f = (L_g)_* X_e f = X_e(f \circ L_g), \quad g \in G.$$

取经过 e 的光滑曲线 $\sigma : I \to G$, 使得 $\sigma'(0) = X_e$, 则

$$Xf(g) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(g\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f \circ \mu(g, \sigma(t)),$$

其中 μ 是 G 上的乘积运算. 复合函数 $f \circ \mu(g, \sigma(t))$ 是 $G \times I$ 上的光滑函数, 因而 Xf 为 G 上的光滑函数, 即 X 为光滑向量场.

(2) 如果 σ 为左不变向量场 X 的积分曲线, 则 $(L_g)\circ\sigma$ 也是 X 的积分曲线, 特别地, 如果 $t_1, t_2 \in I$, $t_1+t_2 \in I$, 则 $\sigma(t_1)\sigma(t_2) = \sigma(t_1+t_2)$. 由此易见 σ 的定义域可以延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上, 即 X 为完备的光滑向量场.

(3) 设 X, Y 为左不变向量场, 则

$$(L_g)_*[X,Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X,Y], \quad \forall\ g \in G.$$

因此 $[X,Y]$ 也是左不变向量场.

(4) 取 T_eG 的一组基 $\{X_{ie}\}_{i=1}^n$, 它们生成的左不变向量场 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是处处线性无关的光滑向量场, 因此 G 是可平行化的. □

根据这个命题, 我们可以在 T_eG 上定义 Lie 代数运算 $[,]$: 设 $X_e, Y_e \in T_eG$, 它们分别生成左不变向量场 X, Y, 定义

$$[X_e, Y_e] = [X,Y]_e,$$

$(T_eG,\ [,])$ 是有限维 Lie 代数, 有时记为 $\mathfrak{g}$.

定义 2.1.8 (指数映射)**.** *设 G 为 Lie 群, 任取 $X_e \in T_eG$, X_e 生成左不变向量场 X, X 生成的单参数变换群为 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 令*

$$\exp: T_eG \to G, \quad \exp(X_e) = \varphi_1(e) = \varphi(1,e),$$

称 exp 为 G 的指数映射.

指数映射有以下简单性质:

命题 2.1.13. *设 $X \in T_eG$, 则*

(1) $\exp(tX) = \varphi(t,e), \quad t \in \mathbb{R}$;

(2) $\exp((t_1+t_2)X) = \exp(t_1X)\cdot\exp(t_2X), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

(3) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$;

(4) 指数映射 exp 为光滑映射, 且切映射

$$\exp_{*0}: T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}$$

为恒同映射, 从而 exp 在 $0 \in \mathfrak{g}$ 附近为微分同胚.

证明. (1) 如果 X 生成的单参数变换群为 $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, 则 tX 生成的单参数变换群为 $\{\varphi_{ts}\}_{s\in\mathbb{R}}$. 因此, 由指数映射的定义, 有

$$\exp(tX) = \varphi_t(e) = \varphi(t,e).$$

(2) 由 (1) 得

$$\exp((t_1+t_2)X) = \varphi(t_1+t_2, e) = \varphi_{t_1}(e)\varphi_{t_2}(e) = \exp(t_1X)\cdot\exp(t_2X).$$

(3) 在 (2) 中令 $t_1 = t$, $t_2 = -t$ 即可.

(4) exp 的光滑性是由积分曲线对参数的光滑依赖性决定的. 我们将 T_eG 在原点 0 处的切空间和自身等同, 设 $X \in T_eG$, 则 $\sigma(t) = tX$ 为 T_eG 中的光滑曲线, 且 $\sigma'(0) = X$, 于是

$$\exp_{*0}X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(\sigma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(t,e) = X,$$

即 exp 的切映射在 0 处为恒同映射. □

例 2.1.6. 单位圆周的指数映射.

$S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$, S^1 按复数的乘法成为 Lie 群. 在单位元 1 处, S^1 的切空间为 $T_1S^1 \cong \{i\theta \,|\, \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$, θ 生成的单参数变换群为 $\varphi(t,g) = ge^{it\theta}$, $t \in \mathbb{R}$, $g \in S^1$. 因此, S^1 在 1 处的指数映射为

$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, \quad \exp(\theta) = e^{i\theta}.$$

例 2.1.7. 一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 的指数映射.

在单位元 I_n 处, 其切空间为 $M_{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$, 为了强调它是 Lie 代数, 通常把切空间记为 $gl(n,\mathbb{R})$. 设 $A \in gl(n,\mathbb{R})$, A 决定的左不变向量场记为 X_A. 设 σ 是从 I_n 出发的 $GL(n,\mathbb{R})$ 中光滑曲线, $\sigma'(0) = A$, 则

$$X_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} B\cdot\sigma(t) = B\cdot A \in T_BGL(n,\mathbb{R}) = M_{n\times n}.$$

设 $\tau(t)$ 是经过 I_n 的 X_A 的积分曲线, 则

$$\frac{d}{dt}\tau(t) = X_A(\tau(t)) = \tau(t)\cdot A, \quad \tau(0) = I_n.$$

这个方程有惟一的解

$$\tau(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

因此指数映射为

$$\exp : gl(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), \quad \exp(A) = e^A.$$

下面计算 $gl(n,\mathbb{R})$ 中的 Lie 代数运算 $[,]$. 设 $A, B \in gl(n,\mathbb{R})$, A, B 生成的单参数变换群分别为

$$\varphi(t,P) = P\cdot e^{tA}, \quad \psi(t,P) = P\cdot e^{tB}, \; P \in GL(n,\mathbb{R}).$$

因此

$$\begin{aligned}[A,B] &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\varphi_{-s})_*(X_B(\varphi_s)) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}[X_B(\varphi_s)\cdot e^{-sA}] \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}[e^{sA}\cdot B\cdot e^{-sA}) \\ &= A\cdot B - B\cdot A.\end{aligned}$$

习题 2.1

1. 证明 TM 总是可定向的微分流形.
2. 证明, 切丛的投影 $\pi: TM \to M$ 为光滑淹没.
3. 证明, 任给 M 中的光滑曲线 σ, 总存在 TM 中的光滑曲线 $\tilde{\sigma}$, 使得 $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.
4. 将恒为零的向量场看成从 M 到 TM 的映射, 说明这是一个嵌入.
5. 验证我们所列举的向量场的 Lie 括号积的性质.
6. 验证整体切映射 f_* 的光滑性.
7. 设 X_p, X_q 分别是 M 上两点 p, q 处的切向量. 证明, 存在 M 上的光滑向量场 X, 使得 $X(p) = X_p$, $X(q) = X_q$.
8. 在流形 M 上任取两点 p, q, 证明存在 M 到自身的微分同胚 f, 使得 $f(p) = q$.
9. 说明指数映射 $e: M_{n\times n} \to GL(n, \mathbb{R})$ 为光滑映射.
10. 将 Lie 导数看成 $C^\infty(M; TM)$ 的算子, 证明
$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}, \quad \forall\ X, Y \in C^\infty(M; TM).$$
11. 设 $h: M \to N$ 为微分同胚, M 上的向量场生成的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}$, 则 N 上的向量场 h_*X 生成的单参数变换群为 $\{h \circ \phi_t \circ h^{-1}\}$.
12. 计算酉群 $U(n)$ 和特殊线性群 $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数.

§2.2 可积性定理及应用

这一节我们利用向量场来研究子流形, 我们的目的之一是将前一节中向量场及其积分曲线的理论推广到多个向量场的情形, 并用所得结果进一步研究 Lie 群.

引理 2.2.1. *设 X 为微分流形 M 上的光滑向量场, $p \in M$. 如果 $X(p) \neq 0$, 则存在 p 附近的局部坐标 $\{y^i\}_{i=1}^n$, 使得在 p 附近*
$$X = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

证明. 通过选取 p 附近的局部坐标, 不妨设 $M=\mathbb{R}^n$, $p=0$. 向量场 X 在 p 附近决定了单参数变换群 $\{h_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, $h_t: V\to h_t(V)$ 为微分同胚. 在 $p=0$ 附近 X 可以表示为

$$X=\sum_{i=1}^n a^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i},$$

因为 $X(p)\neq 0$, 不妨设 $a^1(p)\neq 0$. 记 $V'=\{(x^2,\cdots,x^n)\,|\,(0,x^2,\cdots,x^n)\in V\}$, 考虑如下映射

$$\varphi:(-\epsilon,\epsilon)\times V'\to M,\ \ \varphi(t,x^2,\cdots,x^n)=h_t(0,x^2,\cdots,x^n).$$

显然, $\varphi(0,x^2,\cdots,x^n)=(0,x^2,\cdots,x^n)$, φ 在 $p=0$ 处的 Jacobian 为

$$J\varphi(0)=\begin{pmatrix} a^1(0) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ a^n(0) & & \mathrm{I}_{n-1} & \end{pmatrix},$$

因此 φ 在 0 附近秩为 n. 由逆映射定理, φ 在 0 附近为微分同胚. 由于 $\varphi_*\frac{\partial}{\partial t}=X$, 故利用 φ^{-1} 作为 p 附近的局部坐标映射, 重新把它的第一个坐标函数记为 y^1, 则 $X=\frac{\partial}{\partial y^1}$. □

这个引理说明非零的向量场局部上可以看成是坐标向量场. 如果 X,Y 均为 p 附近的局部光滑向量场, 且 X,Y 在 p 处线性无关, 则是否 X,Y 可以同时看成坐标向量场? 我们知道, 坐标向量场之间的 Lie 括号积为零, 因此一个必要的条件就是 $[X,Y]=0$. 仍然利用单参数变换群, 我们说明这也是必要条件.

引理 2.2.2. *设 $X_1,\cdots,X_k$ 为 M 上的光滑向量场, $p\in M$. 如果 $X_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 在 p 处线性无关, 且 $[X_i,X_j]=0$, $1\leqslant i,j\leqslant k$, 则存在 p 附近的局部坐标 $\{y^i\}_{i=1}^n$, 使得*

$$X_i=\frac{\partial}{\partial y^i},\ \ 1\leqslant i\leqslant k.$$

证明. 为了简单起见, 我们象刚才的引理一样, 设 $M=\mathbb{R}^n$, $p=0$. 通过适当地调整坐标次序, 不妨设

$$\{X_1(p),\cdots,X_k(p),\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$$

为 T_pM 的一组基.

记向量场 X_i 生成的局部单参数变换群为 φ^i_t, $1\leqslant i\leqslant k$. 由 $[X_i,X_j]=0$ 以及前节定理和推论, $\varphi^i_s\circ\varphi^j_t=\varphi^j_t\circ\varphi^i_s$, $\forall\ s,t$. 考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi:(-\epsilon,\epsilon)^k\times\mathbb{R}^{n-k} &\ \to\ M\\ (t_1,\cdots,t_k,x^{k+1},\cdots,x^n) &\ \mapsto\ \varphi^1_{t_1}\circ\cdots\varphi^k_{t_k}(0,\cdots,0,x^{k+1},\cdots,x^n). \end{aligned}$$

显然, $\varphi_*(\frac{\partial}{\partial t_1}) = X_1$, 由 $\varphi_s^i \circ \varphi_t^j = \varphi_t^j \circ \varphi_s^i$ 又可以知道 $\varphi_*(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. 因为

$$\begin{aligned}\varphi(0,\cdots,0,x^{k+1},\cdots,x^n) &= \varphi_0^1 \circ \cdots \varphi_0^k(0,\cdots,0,x^{k+1},\cdots,x^n)\\ &= (0,\cdots,0,x^{k+1},\cdots,x^n),\end{aligned}$$

因此 $\varphi_{*0}(\frac{\partial}{\partial x^l}) = \frac{\partial}{\partial x^l}|_0$, $l = k+1,\cdots,n$. 这说明 φ 在 0 附近秩为 n. 由逆映射定理, φ 在 0 附近为微分同胚. 利用 φ^{-1} 作为 p 附近的局部坐标映射就得到欲证结果. □

设 M 为微分流形. M 上的一个**分布**(distribution) $\mathcal{D}$ 是指将每一点 $p \in M$ 都映为 T_pM 的一个 k 维线性子空间 $\mathcal{D}(p)$ 的一个映射, k 称为此分布的秩. 如果对任意 $p \in M$, 均存在 p 的开邻域 U 以及 U 上的光滑向量场 $X_1,\cdots,X_k$, 使得 $\mathcal{D}(q)$ 由 $X_1(q),\cdots,X_k(q)$ 张成, $\forall\, q \in U$, 则称 $\mathcal{D}$ 为**光滑分布**.

设 $\mathcal{D}$ 为光滑分布, X 为光滑向量场. 如果对任意 $p \in M$, 均有 $X(p) \in \mathcal{D}(p)$, 则称 X 属于分布 $\mathcal{D}$, 记为 $X \in \mathcal{D}$. 如果对于任意两个属于 $\mathcal{D}$ 的光滑向量场 X, Y, 均有 $[X,Y] \in \mathcal{D}$, 则称 $\mathcal{D}$ 为**对合**(involutive)**分布**, 或**可积分布**.

设 $i: N \to M$ 为单浸入, $\mathcal{D}$ 为光滑分布. 如果对任意 $p \in N$, 均有

$$i_{*p}(T_pN) = \mathcal{D}(i(p)),$$

则称 (N,i) 为分布 $\mathcal{D}$ 的积分流形.

显然, 如果分布 $\mathcal{D}$ 由向量场 X 生成, 则积分曲线即为积分流形. 下面我们考虑一般的光滑分布. 不难看出, 如果对任意的 $p \in M$, 均存在经过 p 的积分流形, 则 $\mathcal{D}$ 是对合分布. 反之, 我们有

定理 2.2.3 (Frobenius)**.** *设 $\mathcal{D}$ 为 M 上秩为 k 的对合分布, 则对任意 $p \in M$, 存在 p 附近的局部坐标系 $\{(V,\psi)\}$, 使得形如下面的坐标片 (slice)*

$$\{q \in V \,|\, y^l(q) = c_l,\ c_l \text{ 为常数},\ l = k+1,\cdots,n\}$$

均为 $\mathcal{D}$ 的积分流形, 并且如果 (N,i) 为 $\mathcal{D}$ 的一个连通积分流形, $i(N) \subset V$, 则 $i(N)$ 含于如上某个坐标片中.

证明. 固定 $p \in M$, 在 p 附近存在光滑向量场 $X_1,\cdots,X_k$, 使得

$$\mathcal{D} = \mathrm{span}\{X_1,\cdots,X_k\}.$$

设 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 为 p 附近的局部坐标, 向量场 X_i 可表为

$$X_i(q) = \sum_{i=1}^n a_i^j(q)\frac{\partial}{\partial x^j}|_q.$$

因为 $\{X_i\}_{i=1}^k$ 线性无关, 我们不妨假设 k 阶方阵 $A = \left(a_i^j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ 在 p 的开邻域 U 上可逆. 令

$$(Y_1,\cdots,Y_k)^T = A^{-1}\cdot(X_1,\cdots,X_k)^T,$$

则仍有 $\mathcal{D}=\mathrm{span}\{Y_1,\cdots,Y_k\}$, 且

$$Y_i(q)=\frac{\partial}{\partial x^i}|_q+Z_i(q),\quad i=1,\cdots,k,\quad q\in U. \tag{2.1}$$

其中, Z_i 为 U 上的光滑向量场, 且不含 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ $(j\leqslant k)$ 分量, 即

$$Z_i\left(x^j\right)=0,\quad j\leqslant k.$$

由等式

$$\begin{aligned}[Y_i,Y_j]&=[\frac{\partial}{\partial x^i}+Z_i,\frac{\partial}{\partial x^j}+Z_j]\\&=[\frac{\partial}{\partial x^i},Z_j]+[Z_i,\frac{\partial}{\partial x^j}]+[Z_i,Z_j]\end{aligned}$$

知 $[Y_i,Y_j]$ 亦不含 $\frac{\partial}{\partial x^l}$ $(l\leqslant k)$ 分量. 另一方面, $\mathcal{D}$ 为对合分布,

$$[Y_i,Y_j]\in\mathrm{span}\{Y_1,\cdots,Y_k\}.$$

由 (2.1) 知

$$[Y_i,Y_j]=0,\quad\forall\ 1\leqslant i,j\leqslant k.$$

由上面的引理, 在 p 附近存在局部坐标邻域 (V,ψ), 使得在 V 上有

$$Y_i=\frac{\partial}{\partial y^i},\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

从而根据积分流形的定义, 如下的坐标片 (c_l 为常数)

$$\{q\in V\,|\,y^l(q)=c_l,\ j=k+1,\cdots,n\}$$

均为 $\mathcal{D}$ 的积分流形.

最后, 如果 (N,i) 为 $\mathcal{D}$ 的连通积分流形, $i(N)\subset V$, 考虑复合映射

$$N\xrightarrow{i}V\xrightarrow{\psi}\psi(V)\subset\mathbb{R}^n\xrightarrow{\pi}\mathbb{R}^{n-k},$$

其中 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k}$ 为投影

$$\pi(x^1,\cdots,x^n)=(x^{k+1},\cdots,x^n).$$

因为 $\pi_*\frac{\partial}{\partial x^i}=0$, $i=1,\cdots,k$, 故 $(\pi\circ\psi\circ i)_*=0$. 因为 N 连通, 故 $\pi\circ\psi\circ i$ 为常值映射, 从而 $i(N)$ 必定含于如上某个坐标片中. □

如果 (N,i) 为积分流形, N 是连通的且不是另一积分流形的真子集, 则称 (N,i) 为极大积分流形. 可以证明, 对于光滑对合分布, 存在经过给定点的惟一极大积分流形, 使得经过该点的任何连通积分流形均含于此极大积分流形中. 下面, 我们利用这些结论进一步研究 Lie 群.

命题 2.2.4. 设 $\varphi: H \to G$ 为 *Lie* 群同态, 则
(1) 切映射 $\varphi_{*e}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 为 *Lie* 代数同态, 即保持 $[,]$ 运算;
(2) $\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi_{*e}$, 即下列图表可交换:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\varphi_{*e}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

(3) 如果 H 为连通 *Lie* 群, $\varphi_1, \varphi_2: H \to G$ 均为 *Lie* 群同态, 则当 $(\varphi_1)_{*e} = (\varphi_2)_{*e}$ 时 $\varphi_1 = \varphi_2$.

证明. (1) 设 $X_e \in \mathfrak{h}$, X_e 生成的左不变向量场记为 X, $Y_e = \varphi_{*e} X_e$ 生成的左不变向量场记为 Y, 则

$$\begin{aligned} \varphi_{*g} X &= \varphi_{*g}(L_g)_{*e} X_e \\ &= (\varphi \circ L_g)_{*e} X_e \\ &= (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_{*e} X_e \\ &= (L_{\varphi(g)})_{*e} Y_e = Y_{\varphi(g)}. \end{aligned}$$

即 X 和 Y 是 φ 相关的. 根据前节命题 2.1.2, φ 相关的向量场的 Lie 括号积仍为 φ 相关的, 从而由 Lie 代数的定义知 φ_* 保持 Lie 括号运算.

(2) 设 $X_e \in \mathfrak{h}$, X_e 生成的经过单位元的积分曲线为 σ, 则由 (1) 的证明知, $\varphi \circ \sigma$ 为 $\varphi_{*e} X_e$ 生成的积分曲线, 于是由指数映射的定义知

$$\varphi \circ \exp(X_e) = \varphi \circ \sigma(1) = \exp \circ \varphi_{*e} X_e.$$

(3) 如果 $(\varphi_1)_{*e} = (\varphi_2)_{*e}$, 则由 (2) 即知

$$\varphi_1 \circ \exp = \varphi_2 \circ \exp : \mathfrak{h} \to G.$$

因为指数映射在 0 附近是微分同胚, 故存在 $e \in H$ 的开邻域 U, 使得 $\varphi_1|_U = \varphi_2|_U$. 因为 H 连通, 根据引理 1.6.7,

$$\bigcup_{n \geqslant 1} U^n = H.$$

因为 φ_1, φ_2 为同态, 这说明 $\varphi_1 = \varphi_2$. □

这个命题说明, Lie 子群的 Lie 代数可看成一个 Lie 子代数. 反之, 我们有

命题 2.2.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为 *Lie* 群 G 的 *Lie* 代数. 如果 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 *Lie* 子代数, 则存在惟一的连通 *Lie* 子群 (H, φ), 使得 $\varphi_{*e}(T_e H) = \mathfrak{h}$.

证明. 设 $\mathfrak{h}$ 维数为 k, 取它的一组基为 $X_1, \cdots, X_k$, 它们生成的左不变向量场仍记为 $X_1, \cdots, X_k$, 这些左不变向量场张成了 G 上的一个分布 $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ 是对合分布. 事实上, 设 X, Y 是属于 $\mathcal{D}$ 的光滑向量场, 则 X,Y 可以表示为

$$X = \sum_{i=1}^{k} a^i X_i,\ Y = \sum_{i=1}^{k} b^i X_i,$$

其中 a^i, b^i 均为光滑函数. 从而有

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{k} \{a^i b^j [X_i, X_j] + a^i X_i(b^j) X_j - b_j X_j(a^i) X_i\}.$$

因为 $\mathfrak{h}$ 为 Lie 子代数, 故 $[X_i, X_j] \in \mathrm{span}\{X_l\}_{l=1}^k$, 这说明 $[X,Y] \in \mathcal{D}$.

设 (H,φ) 为经过 e 的极大积分流形, 任取 $\sigma \in \varphi(H)$. 由于分布 $\mathcal{D}$ 在左移下不变, 故 $(H, L_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)$ 仍为经过 e 的积分流形, 从而 $L_{\sigma^{-1}} \circ \varphi(H) \subset \varphi(H)$. 特别地, $\sigma^{-1} \in \varphi(H)$. 同理, 当 $\sigma, \tau \in \varphi(H)$ 时, $\sigma\tau \in \varphi(H)$. 这就说明 $\varphi(H)$ 为 G 的子群.

为了说明 (H,φ) 为 Lie 子群, 只要说明映射

$$\alpha : H \times H \to H,\ \alpha(\sigma,\tau) = \sigma\tau$$

是光滑的即可. 注意到映射

$$\beta : H \times H \to G,\ \beta(\sigma,\tau) = \mu(\varphi(\sigma), \varphi(\tau))$$

为光滑映射, 其中 μ 为 G 中乘积运算, 由 $\beta = \varphi \circ \alpha$ 不难看出 α 也是光滑映射 (参见本节习题). 这说明 (H,φ) 为 G 的 Lie 子群, 且显然 $\varphi_*(T_e H) = \mathfrak{h}$.

惟一性: 设 (K,ψ) 为 G 的另一连通 Lie 子群, $\psi_{*e}(T_e K) = \mathfrak{h}$, 则 (K,ψ) 也是经过 e 的积分流形, 由 (H,φ) 的极大性知 $\psi(K) \subset \varphi(H)$, 从而 (见习题) 存在光滑映射 $f : K \to H$, 使得 $\psi = \varphi \circ f$, f 为单的 Lie 群同态. 因为 $\dim K = \dim H$, 因此 f 也是满的同态, 从为 Lie 群同构. □

定理 2.2.6. *设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 分别为 Lie 群 G, H 的 Lie 代数, 如果 G 是单连通 Lie 群, $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 为 Lie 代数同态, 则存在惟一的 Lie 群同态 $\varphi : G \to H$, 使得 $\varphi_{*e} = \psi$.*

证明. 只要证明存在性即可. 为此, 考虑乘积 Lie 群 $G \times H$, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. 显然, $\{(X, \psi(X)) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \mid X \in \mathfrak{g}\}$ 为 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 的 Lie 子代数. 因此存在 $G \times H$ 的 Lie 子群 (G', φ'), 使得

$$\varphi'_{*e}(T_e G') = \{(X, \psi(X)) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

记

$$\pi_1 : G \times H \to G,\ \pi_2 : G \times H \to H$$

分别为向分量 G, H 的投影同态, 则 $\pi_1 \circ \varphi : G' \to G$ 为同态, 且其切映射为满同态. 由于 $\dim G' = \dim G$, 故切映射是线性同构. 根据第一章最后一节的结果, 我们

知道 $\pi_1 \circ \varphi$ 为复迭映射. 由于 G 是单连通的 Lie 群, 故此复迭映射是一一的, 即为 Lie 群同构.

令

$$\varphi = \pi_2 \circ \varphi' \circ (\pi_1 \circ \varphi')^{-1} : G \to H,$$

则 φ 即为满足要求的 Lie 群同态. □

推论 2.2.7. *两个单连通的 Lie 群是同构的当且仅当它们的 Lie 代数同构.*

这个推论表明, 单连通的 Lie 群由其 Lie 代数惟一决定. 由 Lie 代数的表示理论可知, 每一个有限维的 Lie 代数均可视为某个一般线性群的 Lie 代数的子代数, 因而也是某个 Lie 群的 Lie 代数. 因此, 单连通 Lie 群的分类等价于 Lie 代数的分类.

定理 2.2.8 (Cartan)**.** *设 A 为 Lie 群 G 的子群. 如果 A 为闭集, 则 A 上有惟一的微分结构, 使之成为 G 的闭 Lie 子群.*

证明. 先证明微分结构的存在性. 令

$$\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \exp(tX) \in A,\ \forall\ t \in \mathbb{R}\}.$$

显然, $0 \in \mathfrak{a}$, 并且当 $X \in \mathfrak{a}$ 时 $tX \in \mathfrak{a}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. 如果 $X, Y \in \mathfrak{a}$, 则由 (见习题)

$$\exp(sX)\exp(sY) = \exp(s(X+Y) + O(s^2))$$

知

$$\lim_{n\to\infty}(\exp\frac{t}{n}X \cdot \exp\frac{t}{n}Y)^n = \exp(t(X+Y)),\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

上式用到 A 是闭子集以及关于群的运算是封闭的. 这说明

$$X, Y \in \mathfrak{a} \Longrightarrow \exp(t(X+Y)) \in A,\ \forall\ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow X+Y \in \mathfrak{a}.$$

从而 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子线性空间. 任取 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补空间, 记为 $\mathfrak{b}$, 考虑光滑映射

$$\alpha : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to G,\ \alpha(X, Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

根据指数映射的性质知 α 在 $(0,0)$ 处秩为 $n = \dim G$, 从而分别存在 $0 \in \mathfrak{a}$ 和 $0 \in \mathfrak{b}$ 的开邻域 U, V, 使得 $\alpha|_{U\times V}$ 为微分同胚, 其像为 $e \in G$ 的开邻域 W.

断言: V 可以取得充分小, 使得 $A \cap \exp(V) = \{e\}$. (反证法) 假若不然, 则存在一列 $Y_i \in V$, $Y_i \neq 0$, $Y_i \to 0$ 且 $\exp(Y_i) \in A$. 通过选取子列以及 $t_j > 0$, $t_j \to 0$, 可设 $t_j^{-1}Y_j \to Y \neq 0$, $Y \in \mathfrak{b}$. 对任意 $t > 0$, 有

$$\exp(tY) = \exp(\lim_{j\to\infty}[t_j^{-1}t]Y_j) = \lim_{j\to\infty}(\exp Y_j)^{[t_j^{-1}t]} \in A,$$

其中, $[t_j^{-1}t]$ 表示不超过 $t_j^{-1}t$ 的最大整数. 由于 $\exp(-tY) = (\exp tY)^{-1}$, 因此 $Y \in \mathfrak{a}$. 这和 $Y \in \mathfrak{b}$ 以及 $Y \neq 0$ 相矛盾.

现在我们假设 V 是充分小的邻域, 则对任意 $\sigma \in A \cap W$, σ 可写为

$$\sigma = \exp X \cdot \exp Y, \quad X \in U, \ Y \in V.$$

由 $\exp X \in A$ 知 $\exp Y \in A$, 从而 $Y = 0$, 即

$$\sigma = \exp X.$$

当 U, V 取得充分小时, $\exp^{-1}|_W$ 为微分同胚, 此时

$$A \cap W = \exp^{-1}(U)$$

这说明在 e 附近 A 为 G 的正则子流形. 因为 A 为子群, 故在任意点附近 A 也为正则子流形, 从而 A 为 G 的闭 Lie 子群. 显然, A 的 Lie 代数为 $\mathfrak{a}$.

惟一性: 如果 A 上另有微分结构, 使得 A 为 G 的 Lie 子群, 则 A 的含有单位元 e 的连通分支为一个积分流形. 不难证明, A 的 Lie 代数也是 $\mathfrak{a}$, 因此惟一性由积分流形的惟一性可得. □

定理 2.2.9. (1) *设 $\varphi : \mathbb{R} \to G$ 是从加法群 $\mathbb{R}$ 到 Lie 群 G 的连续同态, 则 φ 必为光滑 Lie 群同态;*

(2) *设 $\psi : H \to G$ 为 Lie 群之间的连续同态, 则 ψ 为光滑 Lie 群同态.*

证明. (1) 先设 $\varphi(1) \neq e$. 因为 φ 为连续同态, 故当 m 充分大时, 存在惟一的 $X_m \in \mathfrak{g}$, 使得

$$\exp X_m = \varphi(\frac{1}{m}),$$

且 $X_m \to 0$, $m \to \infty$. 通过选取子列以及 $t_m > 0$, $t_m \to 0$, 可设

$$\lim_{m\to\infty} t_m^{-1} X_m = X \in \mathfrak{g}, \ X \neq 0.$$

于是对任意 $t > 0$, 有

$$tX = \lim_{m\to\infty} t t_m^{-1} X_m = \lim_{m\to\infty} [t_m^{-1}t] X_m,$$

因而

$$\begin{aligned}
\exp(tX) &= \exp(\lim_{m\to\infty} [t_m^{-1}t] X_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} \exp([t_m^{-1}t] X_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} (\exp X_m)^{[t_m^{-1}t]} \\
&= \lim_{m\to\infty} (\varphi(\frac{1}{m}))^{[t_m^{-1}t]} \\
&= \lim_{m\to\infty} \varphi(\frac{1}{m}[t_m^{-1}t]) = \lim_{m\to\infty} \varphi(\frac{t}{m t_m}).
\end{aligned}$$

注意到 $\exp(mX_m) = \varphi(1) \neq e$, 故 $mX_m \nrightarrow 0$, 从而 $mt_m \nrightarrow 0$. 通过选取子列, 不妨设

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{mt_m} = c \in \mathbb{R},$$

则由上面的计算, 得

$$\varphi(ct) = \exp(tX),\ \forall\ t > 0.$$

这也说明 $c \neq 0$, 因此

$$\varphi(t) = \exp(tc^{-1}X),\ \forall\ t > 0.$$

因为 φ 为同态, 故上式对任意 $t \in \mathbb{R}$ 均成立, 特别地, φ 是光滑同态.

如果 $\varphi : \mathbb{R} \to G$ 为任意非平凡连续同态, 则存在 $\alpha \neq 0$, 使得 $\varphi(\alpha) \neq e$. 考虑加群同构

$$l_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ l_\alpha(x) = \alpha x,\ x \in \mathbb{R},$$

复合同态 $\varphi \circ l_\alpha$ 为连续同态, 且 $\varphi \circ l_\alpha(1) \neq e$, 根据刚才的证明, $\varphi \circ l_\alpha$ 是光滑的, 从而 φ 也是光滑的.

(2) 利用指数映射及 (1), 细节留作习题. □

根据这个定理我们知道, 在 C^0 Lie 群上至多存在一个相容的微分构造使之成为光滑 Lie 群. 反之, Gleason, Montgomery 和 Zippen 解决了 Hilbert 的第五问题, 证明了, 在每个 C^0 群上都存在一个相容的微分构造使之成为光滑 Lie 群.

习题 2.2

1. 设 $\mathcal{D}$ 为 M 上的光滑分布, 如果对任意的 $p \in M$, 均存在经过 p 的积分流形, 则 $\mathcal{D}$ 是对合分布.

2. 设 (N, φ) 为积分流形, 如果 $f : S \to M$ 为微分流形之间的光滑映射, 且 $f(S) \subset \varphi(N)$, 则存在惟一的光滑映射 $g : S \to N$, 使得 $f = \varphi \circ g$.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 群的 Lie 代数, 当 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$ 充分小时, 证明

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp\{t(X+Y) + O(t^2)\}.$$

4. 条件同上, 证明

$$\exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY)\exp(tX) = \exp\{t^2[X,Y] + O(t^3)\}.$$

5. 证明, 连通 Lie 群为交换群当且仅当它的 Lie 代数是平凡的, 即 $[,] = 0$.

6. 对 1 维连通 Lie 群加以分类.

7. 补上本节最后定理中第二部分的证明.

8. 证明, 如果 $P \in GL(n,\mathbb{R})$, 则 $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$; 如果 $AB = BA$, 则 $e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$.

9. 证明 $\det e^A = e^{tr\,A}$, 并找一个行列式大于零矩阵 B, 使得 $B \notin \exp(gl(n,\mathbb{R}))$.

§2.3 向量丛和纤维丛

在前两节我们定义了切丛, 研究了切丛的截面, 即向量场. 切丛是一种特殊的微分流形:

(1) 切丛局部上是乘积空间, 且乘积空间的第二个分量为线性空间;

(2) 切丛的局部坐标转换映射保持第二个分量的线性性.

下面我们考虑这种流形的推广.

定义 2.3.1 (向量丛). *设 E, M 为微分流形, $\pi : E \to M$ 为光滑满射. 如果存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及微分同胚 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ 满足下面的条件*

(1) $\psi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$, $\forall\, p \in U_\alpha$;

(2) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 存在光滑映射 $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R})$, 使得

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p,v) = (p,\ g_{\beta\alpha}(p)v),\ \ \forall\ p \in U_\alpha \cap U_\beta,\ \ v \in \mathbb{R}^k.$$

则称 E 为 M 上的向量丛, k 为该向量丛的秩, π 为丛投影, E 和 M 分别称为总空间和底空间.

我们也把 ψ_α 称为局部平凡化, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数. 我们还称 $\pi^{-1}(p) = E_p$ 为 p 上的纤维, 根据定义中的条件 (1), 纤维 $\pi^{-1}(p)$ 中还可自然地定义线性结构, 使之线性同构于 $\mathbb{R}^k$, 并且由条件 (2), 这样的线性结构由 $GL(k,\mathbb{R})$ 加以保持, 我们把 $GL(k,\mathbb{R})$ 称为结构群. 如果存在闭的 Lie 子群 H, 使得 $g_{\beta\alpha}(p) \in H$, $\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则称结构群可约化到子群 H.

在向量丛的定义中, 连接函数处于非常重要的地位, 这些连接函数满足如下一些性质:

$$g_{\alpha\alpha} = 1,\ \forall\ U_\alpha;\ \ g_{\beta\alpha}\cdot g_{\alpha\gamma}\cdot g_{\gamma\beta} = 1,\ \forall\ U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing.$$

特别地, $g_{\alpha\beta} = (g_{\beta\alpha})^{-1}$. 反之, 如果有这样一族光滑函数 $\{g_{\beta\alpha}\}$ 满足上述条件, 则定义商空间

$$E = \coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)/\sim,$$

其中, 等价关系 $\sim$ 定义如下: 任给 $(p,v)\in U_\alpha\times\mathbb{R}^k$, $(q,w)\in U_\beta\times\mathbb{R}^k$, 规定

$$(p,v)\sim(q,w)\Longleftrightarrow p=q,\ w=g_{\beta\alpha}(p)v.$$

E 的拓扑由商拓扑给出. 用 $[p,v]$ 表示 (p,v) 的等价类, 定义投影 $\pi:E\to M$ 为 $\pi([p,v])=p$. 则不难验证 E 在投影 π 之下成为 M 上的向量丛.

例 2.3.1. *平凡向量丛.*

令 $E=M\times\mathbb{R}^k$, $\pi:E\to M$ 是向第一个分量的投影. 则显然, E 为 M 上的向量丛, 其平凡化为恒同映射, 连接函数恒为 1 (单位矩阵).

例 2.3.2. *流形的切丛.*

设 M 为微分流形, 其切向量的全体组成的空间 $TM=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM$ 连同投影 $\pi:TM\to M$ 满足上面向量丛的条件, 这是秩为 $\dim M$ 的向量丛.

例 2.3.3. *实投影空间 RP^n 上的秩为 1 的向量丛.*

令 $E=\{(v,[w])\in\mathbb{R}^{n+1}\times RP^n\,|\,\exists\ \lambda\in\mathbb{R},$ 使得 $v=\lambda w\}$. E 是乘积流形 $\mathbb{R}^{n+1}\times RP^n$ 的子集, 其拓扑定义为子拓扑. 定义自然投影 $\pi:E\to RP^n$ 为

$$\pi((v,[w]))=[w].$$

则 E 是 RP^n 上秩为 1 的向量丛.

事实上, 令 $U_j=\{[w^1,\cdots,w^{n+1}]\in\mathbb{R}P^n\,|\,w^j\neq0\}$, $j=1,2,\cdots,n+1$. 则定义 $\psi_j:\pi^{-1}(U_j)\to U_j\times\mathbb{R}$ 为

$$\psi_j(v,[w])=([w],v^j),\quad [w]\in U_j,\ (v,[w])\in E.$$

ψ_j 为微分同胚, 且当 $i\neq j$ 时,

$$\psi_i\circ\psi_j^{-1}([w],a)=([w],\frac{w^i}{w^j}a),\quad [w]\in U_i\cap U_j,\ a\in\mathbb{R}.$$

因此连接函数 $g_{ij}:U_i\cap U_j\to GL(1,\mathbb{R})$ 为

$$g_{ij}([w])=w^i/w^j,$$

这是光滑映射. 因此 E 是 RP^n 上光滑向量丛.

我们有时把秩为 1 的向量丛称为线丛. 上例也可推广到秩不是 1 的情形.

定义 2.3.2 (截面)**.** *设 E 为 M 上的光滑向量丛, $\pi:E\to M$ 为丛投影. 如果 C^r 映射 $\sigma:M\to E$ 满足条件 $\pi\circ\sigma=id$, 即 $\sigma(p)\in\pi^{-1}(p)$, $\forall\ p\in M$, 则称 σ 为 E 的一个 C^r 截面.*

向量丛 E 上 C^r 截面的全体记为 $C^r(M;E)$, 当我们不强调可微性时, 也记为 $\Gamma(M;E)$. 截面也可以局部定义, 即只定义在 M 上的开集中. 把任何 $p\in M$ 映为纤维 E_p 中零向量的映射是一个特殊的截面, 称为零截面. 我们也可以在 $C^r(M;E)$ 中自然地定义加法和数乘运算, 使之称为向量空间, 零截面是这个空间中的零元.

例 2.3.4. 平凡向量丛的截面.

映射 $s:M\to M\times\mathbb{R}^k$ 为截面当且仅当 s 形如

$$s(p)=(p,f(p)),\quad p\in M,$$

其中, $f:M\to\mathbb{R}^k$ 为 M 上的 C^r 向量值函数. 可见, 截面实际上是函数和向量值函数的推广, 今后我们研究的对象也大多是各种向量丛的截面.

例 2.3.5. 切丛的截面.

按照我们的定义, 切丛的截面就是 M 上的切向量场. 我们有时也把一般向量丛的截面称为向量场.

按照向量丛的定义, 向量丛在局部上总可以看成平凡丛, 因此截面都有所谓的局部表示. 设 $\sigma:E\to M$ 为截面, $\{\psi_\alpha\}$ 为局部平凡化, 则

$$\psi_\alpha(\sigma(p))=(p,\sigma_\alpha(p)),\ \forall\ p\in U_\alpha.$$

其中, σ_α 为 U_α 到 $\mathbb{R}^k$ 的映射, 且当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, 有

$$\sigma_\beta(p)=g_{\beta\alpha}(p)\cdot\sigma_\alpha(p),\ \forall\ p\in U_\alpha\cap U_\beta.$$

反之, 满足上述条件的一组映射 $\{\sigma_\alpha\}$ 就决定了 E 上的一个截面.

定义 2.3.3 (丛映射)**.** *设 E_1 为 M 上的向量丛, E_2 为 N 上的向量丛, π_1, π_2 分别为丛投影. 如果 C^r 映射对 $(F,f):(E_1,M)\to(E_2,N)$ 满足条件 $\pi_2\circ F=f\circ\pi_1$, 即 $F(\pi_1^{-1}(p))\subset\pi_2^{-1}(f(p))$, $\forall\ p\in M$, 并且 F 限制在每个纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上均为线性同态, 则称 (F,f) 为向量丛 E_1 和 E_2 之间的丛映射.*

显然, 丛映射 (F,f) 中的映射 f 完全由 F 决定. 如果存在从 E_2 到 E_1 的丛映射 (G,g), 使得 G 和 F 互为逆映射, g 和 f 也互为逆映射, 则称 (F,f) 及 (G,g) 为互逆的**丛等价**, 此时 F 限制在纤维上均为线性同构.

特别地, 如果 $M=N$, 则称丛映射 (F,id) 为**丛同态**, 相应地把丛等价称为**丛同构**. 我们不区分同构的向量丛.

例 2.3.6. *设 $f:M\to N$ 为光滑映射, 则 f 的切映射 $f_*:TM\to TN$ 为丛映射. 而微分流形的切丛可平行化当且仅当其切丛同构于平凡向量丛.*

下面我们考虑向量丛的一个有用的例子. 设 E 为 M 上的向量丛, $f: N \to M$ 为光滑映射. 令

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E \,|\, f(n) = \pi(v)\} \subset N \times E.$$

可以证明 (习题), f^*E 为乘积流形 $N \times E$ 的正则子流形.

定义投影 $\pi_f : f^*E \to N$ 为

$$\pi_f(n, v) = n, \quad \forall\ (n, v) \in f^*E.$$

则 f^*E 成为 N 上的向量丛. 事实上, 设 U 为 M 中的开集, $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 为 E 在 U 上的局部平凡化, 则映射 $\psi_f : \pi_f^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k$

$$\psi_f(n, v) = (n, \pi_2(\psi(v)))$$

为微分同胚, 其中 $\pi_2 : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 为向第二个分量的投影. 如果 ψ_α 和 ψ_β 分别为 U_α, U_β 上的局部平凡化, 则有

$$\psi_{\beta f} \circ \psi_{\alpha f}^{-1}(n, v) = (n, g_{\beta\alpha}(f(n))v),$$

其中 $g_{\beta\alpha}$ 为 E 的连接函数. 这说明 f^*E 为 N 上的向量丛, 并且其连接函数为 $\{g_{\beta\alpha} \circ f\}$.

我们把 f^*E 称为诱导丛或拉回丛. 可以证明, 如果 $f_1, f_2 : N \to M$ 为同伦映射, 则它们的拉回丛 f_1^*E 和 f_2^*E 是同构的. 特别地, 可缩流形上的向量丛均为平凡丛.

定义 2.3.4 (子丛). *设 E 是 M 上秩为 k 的向量丛, 如果 F 为 E 的正则子流形, 且 E 的局部平凡化 ψ 满足条件*

$$\psi(\pi^{-1}(U) \cap F) = U \times \mathbb{R}^l,$$

则 E 的丛投影限制在 F 上仍为丛投影, F 为 M 上秩为 l 的向量丛, 称为 E 的子向量丛, 简称子丛.

设 E, F, G 均为 M 上的向量丛, 如果丛同态 $f: F \to E$ 和 $g: E \to G$ 限制在纤维上的同态序列

$$0 \to F_p \xrightarrow{f_p} E_p \xrightarrow{g_p} G_p \to 0, \quad p \in M$$

是短正合序列, 则称丛同态序列

$$0 \to F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \to 0$$

为短正合序列. 如果 F 为 E 的子丛, 则令

$$G = E/F = \bigcup_{p \in M} E_p/F_p$$

G 也是 M 上的向量丛, 且有丛的短正合列 $0 \to F \to E \to G \to 0$, 称 G 为 E 和 F 的**商丛**.

例 2.3.7. 子流形的法丛.

如果 N 为 M 的正则子流形, 则 N 的切丛 TN 为限制丛 $TM|_N$ 的子丛, 其商丛称为 N 的法丛. 例如, 考虑 n 维球面 S^n, 其法丛为

$$NS^n = \{(p, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, v = \lambda p,\ \lambda \in \mathbb{R}.\}.$$

这是一个平凡线丛.

下面我们介绍向量丛之间的几种简单的运算.

(**1**) **Whitney 和**, 也称**直和**.

设 E, F 为 M 上的向量丛, 秩分别为 k, l. 定义空间

$$E \oplus F = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus F_p$$

以及投影映射 $\pi : E \oplus F \to M$ 为

$$\pi(e_p \oplus f_p) = p,\ \forall\ e_p \in E_p,\ f_p \in F_p,\ p \in M.$$

在此投影下 $E \oplus F$ 成为 M 上秩为 $k+l$ 的向量丛. 实际上, 因为 E 和 F 在 M 上均有局部平凡化的开覆盖, 通过选取公共的开加细, 我们不妨设 $\{U_\alpha\}$ 既是 E 的局部平凡化覆盖, 又是 F 的局部平凡化覆盖, 它们的平凡化映射分别为

$$\psi_\alpha^E : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad \psi_\alpha^F : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^l,$$

则 $E \oplus F$ 在 U_α 上的局部平凡化

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{k+l}$$

可以定义为

$$\psi_\alpha(e_p \oplus f_p) = (p,\ (\pi_2^E \circ \psi_\alpha^E(e_p), \pi_2^F \circ \psi_\alpha^F(f_p))^T),$$

其中 $\pi_2^E : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 和 $\pi_2^F : U_\alpha \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ 分别为向第二个分量的投影映射.

因此, 如果 $g_{\beta\alpha}^E$ 和 $g_{\beta\alpha}^F$ 分别为 E 和 F 的连接函数, 则

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, (a, b)^T) = (p,\ \begin{pmatrix} g_{\beta\alpha}^E(p) & 0 \\ 0 & g_{\beta\alpha}^F(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}),$$

即 $E\oplus F$ 的连接函数为

$$g_{\beta\alpha}=\begin{pmatrix} g^E_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & g^F_{\beta\alpha}\end{pmatrix}.$$

(**2**) **对偶丛**.

设 E 为 M 上秩为 k 的向量丛, 考虑如下空间

$$E^*=\bigcup_{p\in M}E^*_p,$$

其中 E^*_p 为向量空间 E_p 的对偶空间, 即

$$E^*_p=\{\phi:E_p\to\mathbb{R}\,|\,\phi \text{ 为线性映射}\}.$$

定义投影 π^* 为

$$\pi^*:E^*\to M,\quad \pi^*(E^*_p)=p,\ \forall\ p\in M.$$

则 E^* 成为 M 上秩为 k 的向量丛, 称为 E 的对偶丛. 如果 ψ_α 为 E 的局部平凡化, 则对 $\forall\ p\in U_\alpha$, $\psi_{\alpha p}:E_p\to\{p\}\times\mathbb{R}^k$ 为线性同构, 它诱导了自然的线性同构

$$\psi^*_{\alpha p}:E^*_p\to\{p\}\times(\mathbb{R}^k)^*\to\{p\}\times\mathbb{R}^k$$

其中, 通过 $\mathbb{R}^k$ 上的内积我们将 $\mathbb{R}^k$ 和它的对偶空间 $(\mathbb{R}^k)^*$ 自然地等同起来. E^* 的连接函数可以通过计算转换映射得到:

$$\psi^*_\beta\circ(\psi^*_\alpha)^{-1}(p,v)=(p,\ (g^T_{\beta\alpha}(p))^{-1}v),$$

因此 E^* 的连接函数为

$$g^*_{\beta\alpha}=(g^T_{\beta\alpha})^{-1}.$$

(**3**) **张量积**.

我们先简要地介绍一下向量空间之间的张量积. 设 V,W 分别为两个有限维的向量空间, 其对偶空间分别记为 V^* 和 W^*. 记

$$V\otimes W=\{f:V^*\times W^*\to\mathbb{R}\,|\,f \text{ 关于两个分量都是线性的.}\}.$$

其中, f 关于两个分量都是线性的是指当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 时

$$f(v^*_1+v^*_2,w^*)=f(v^*_1,w^*)+f(v^*_2,w^*),\quad f(\lambda v^*,w^*)=\lambda f(v^*,w^*);$$

以及

$$f(v^*,w^*_1+w^*_2)=f(v^*,w^*_1)+f(v^*,w^*_2),\quad f(v^*,\lambda w^*)=\lambda f(v^*,w^*).$$

在 $V\otimes W$ 上可以自然地定义加法和数乘运算使之成为向量空间, 称为 V 和 W 的张量积.

设 $v\in V$, $w\in W$, 我们如下定义一个元素 $v\otimes w\in V\otimes W$:

$$v\otimes w(v^*,w^*)=v^*(v)\cdot w^*(w),\ \forall\ v^*\in V^*,\ w^*\in W^*.$$

易见运算 $\otimes$ 具有如下简单性质:

$$(\lambda v)\otimes w=v\otimes(\lambda w)=\lambda(v\otimes w),$$
$$(v_1+v_2)\otimes w=v_1\otimes w+v_2\otimes w,$$
$$v\otimes(w_1+w_2)=v\otimes w_1+v\otimes w_2.$$

根据 V, W 维数的有限性不难证明, $V\otimes W$ 是由所有的形如 $\{v\otimes w\,|\,v\in V,\ w\in W\}$ 的元素生成的, 且有:

(i) 如果 $\{v^i\}$, $\{w^j\}$ 分别为 V, W 的基, 则 $\{v^i\otimes w^j\}$ 为 $V\otimes W$ 的一组基;

(ii) $V\otimes W$ 与 $W\otimes V$ 同构;

(iii) $\dim(V\otimes W)=\dim V\cdot\dim W$;

如果 $A\in GL(V,\mathbb{R})$, $B\in GL(W,\mathbb{R})$ 分别为 V 和 W 上的线性变换, 则定义 $V\otimes W$ 上的线性变换 $A\otimes B\in GL(V\otimes W,\mathbb{R})$ 如下:

$$A\otimes B(v\otimes w)=Av\otimes Bw.$$

因此, 如果 E, F 分别是 M 上秩为 k 和 l 的向量丛, 则令

$$E\otimes F=\bigcup_{p\in M}E_p\otimes F_p$$

如前面讨论的那样, $E\otimes F$ 上有自然的流形结构使之成为 M 上秩为 kl 的向量丛, 称为 E 和 F 的张量积. 如果 $g^E_{\beta\alpha}$ 和 $g^F_{\beta\alpha}$ 分别为 E, F 的连接函数, 则 $g^E_{\beta\alpha}\otimes g^F_{\beta\alpha}$ 为 $E\otimes F$ 的连接函数.

在本节最后, 我们简要地介绍一下纤维丛的概念, 这是向量丛的自然推广, 只不过纤维不再具有线性结构, 结构群也不再限于一般线性群.

定义 2.3.5 (纤维丛). *设 $\pi:E\to M$ 为光滑满射, F 为微分流形, G 为光滑有效地作用在 F 上的 Lie 群. 如果存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及微分同胚 $\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F$ 使得*

(1) $\psi(\pi^{-1}(p))=\{p\}\times F,\ \ \forall\ p\in U_\alpha$;

(2) 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, 存在光滑映射 $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$, 使得

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p,f)=(p,\ g_{\beta\alpha}(p)f),\quad\forall\ p\in U_\alpha\cap U_\beta,\ f\in F.$$

则称 E 为 M 上的纤维丛, π 为丛投影, F 为纤维, E 和 M 分别为总空间和底空间, G 为结构群.

我们也把 ψ_α 称为局部平凡化, $\pi^{-1}(p)=E_p$ 为 p 处的纤维, $g_{\beta\alpha}$ 为连接函数.

类似地, 关于向量丛的一些概念和结果也可照搬到纤维丛上来, 我们在需要的场合再加以说明, 下面仅介绍几个例子.

例 2.3.8. Hopf 纤维化.

类似于实的投影空间, 我们可以定义复的投影空间. 令

$$\mathbb{C}P^n=\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\sim,$$

其中, 等价关系 $\sim$ 定义为

$$v\sim w \Longleftrightarrow \exists\ \lambda\in\mathbb{C}^*,\ \text{使得}\ v=\lambda w.$$

v 的等价类用 $[v]$ 表示, 商投影为

$$\pi:\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}\to\mathbb{C}P^n,\quad \pi(v)=[v].$$

$\mathbb{C}P^n$ 上的拓扑定义为商拓扑, 则它也是一个微分流形. 事实上, 其局部坐标覆盖可以取为 $\{U_j\}_{j=1}^{n+1}$, 其中

$$U_j=\{[z]\in\mathbb{C}P^n\,|\,z^j\neq 0\}.$$

U_j 上的坐标映射 $\varphi_j:U_j\to\mathbb{C}^n$ 定义为

$$\varphi_j([z])=(z^1/z^j,\cdots,z^{j-1}/z^j,z^{j+1}/z^j,\cdots,z^{n+1}/z^j),$$

这些坐标映射之间的转换映射实际上是全纯映射, 因此 $\mathbb{C}P^n$ 为光滑流形.

我们把 S^{2n+1} 看成 $\mathbb{C}^{n+1}=\mathbb{R}^{2n+2}$ 中的单位球面, 把商投影限制在 S^{2n+1} 上, 仍记为 π. 下面说明 $\pi:S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ 为纤维丛的丛投影.

事实上, 由 U_j 的定义, 有

$$\pi^{-1}(U_j)=\{z=(z^1,z^2,\cdots,z^{n+1})\in S^{2n+1}\,|\,z^j\neq 0\},$$

局部平凡化 $\psi_j:\pi^{-1}(U_j)\to U_j\times S^1$ 定义为

$$\psi_j(z)=([z],\ \frac{z^j}{|z^j|}),\quad z\in\pi^{-1}(U_j).$$

ψ_j 为光滑映射, 且其逆 $\psi_j^{-1}:U_j\times S^1\to\pi^{-1}(U_j)$ 为

$$\psi_j^{-1}([w^1,\cdots,w^{n+1}],\ a)=(\sum_{i=1}^{n+1}|w^j|^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{|w^j|}{w^j}a(w^1,\cdots,w^{n+1}).$$

这是定义好的光滑映射, 因此 ψ_j 为微分同胚. 当 $k\neq l$ 时,

$$\psi_k\circ\psi_l^{-1}([w],a)=([w],\frac{w^k/w^l}{|w^k/w^l|}a),$$

因此 S^{2n+1} 为 $\mathbb{C}P^n$ 上的纤维丛, 纤维为 S^1. 根据上式, 连接函数为

$$g_{kl}: U_k \cap U_l \to S^1, \quad g_{kl}([w]) = \frac{w^k/w^l}{|w^k/w^l|},$$

即结构群也为 S^1.

一般地, 如果 P 为 M 上的纤维丛, 且纤维和结构群均为 Lie 群 G, G 在纤维上的作用为 Lie 群的左移作用, 则称 P 为 M 上的**主丛**. 如果 P 为主丛, 则 G 在 P 上有一个光滑的右作用 $R: P\times G\to P$ 定义如下: 设 $p\in P$, $g\in G$, 如果 $p\in U_\alpha$, 记

$$\psi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha),$$

则令

$$R(p,g) = p\cdot g = \psi_\alpha^{-1}(\pi(p), g_\alpha g),$$

易见这个定义是恰当的, 从而得到一个光滑的右作用.

例 2.3.9. *向量丛的标架丛.*

设 E 为 M 上秩为 k 的向量丛, 对任意 $p\in M$, 令

$$F(E_p) = \{l: \mathbb{R}^k \to E_p \text{ 为线性同构}\}.$$

记 $e_1,\cdots,e_k$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的一组标准基, 则线性同构 l 完全由 E_p 的基 $l(e_1),\cdots,l(e_k)$ 决定, 我们把这组基称为 E_p 的一组标架, 因此 $F(E_p)$ 可以看成 E_p 的标架的全体. 选定一组标架后, $F(E_p)$ 和 $GL(k,\mathbb{R})$ 一一对应. 令

$$F(E) = \bigcup_{p\in M} F(E_p),$$

则 $F(E)$ 有自然的微分流形结构, 使之成为 M 上的主丛, 称为 E 的标架丛.

例 2.3.10. *主丛的伴随向量丛.*

设 P 为 M 上的主丛, 纤维为 G. 如果 G 在向量空间 V 上有线性表示, 即存在光滑作用

$$G\times V\to V$$

使得 $g: V\to V$ $(g\in G)$ 均为线性变换, 则我们可以如下定义 M 上的向量丛 $P\times_G V$:

$$P\times_G V = P\times V/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 定义为

$$(p,v)\sim(q,w) \iff \exists\, g\in G, \text{ 使得 } q = pg, w = g^{-1}v.$$

投影 $\pi : P \times_G V \to M$ 定义为复合映射

$$P \times V \xrightarrow{\text{向第一分量的投影}} P \xrightarrow{\text{主丛的投影}} M$$

诱导的映射. 可以验证, $P \times_G V$ 为 M 上的向量丛, 称为伴随丛.

从纤维丛的定义可以看出, 丛投影必为淹没. 反之, Ehresmann 证明了逆紧的满射如果为淹没, 则必为纤维丛的丛投影.

习题 2.3

1. 说明 RP^n 上线丛的定义中的总空间的确为微分流形.

2. 说明向量丛的零截面的确是光滑映射.

3. 写出丛同态在平凡化下的局部表示.

4. 设 E 为 M 上的向量丛, $f : N \to M$ 为光滑映射. 证明 $(f, \pi) : N \times E \to M \times M$ 和 $M \times M$ 的正则子流形 $\Delta = \{(m, n) \in M \times M \mid m = n\}$ 横截相交, 从而 $f^*E = (f, \pi)^{-1}(\Delta)$ 为 $N \times E$ 的正则子流形.

5. 设 E 为 M 上的向量丛, N 为 M 的正则子流形. 令 $E_N = \bigcup\limits_{p \in N} E_p$, 证明 E_N 为 E 的正则子流形, 且为 N 上的向量丛, 称为限制丛.

6. 如果包含映射 $i : N \to M$ 为嵌入, 则拉回丛 i^*E 和限制丛同构.

7. 说明商丛 E/F 的确为向量丛.

8. 证明, 如果 $0 \to F \to E \to G \to 0$ 为向量丛的短正合序列, 则 E 与 $E \oplus G$ 同构.

9. 证明, 如果 $A \in GL(k, \mathbb{R})$, $B \in GL(l, \mathbb{R})$, 则 $\det(A \otimes B) = (\det A)^l (\det B)^k$.

10. 证明 $\mathbb{C}P^1$ 与 S^2 微分同胚.

11. 定义映射 $\pi : SO(n) \to S^{n-1}$ 为

$$\pi(A) = Ae, \quad A \in SO(n),$$

其中 e 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个固定的单位向量. 证明 π 为主丛, 纤维为 $SO(n-1)$.

§2.4 张量丛

在前面一节里, 我们介绍了向量丛及其运算. 现在我们从流形的切丛出发, 利用向量丛的运算给出新的重要的向量丛. 我们先从切丛的对偶丛讲起.

设 M 为微分流形, 其切丛 TM 定义为

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM,$$

而其对偶丛定义为

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M,$$

其中 T_p^*M 为 T_pM 的对偶空间. 如果 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为 p 附近的局部坐标, 则 T_pM 的一组基为 $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_p\}_{i=1}^n$, 在对偶空间 T_p^*M 中有相应的对偶基, 记为 $\{dx_\alpha^i(p)\}_{i=1}^n$, 则

$$dx_\alpha^i(p)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是, 对偶空间 T_p^*M 中的任一元素 $\omega(p)$ 均可表示为

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot dx_\alpha^i(p), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

如果 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则 T_p^*M 有另一组基 $\{dx_\beta^i(p)\}_{i=1}^n$, 两组基之间的转换关系可以计算如下:

$$\begin{aligned} dx_\beta^i(p)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_p) &= dx_\beta^i(p)(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_p(x_\beta^k)\frac{\partial}{\partial x_\beta^k}\Big|_p) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_p(x_\beta^k)\delta_{ik} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_p(x_\beta^i). \end{aligned}$$

这说明

$$dx_\beta^i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p(x_\beta^i) \cdot dx_\alpha^j(p).$$

因此, 如果 $\omega(p) \in T_p^*M$ 另有表示

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot dx_\beta^j(p),$$

则两组系数之间满足如下转换关系

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \cdot J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p),$$

或者改写为

$$(b_1,\cdots,b_n)^T=[J^T(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(p)]^{-1}\cdot(a_1,\cdots,a_n)^T.$$

综上所述, 如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 M 的局部坐标覆盖, 则 $\{U_\alpha\}$ 为 TM 及 T^*M 的局部平凡化覆盖, 其中, T^*M 在 U_α 上的局部平凡化

$$\psi_\alpha^*:(\pi^*)^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n$$

定义为

$$\psi_\alpha^*(\omega)=(p,\ (a_1,\cdots,a_n)^T),\quad p\in U_\alpha,\ \omega\in T_p^*M.$$

当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时,

$$\psi_\beta^*\circ(\psi_\alpha^*)^{-1}(p,a)=(p,\ [J^T(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(p)]^{-1}a),$$

因此向量丛 T^*M 的连接函数为

$$g_{\beta\alpha}^*:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(n,\mathbb{R}),\quad p\to[J^T(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(p)]^{-1}.$$

我们把 T^*M 称为 M 的余切丛, T_p^*M 中的向量称为余切向量, T^*M 的截面称为余切向量场, 也称为 1 次外微分形式, 或简称 1 形式. 显然, 坐标函数 $\{x^i\}$ 定义了局部余切向量场

$$dx^i:M\to T^*M,\quad p\to dx^i(p).$$

现在我们想给局部的余切向量场 dx^i 另外一个解释. 假设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为 M 上的光滑函数, 任给 $p\in M$, 定义 $df(p)\in T_p^*M$ 如下:

$$df(p)(X_p)=X_pf,\quad\forall\ X_p\in T_pM,$$

于是得到 T^*M 的一个截面 $df:M\to T^*M$, $p\to df(p)$. 这是一个光滑的截面, 事实上, 在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, df 可以表示为

$$df=\sum_{i=1}^n(\frac{\partial}{\partial x^i}f)dx^i,$$

df 为光滑 1 形式, 称为 f 的**外微分**. 特别地, 对于坐标函数 $x^i:U\to\mathbb{R}$, 作为余切向量场的 dx^i 和作为函数 x^i 外微分的 dx^i 的定义并不矛盾.

一般地, 设 $f:M\to N$ 为微分流形之间的光滑映射, 则有**余切映射**

$$\begin{aligned} f^*:C^\infty(M;T^*N)\ &\to\ C^\infty(M;T^*M)\\ \omega\ &\mapsto\ f^*\omega\end{aligned}$$

其中, 任给 $p\in M$, $(f^*\omega)(p)\in T_p^*M$ 定义为

$$(f^*\omega)(p)(X_p)=\omega(f(p))(f_{*p}(X_p)),\quad \forall\ X_p\in T_pM.$$

不难验证, 如果 ω 为 N 上的光滑余切向量场, 则 $f^*\omega$ 为 M 上的光滑余切向量场. 我们也把 f^* 称为**拉回映射**.

有了切丛和余切丛, 我们可以通过张量积来构造新的向量丛.

定义 2.4.1 (张量). *设 (r,s) 为非负整数对, $(r,s)\neq(0,0)$. 如果函数*

$$\theta: T_p^*M\times\cdots\times T_p^*M\times T_pM\times\cdots\times T_pM\to\mathbb{R}\ \ (r \text{ 个 } T_p^*M \text{ 和 } s \text{ 个 } T_pM)$$

对于每个分量都是线性的, 则称 θ 为 p 处的 (r,s) 型张量, r 为逆变指数, s 为协变指数. 以 $\otimes^{r,s}T_pM$ 表示 p 处 (r,s) 型张量的全体, 在自然的加法和数乘之下成为向量空间.

$\otimes^{r,s}T_pM$ 是向量空间张量积的推广. 显然, 当 $(r,s)=(0,1)$ 时, $\otimes^{0,1}T_pM=T_p^*M$; 当 $(r,s)=(1,0)$ 时

$$\otimes^{0,1}T_pM=T_p^{**}M=T_pM,$$

即我们不区分 T_pM 和它的二次对偶空间 $T_p^{**}M$. 我们规定, 当 $(r,s)=(0,0)$ 时, $\otimes^{0,0}T_pM=\mathbb{R}$. 我们把 $(r,0)$ 型的张量称为 r 阶的**逆变张量**, $(0,s)$ 型的张量称为 s 阶的**协变张量**.

定义 2.4.2 (张量积). *定义张量积运算如下:*

$$\begin{aligned}\otimes:\otimes^{r,s}T_pM\times\otimes^{t,h}T_pM &\ \to\ \otimes^{r+t,s+h}T_pM\\ (\theta,\eta)&\ \mapsto\ \theta\otimes\eta,\end{aligned}$$

其中, 对 $W_i\in T_p^*M(1\leqslant i\leqslant r+t)$, $X_j\in T_pM\ (1\leqslant j\leqslant s+h)$, 有

$$\begin{aligned}&\theta\otimes\eta(W_1,\cdots,W_{r+t};X_1,\cdots,X_{s+h})\\ &=\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\cdot\eta(W_{r+1},\cdots,W_{r+t};X_{s+1},\cdots,X_{s+h}).\end{aligned}$$

张量积运算有如下一些性质:

- $(\theta+\xi)\otimes\eta=\theta\otimes\eta+\xi\otimes\eta;\quad \eta\otimes(\xi+\eta)=\eta\otimes\xi+\eta\otimes\xi;$
- $(\lambda\theta)\otimes\eta=\theta\otimes(\lambda\eta)=\lambda(\theta\otimes\eta),\quad\forall\ \lambda\in\mathbb{R};$
- $(\theta\otimes\xi)\otimes\eta=\theta\otimes(\xi\otimes\eta);$

- $(\otimes^{r,s}T_pM)\otimes(\otimes^{t,h}T_pM)$ 与 $\otimes^{r+t,s+h}T_pM$ 同构.

记

$$\otimes T_pM=\sum_{r,s=0}^{\infty}\otimes^{r,s}T_pM=\{有限和\ \sum_{r,s=0}^{\infty}T^{r,s}\}$$

$\otimes T_pM$ 连同加法, 数乘和张量积形成 $\mathbb{R}$ 上的一个代数, 称为**张量代数**.

下面我们来决定张量空间 $\otimes^{r,s}T_pM$ 的基以及张量在不同基下的变换公式. 为了方便起见, 我们采用 Einstein 求和约定, 即相同指标出现时要对其求和.

引理 2.4.1. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 T_pM 的一组基, $\{e^i\}_{i=1}^n$ 为其对偶基, 则

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},\ \ 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n,\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$$

为 $\otimes^{r,s}T_pM$ 的一组基. 且

(1) 如果 $\theta\in\otimes^{r,s}T_pM$, 则

$$\theta=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},$$

其中, $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(e^{i_1},\cdots,e^{i_r};e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\in\mathbb{R}$.

(2) 如果 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 为 T_pM 的另一组基, $\{f^j\}_{j=1}^n$ 为对应的对偶基, 记

$$\tilde\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(f^{i_1},\cdots,f^{i_r};f_{j_1},\cdots,f_{j_s}),$$

则

$$\tilde\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r}\cdot c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\cdot\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s},$$

其中 c_i^j 和 d_j^i 由下式决定

$$f_i=c_i^j\cdot e_j,\ \ f^i=d^i_j\cdot e^j,$$

从而矩阵 (c_i^j) 和 (d_i^j) 互逆.

证明. 如果 $\lambda^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots e^{j_s}=0$, 则

$$\begin{aligned}0&=(\lambda^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots e^{j_s})(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e_{l_1},\cdots,e_{l_s})\\&=\lambda^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\cdot\delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_r}_{i_r}\cdot\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_s}_{l_s}\\&=\lambda^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s},\end{aligned}$$

这说明

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},\ \ 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n,\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$$

是线性无关的.

另一方面, 如果 $\theta\in\otimes^{r,s}T_pM$, 则

$$\begin{aligned}&\theta(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})=\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\\&=(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s})(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})\end{aligned}$$

对任意的 k_i, l_j 均成立. 由于 θ 关于每个分量都是线性的, 故

$$\theta=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}.$$

进一步, 如果 $\{f_i\}$ 为 T_pM 的另一组基, $f_i=c_i^je_j$, 则对应的对偶基满足关系 $f^i=d^i_je^j$, 由

$$\delta_{ij}=f^i(f_j)=d^i_ke^k(c^l_je_l)=d^i_kc^l_j\delta^k_l=d^i_kc^k_j$$

知 (d^j_i) 和 (c^j_i) 为互逆的矩阵. 我们有

$$\begin{aligned}\tilde\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}&=\theta(f^{i_1},\cdots,f^{i_r};f_{j_1},\cdots,f_{j_s})\\&=\theta(d^{i_1}_{k_1}e^{k_1},\cdots,d^{i_r}_{k_r}e^{k_r};c^{l_1}_{j_1}e_{l_1}\cdots,c^{l_s}_{j_s}e_{l_s})\\&=d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r}\cdot c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\cdot\theta(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})\\&=d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r}\cdot c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\cdot\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.\end{aligned}$$

这就证明了引理. □

在引理的证明中, 我们用到很多的形式计算, 涉及很多的指标, 对于张量来说, 这些运算是必不可少的, 读者应当逐渐熟悉它们.

如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 p 附近的局部坐标, 则 $\{\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_p\}$ 为 T_pM 的一组基, $dx^i_\alpha(p)$ 为 T^*_pM 的一组对偶基. 按照上面的讨论, 如果 θ 为 p 处 (r,s) 型的张量, 则 θ 可表示为

$$\theta=\theta^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}_\alpha}\Big|_p\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_s}_\alpha}\Big|_p\otimes dx^{j_1}_\alpha(p)\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}_\alpha(p),$$

其中

$$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(dx^{i_1}_\alpha(p),\cdots,dx^{i_r}_\alpha(p),\frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\alpha}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}_\alpha}\Big|_p).$$

如果 (U_β,φ_β) 为另一局部坐标, $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, θ 也可以表示为

$$\theta=\tilde\theta^{k_1\cdots k_s}_{l_1\cdots l_s}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}_\alpha}\Big|_p\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_s}_\alpha}\Big|_p\otimes dx^{l_1}_\alpha(p)\otimes\cdots\otimes dx^{l_s}_\alpha(p),$$

θ 的分量 $\tilde\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$ 和 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 之间满足的关系为

$$\tilde\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=\frac{\partial}{\partial x^{i_1}_\alpha}\Big|_p(x^{k_1}_\beta)\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_r}_\alpha}\Big|_p(x^{k_r}_\beta)\cdot\frac{\partial}{\partial x^{l_1}_\beta}\Big|_p(x^{j_1}_\alpha)\cdots\frac{\partial}{\partial x^{l_s}_\beta}\Big|_p(x^{j_s}_\alpha)\cdot\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.$$

有了上面这些准备, 我们可以明确地写出张量从

$$\otimes^{r,s}TM=\bigcup_{p\in M}\otimes^{r,s}T_pM$$

的局部平凡化来:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha : (\pi^{r,s})^{-1}(U_\alpha) &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \\ \theta &\mapsto (p,\ \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}),\end{aligned}$$

其中, 分量 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 按字典顺序排为列向量 (先按上指标从小到大排, 再按下指标从小到大排).

张量丛 $\otimes^{r,s}TM$ 的一个 C^k 截面称为 M 上的一个 (r,s) 型的 C^k 张量场. 特别地, $(0,0)$ 型的张量场就是 C^k 函数, $(1,0)$ 型的张量场就是切向量场, $(0,1)$ 型的张量场就是余切向量场.

注. 对于 M 上一般的向量丛, 可一完全类似地构造张量丛 $\otimes^{r,s}E$.

下面的引理可以用来判断张量场什么时候是 $C^k(C^\infty)$ 的, 这和切向量场的情形是完全类似的.

引理 2.4.2. *设 M 为微分流形, 则*

(1) θ 为 M 上的 C^k 的 (r,s) 型张量场 $\Longleftrightarrow$ 对任意的局部坐标 (U,φ), 在 U 中 θ 可表示为

$$\theta = \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

其中 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 为 U 上的 C^k 函数.

(2) θ 为 M 上的 C^∞ 的 (r,s) 型张量场 $\Longleftrightarrow$ 对任意光滑余切向量场 $W_1, \cdots, W_r$ 以及光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_s$, $\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$ 为 M 上的光滑函数.

M 上的 C^k 的 (r,s) 型的张量场的全体记为 $C^k(M;\otimes^{r,s}TM)$. 在自然地定义了加法和数乘运算以后成为向量空间. 和张量类似, 张量场之间也有张量积运算.

设 $f: M\to N$ 为微分流形之间的光滑映射, 我们现在把余切映射推广到协变张量场上. 任取 N 上的 s 阶协变张量场 θ, 对于 $p\in M$, 定义 $(f^*\theta)(p)\in\otimes^{0,s}T_pM$ 如下

$$(f^*\theta)(p)(X_1,\cdots X_s) = \theta(f(p))(f_{*p}X_1,\cdots,f_{*p}X_s),\quad X_i\in T_pM.$$

这样就定义了 M 上的 s 阶协变张量场 $f^*\theta$, 因此得到推广的拉回映射

$$f^*: C^\infty(N;\otimes^{0,s}TN)\to C^\infty(M;\otimes^{0,s}TM).$$

拉回映射具有以下性质:

- 如果 $s=0$, 则 $f^*\varphi=\varphi\circ f$; $s=1$ 的一个特殊情形: $f^*dg=d(g\circ f)$.

- 如果 θ 为 s 阶协变张量场, η 为 t 阶协变张量场, 则

$$f^*(\theta\otimes\eta)=f^*\theta\otimes f^*\eta;$$

- 设 $f:M\to N$, $g:N\to P$ 为微分流形之间的光滑映射, θ 为 P 上的 s 阶协变张量场, 则

$$(g\circ f)^*\theta=f^*(g^*\theta).$$

下面我们考虑一类重要而特殊的 2 阶协变张量场.

定义 2.4.3 (黎曼度量)**.** 设 $g\in C^\infty(M;\otimes^{0,2}TM)$ 为 M 上光滑 2 阶协变张量场. 对任意 $p\in M$, 如果映射 $g_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ 满足条件

(i) $\forall\ X_p\in T_pM$, $g_p(X_p,X_p)\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $X_p=0$;

(ii) $\forall\ X_p,Y_p\in T_pM$, 均有 $g_p(X_p,Y_p)=g_p(Y_p,X_p)$.

即 g_p 为切空间 T_pM 上的内积, 则称 g 为 M 上的黎曼度量, (M,g) 称为黎曼流形.

在 M 的局部坐标系 (U,φ) 下, 黎曼度量 g 可以写为

$$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j,$$

其中, g_{ij} 为 U 上的光滑函数, 它们组成的 n 阶方阵 $(g_{ij})_{n\times n}$ 是处处正定对称的方阵. 有时, 我们简记 $dx^i\otimes dx^j$ 为 dx^idx^j, 而 $dx^i\otimes dx^i$ 也简记为 $(dx^i)^2$.

例 2.4.1. 设 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准坐标, 则

$$g_0=\sum_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i$$

为 $\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量, 称为标准黎曼度量.

例 2.4.2. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球

$$B^n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \sum_{i=1}^n(x^i)^2<1\},$$

则

$$g_{-1}=\frac{4}{[1-\sum_{i=1}^n(x^i)^2]^2}\sum_{j=1}^n dx^j\otimes dx^j$$

为 B^n 上的黎曼度量, 称为 *Poincaré* 度量. $n=2$ 时, (B^2,g_{-1}) 也称为 *Poincaré* 圆盘.

例 2.4.3. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的上半空间

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$$

则

$$h_{-1} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i$$

为 $\mathbb{H}^n$ 上的黎曼度量.

设 (M, g) 为黎曼流形, 我们有时也把黎曼度量记为 $g = \langle , \rangle$. 给定黎曼度量, 我们可以在切向量场和余切向量场之间定义一个对偶映射. 例如, 设 ω 为 M 上的余切向量场, 在任何给定的点, 考虑切向量 $\omega^\sharp$, 使得对任意切向量 X, 下式成立

$$\langle \omega^\sharp, X \rangle = \omega(X)$$

这就定义了切向量场 $\omega^\sharp$, 称为 ω 的对偶向量场. 反之, 从上式可以由切向量场定义对偶余切向量场.

例 2.4.4. 设 (M, g) 为黎曼流形, $f : M \to \mathbb{R}$ 为 M 上的光滑函数, 其外微分 df 的对偶切向量场称为 f 的梯度场, 记为 ∇f. 从外微分和对偶向量场的定义得

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf, \quad \forall\ X \in C^\infty(M; TM).$$

特别地, 如果 g 为光滑函数, 则

$$\nabla f(g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

从光滑函数得到梯度场的方法可以推广如下.

定义 2.4.4. 设映射

$$\theta : C^\infty(M; TM) \times \cdots \times C^\infty(M; TM) \to C^\infty(M; \otimes^{r,0} TM)$$

关于 s 个分量均为函数线性的, 即对任意 $X_i, Y_i \in C^\infty(M; TM)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, 以及 $f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}&\theta(X_1, \cdots, X_{i-1}, fX_i + gY_i, X_{i+1}, \cdots, X_s)\\ &= f\theta(X_1, X_2, \cdots, X_s) + g\theta(X_1, \cdots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \cdots, X_s),\end{aligned}$$

则称 θ 为 (r, s) 型的场张量.

一个 (r, s) 型的张量场可以自然地视为 (r, s) 型的场张量: 设 T 为 (r, s) 的张量场, 如果 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 为向量场, 则定义 $\theta(X_1, \cdots, X_s) \in C^\infty(M; \otimes^{r,0} TM)$ 为

$$\theta(X_1, \cdots, X_s)_p(\omega_1, \cdots, \omega_r) = T(\omega_1, \cdots, \omega_r, X_1(p), \cdots, X_s(p)), \quad \forall\ \omega_i \in T_p^* M.$$

容易看出 θ 关于每一个分量 X_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ 都是函数线性的, 因此 θ 为 (r,s) 型的场张量, 称为由张量场诱导的场张量.

反之, 由场张量可以惟一地确定张量场.

命题 2.4.3. 任何 (r,s) 型的场张量均由 (r,s) 型的张量场诱导而来.

证明. 我们就 $r=0, s=1$ 的简单情形加以证明, 一般情形的证明完全类似. 因此, 设 $\theta: C^\infty(M;TM) \to C^\infty(M;\mathbb{R})$ 为函数线性的映射, 任给 $p \in M$, 我们定义线性函数

$$\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

如下: 设 $X_p \in T_pM$, 延拓 X_p 为 M 上的光滑向量场 X, 令

$$\theta_p(X_p) = \theta(X)(p)$$

这个定义是恰当的: 如果 Y 为 X_p 的另一光滑延拓, 则 $(Y-X)(p)=0$, 根据本节最后的习题, 存在有限个光滑函数 f_i 以及光滑向量场 X_i, 使得 $f_i(p)=0$, 且

$$Y - X = \sum_i f_i X_i$$

因此, 由 θ 的函数线性性, 有

$$\theta(Y)(p) - \theta(X)(p) = \theta(Y-X)(p) = \sum_i f_i(p)\theta(X_i)(p) = 0$$

这样我们就定义了一个余切向量场, 仍记为 θ. 显然, θ 为光滑余切向量场. □

习题 2.4

1. 设 $f: M \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, x 为 $\mathbb{R}$ 上的标准坐标, 则 $df = f^*(dx)$.

2. 设 $f: M \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 证明 f 为 Morse 函数当且仅当 $df: M \to T^*M$ 与零截面横截相交.

3. 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形, $f: M \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则对几乎所有的 $a \in \mathbb{R}^n$, 函数 $f_a(x) = f(x) + \langle x, a\rangle$ 为 M 上的 Morse 函数.

4. 试写出张量丛的连接函数.

5. 写出拉回映射在局部坐标下的局部表达式.

6. 利用单位分解证明, 任意微分流形上均存在黎曼度量.

7. 写出黎曼度量在不同局部坐标下局部表达式的转换公式.

8. 给定黎曼度量, 写出对偶向量场, 特别地, 梯度场的局部表达式.

9. 设 $f: M \to N$ 为光滑浸入, h 为 N 上的黎曼度量, 则 $g = f^*h$ 为 M 上的黎曼度量.

10. 记 $i: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含映射, $g_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} dx^i \otimes dx^i$, 选择 S^n 的适当局部坐标, 在此坐标下写出拉回度量 i^*g_0 的表达式.

11. 设 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性变换, g_0 为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准黎曼度量. 证明, $A^*g_0 = g_0$ 当且仅当 A 为正交变换.

12. 设 X 为 M 上的光滑向量场, 如果 $X(p) = 0$, 证明存在有限个光滑函数 f_i 以及光滑向量场 X_i, 使得 $f_i(p) = 0$, 且 $X = \sum_i f_i X_i$.

§2.5 微分形式

本节我们考虑一种特殊的协变张量场及其运算性质.

定义 2.5.1. 设 $\omega \in \otimes^{0,s}T_pM$ 为 p 处的 s 阶协变张量, 如果任给切向量 $X_1, \cdots, X_s \in T_pM$, 以及 $(1, 2, \cdots, s)$ 的置换 π, 均有

$$\omega(X_{\pi(1),\cdots,\pi(s)}) = (-1)^\pi \omega(X_1, \cdots, X_s),$$

(其中当 π 为偶置换时 $(-1)^\pi = 1$; 当 π 为奇置换时 $(-1)^\pi = -1$) 则称 ω 为 s 阶反称协变张量或 s 阶外形式. s 阶外形式的全体组成的子向量空间记为 $\bigwedge^s T_p^*M$.

设 (U, φ) 为 p 附近的局部坐标系, 则 s 阶协变张量 ω 可表示为

$$\omega = \sum \omega_{i_1\dots i_s} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s},$$

其中 $\omega_{i_1\dots i_s} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}})$. 我们有

引理 2.5.1. ω 为 s 阶外形式当且仅当对任意置换 π, 均有

$$\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}} = (-1)^\pi \omega_{i_1\cdots i_s}.$$

证明. 如果 ω 为 s 阶外形式, 则

$$\begin{aligned}
\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}} &= \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(1)}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(s)}}}) \\
&= (-1)^\pi \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}) \\
&= (-1)^\pi \omega_{i_1\cdots i_s}.
\end{aligned}$$

反之, 设 $X_1,\cdots,X_s\in T_pM$, π 为 $(1,2,\cdots,s)$ 的一个置换, 记 $X_i=a_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, 则

$$\begin{aligned}\omega(X_1,\cdots,X_s)&=\omega(a_1^{j_1}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,a_s^{j_s}\frac{\partial}{\partial x^{j_s}})\\&=a_1^{j_1}\cdots a_s^{j_s}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}})\\&=a_{\pi(1)}^{j_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{j_{\pi(s)}}\omega_{j_1\cdots j_s}\\&=(-1)^{\pi}a_{\pi(1)}^{j_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{j_{\pi(s)}}\omega_{j_{\pi(1)}\cdots j_{\pi(s)}}\\&=(-1)^{\pi}\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)}).\end{aligned}$$

这就证明了引理. □

由引理易见, 当 $s>n$ 时, $\bigwedge^s T_p^*M=\{0\}$. 为了方便起见, 我们也把 0 阶和 1 阶协变张量称为反称协变张量. 下面我们考虑反称协变张量的若干运算.

定义 2.5.2. *设 θ 为 s 阶协变张量, 我们定义一个 s 阶反称协变张量 $\mathscr{A}(\theta)$ 如下: 设 $X_1,\cdots,X_s\in T_pM$, 令*

$$\mathscr{A}(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)}),$$

其中 π 取遍 $(1,2,\cdots,s)$ 的置换群.

引理 2.5.2. *我们有*

(1) *映射 $\mathscr{A}:\otimes^{0,s}T_pM\to\bigwedge^s T_p^*M$, $\theta\mapsto\mathscr{A}(\theta)$ 的定义是恰当的;*

(2) *θ 为反称协变张量当且仅当 $\mathscr{A}(\theta)=\theta$;*

(3) *$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\theta))=\mathscr{A}(\theta)$, $\forall\ \theta\in\otimes^{0,s}T_pM$.*

证明. (1) 显然, $\mathscr{A}$ 仍为 s 阶协变张量, 我们来说明它是反称的. 任取 $(1,2,\cdots,s)$ 的置换 π, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\theta)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})&=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\theta(X_{\pi\circ\sigma(1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma(s)})\\&=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma}(-1)^{\pi\circ\sigma}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi\circ\sigma(1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma(s)})\\&=\frac{1}{s!}(-1)^{\pi}\sum_{\tau}(-1)^{\tau}\theta(X_{\tau(1)},\cdots,X_{\tau(s)})\\&=(-1)^{\pi}\mathscr{A}(\theta)(X_1,\cdots,X_s).\end{aligned}$$

这说明 θ 的确为反称协变张量.

(2) 如果 θ 已经是反称协变张量, 则

$$\begin{aligned}\theta(X_1,\cdots,X_s)&=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})\\&=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}\theta(X_1,\cdots,X_s)\\&=\theta(X_1,\cdots,X_s),\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{A}(\theta)=\theta$. 反之, 如果 $\mathscr{A}(\theta)=\theta$, 则由 (1) 即知 θ 是反称的.

(3) 这可由 (1) 和 (2) 立即推出. □

我们把运算 $\mathscr{A}$ 称为反称化. 利用反称化和张量积, 我们可以定义反称协变张量之间的一种乘积运算.

定义 2.5.3. 设 $\alpha,\ \beta$ 分别为 $r,\ s$ 阶反称协变张量, 我们定义一个 $r+s$ 阶的反称协变张量 $\alpha\wedge\beta$ 如下:

$$\alpha\wedge\beta=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\alpha\otimes\beta),$$

映射 $\wedge:\bigwedge^r T_p^*M\times\bigwedge^s T_p^*M\to\bigwedge^{r+s}T_p^*M$, $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta$ 称为外积或楔积运算.

按定义, 对任意 $X_1,\cdots,X_{r+s}\in T_pM$, 有

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta(X_1,\cdots,X_{r+s})&=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\alpha\otimes\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})\\&=\frac{r!}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha\otimes\beta(X_{\pi(1),\cdots,X_{\pi(r+s)}})\\&=\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)}).\end{aligned}$$

特别地, 当 $r=s=1$ 时,

$$\alpha\wedge\beta(X,Y)=\alpha(X)\beta(Y)-\alpha(Y)\beta(X),\ \forall\ X,Y\in T_pM.$$

楔积运算具有如下性质:

引理 2.5.3. (1) $\wedge$ 运算是偏线性的, 即
$\alpha\wedge(\gamma+\delta)=\alpha\wedge\gamma+\alpha\wedge\delta$, $(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$;
$\alpha\wedge(\lambda\gamma)=(\lambda\alpha)\wedge\gamma=\lambda(\alpha\wedge\gamma)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
(2) 若 α,β 分别为 $r,\ s$ 阶反称协变张量, 则

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha.$$

(3) 若 α,β,γ 分别为 $r,\ s,\ t$ 阶反称协变张量, 则

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$$

证明. (1) 运算的偏线性性从定义可以立即得到.

(2) 考虑置换 $\tau:\ (1,2,\cdots,r+s)\to(r+1,\cdots,r+s,1,\cdots,r)$, 易见 $(-1)^\pi=(-1)^{rs}$. 由楔积的定义, 对于任意切向量 $X_1,\cdots,X_{r+s}$ 有

$$\begin{aligned}
&(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})\\
&=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})\\
&=\frac{(-1)^\tau}{r!s!}\sum_\pi(-1)^{\pi\circ\tau}\beta(X_{\pi\circ\tau(1)},\cdots,X_{\pi\circ(s)})\alpha(X_{\pi\circ\tau(s+1)},\cdots,X_{\pi\circ\tau(s+r)})\\
&=\frac{(-1)^{rs}}{r!s!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\beta(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(s)})\alpha(X_{\sigma(s+1)},\cdots,X_{\sigma(s+r)})\\
&=(-1)^{rs}(\beta\wedge\alpha)(X_1,\cdots,X_{r+s}).
\end{aligned}$$

(3) 这等价于证明

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)=\mathscr{A}(\alpha\otimes\mathscr{A}(\beta\otimes\gamma))$$

根据张量积的性质, 只须证明下面的等式即可:

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}(\theta)\otimes\eta)=\mathscr{A}(\theta\otimes\eta)=\mathscr{A}(\theta\otimes\mathscr{A}(\eta)).$$

其中, θ, η 分别为 p, q 次协变张量. 我们来证明上式的前半部分, 后半部分留作习题.

我们约定, π 表示 $(1,\cdots,p+q)$ 的置换. 如果 σ 为 $(1,\cdots,p)$ 的置换, 则令 σ' 为 $(1,\cdots,p+q)$ 的置换, 使得 $\sigma'(i)=\sigma(i)$, $1\leqslant i\leqslant p$; $\sigma'(j)=j$, $j\geqslant p+1$. 显然,

$(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma'}$. 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(\mathscr{A}(\theta)\otimes\eta)(X_1,\cdots,X_{p+q})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\sum_\pi(-1)^\pi(\mathscr{A}(\theta)\otimes\eta)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(p+q)})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\sum_\pi(-1)^\pi\mathscr{A}(\theta)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(p)})\eta(X_{\pi(p+1)},\cdots,X_{\pi(p+q)})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!}\sum_\pi(-1)^\pi\sum_\sigma(-1)^\sigma\theta(X_{\pi\circ\sigma(1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma(p)})\eta(X_{\pi(p+1)},\cdots,X_{\pi(p+q)})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^\sigma\sum_\pi(-1)^\pi\theta(X_{\pi\circ\sigma(1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma(p)})\eta(X_{\pi(p+1)},\cdots,X_{\pi(p+q)})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!}\sum_\sigma\sum_\pi(-1)^{\pi\circ\sigma}\theta(X_{\pi\circ\sigma'(1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma'(p)})\eta(X_{\pi\circ\sigma'(p+1)},\cdots,X_{\pi\circ\sigma'(p+q)})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!}\sum_\sigma\sum_{\pi'}(-1)^{\pi'}\theta(X_{\pi'(1)},\cdots,X_{\pi'(p)})\eta(X_{\pi'(p+1)},\cdots,X_{\pi'(p+q)})\\
&=\frac{1}{p!}\sum_\sigma\mathscr{A}(\theta\otimes\eta)(X_1,\cdots,X_{p+q})\\
&=\mathscr{A}(\theta\otimes\eta)(X_1,\cdots,X_{p+q})
\end{aligned}$$

这说明 $\mathscr{A}(\mathscr{A}(\theta)\otimes\eta)=\mathscr{A}(\theta\otimes\eta)$. □

一般地, 如果 α_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ 为 r_i 阶反称协变张量, 则用上面的方法可以证明

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\cdots\wedge\alpha_s=\frac{(r_1+\cdots+r_s)!}{(r_1)!\cdots(r_s)!}\mathscr{A}(\alpha_1\otimes\cdots\alpha_s). \tag{2.2}$$

如果 $r_i=1$, 则

$$(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s)(X_1,\cdots,X_s)=\sum_\pi(-1)^\pi\alpha_1(X_{\pi(1)})\cdots\alpha(X_{\pi(s)}).$$

特别地, 如果 $\{e^i\}_{i=1}^n$ 为 T_p^*M 的一组基, 则 $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}$ 为 s 阶反称协变张量, 其中指标 $i_1,\cdots,i_s$ 在 $\{1,\cdots,n\}$ 中取. 由反称性, 我们可以假设这些指标互不相同.

引理 2.5.4. $\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n\}$ 为 $\bigwedge^s T_p^*M$ 的一组基, 特别地, $\dim(\bigwedge^s T_p^*M)=C_n^s$ (组合数).

证明. 设 ω 为 s 阶反称协变张量, 则作为张量, 它可以表示为

$$\omega=\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}.$$

因为反称张量的反称化等于自身, 故

$$\begin{aligned}\omega=\mathscr{A}(\omega)&=\omega_{i_1\cdots i_s}\mathscr{A}(e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})\\&=\omega_{i_1\cdots i_s}\frac{1}{s!}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\qquad(\text{利用 }(2.2))\\&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\end{aligned}$$

上面最后的等式用到 ω 的反称性. 这说明 $\bigwedge^s T_p^*M$ 是由

$$\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n\}$$

张成的. 下面说明这是一组线性无关的协变张量. 事实上, 设

$$\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}=0,$$

设 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为 T_pM 的中对偶基, 则当 $j_1<\cdots<j_s$ 时, 有

$$\begin{aligned}0&=(\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s})(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\\&=s!\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}\mathscr{A}(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s})(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\\&=s!\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})(e_{j_{\pi(1)}},\cdots,e_{j_{\pi(s)}})\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\lambda_{i_1\cdots i_s}\delta^{i_1}_{j_1}\cdots\delta^{i_s}_{j_s}\\&=\lambda_{j_1\cdots j_s}.\end{aligned}$$

这说明 $\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n\}$ 线性无关. □

注. 记

$$\bigwedge T_p^*M=\bigwedge^0 T_p^*M\oplus\bigwedge^1 T_p^*M\oplus\cdots\bigwedge^n T_p^*M,$$

其中 $n=\dim M$, 则

$$\{1,\ e^i,\ e^i\wedge e^j,\ \cdots,\ e^1\wedge\cdots\wedge e^n\}$$

为 $\bigwedge T_p^*M$ 之基. 因此,

$$\dim\bigwedge T_p^*M=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n.$$

外积运算 $\wedge$ 可以自然地定义在 $\bigwedge T_p^*M$ 上使之成为一个代数, 称为外代数.

如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 p 附近的局部坐标, 则 $\{dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_s}\}$ 为 $\bigwedge^s T_p^*M$ 的一组基, 因此一个 s 阶反称协变张量 ω 可以表示为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_s},$$

其中,

$$\omega_{i_1\cdots i_s}=\omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_s}}\Big|_p).$$

如果 (U_β,φ_β) 为 p 附近的另一局部坐标, 则

$$\omega=\sum_{j_1<\cdots<j_s}\omega'_{j_1\cdots j_s}dx_\beta^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_\beta^{j_s}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
\omega'_{j_1\cdots j_s}&=\omega(\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_s}}\Big|_p)\\
&=\omega(\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\Big|_p(x_\alpha^{k_1})\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{k_1}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_s}}\Big|_p(x_\alpha^{k_s})\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{k_s}}\Big|_p)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\Big|_p(x_\alpha^{k_1})\cdots\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_s}}\Big|_p(x_\alpha^{k_s})\omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{k_1}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{k_s}}\Big|_p)\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\sum_\pi\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\Big|_p(x_\alpha^{i_{\pi(1)}})\cdots\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_s}}\Big|_p(x_\alpha^{i_{\pi(s)}})\omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_{\pi(1)}}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_{\pi(s)}}}\Big|_p)\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\sum_\pi(-1)^\pi\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\Big|_p(x_\alpha^{i_{\pi(1)}})\cdots\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_s}}\Big|_p(x_\alpha^{i_{\pi(s)}})\omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_s}}\Big|_p)\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_s}\det\big(\frac{\partial(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^{i_k}}{\partial x^{j_l}}\big)_{s\times s}\cdot\omega_{i_1\cdots i_s}.
\end{aligned}$$

特别地, 如果 $s=n$, 则

$$\omega'_{12\cdots n}=\det J(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})\cdot\omega_{12\cdots n}.$$

有了上述转换公式, 我们可以象前面一样, 令

$$\bigwedge^s T^*M=\bigcup_{p\in M}\bigwedge^s T_p^*M$$

则 $\bigwedge^s T^*M$ 为 M 上的向量丛, 它是张量丛 $\otimes^{0,s}TM$ 的子丛, 称为 s 阶外形式丛. s 阶外形式丛的 C^k 截面称为 M 上的 s 次 C^k **外微分形式**或**微分形式**. 和前面类似, 我们有判断微分形式是 C^k 或 C^∞ 的判别法. 微分形式之间也可以自然地定义外积运算 $\wedge$.

给定光滑映射 $f:M\to N$, 我们在前面定义了协变张量场之间的拉回映射, 显然, 拉回映射保持反称性, 即把微分形式拉回成为微分形式. 我们还有

命题 2.5.5. 设 $f: M \to N$ 为光滑映射, ω, η 为 N 上的微分形式, 则

(1) $f^*(h \cdot \omega) = h \circ f \cdot f^*\omega, \ \forall\ h \in C^\infty(N;\mathbb{R})$;

(2) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

证明. (1) 设 $X_1, \cdots, X_r$ 为 p 处的切向量场, 则

$$\begin{aligned} f^*(h\cdot\omega)_p(X_1,\cdots,X_r) &= (h\omega)_{f(p)}(f_{*p}X_1,\cdots,f_{*p}X_r) \\ &= h(f(p))\omega_{f(p)}(f_{*p}X_1,\cdots,f_{*p}X_r) \\ &= h(f(p))f^*\omega(X_1,\cdots,X_r) \\ &= (h\circ f\cdot\omega)_p(X_1,\cdots,X_r). \end{aligned}$$

因此 $f^*(h\cdot\omega) = h\circ f\cdot f^*\omega$.

(2) 我们计算如下:

$$\begin{aligned} &f^*(\omega\wedge\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s}) \\ &= (\omega\wedge\eta)(f_*X_1,\cdots,f_*X_{r+s}) \\ &= \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\omega\otimes\eta)(f_*X_1,\cdots,f_*X_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(\omega\otimes\eta)(f_*X_{\pi(1)},\cdots,f_*X_{\pi(r+s)}) \\ &= \frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi\omega(f_*X_{\pi(1)},\cdots,f_*X_{\pi(r)})\eta(f_*X_{\pi(r+1)},\cdots,f_*X_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi f^*\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})f^*\eta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)}) \\ &= \frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(f^*\omega\otimes f^*\eta)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)}) \\ &= (f^*\omega\wedge f^*\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s}). \end{aligned}$$

因此 $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega\wedge f^*\eta$. □

下面我们研究两个例子.

例 2.5.1. 设 (M, g) 为黎曼流形, 假设 M 可定向, 且 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为 M 的定向坐标覆盖, 在 U_α 上考虑 n 次微分形式

$$\Omega_\alpha = \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n,$$

其中, g_{ij}^α 是黎曼度量 g 在 U_α 中局部表示的系数:

$$g = g_{ij}^\alpha\,dx_\alpha^i\otimes dx_\alpha^j.$$

如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 则

$$(g_{ij}^\beta)_{n\times n} = J(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})(g_{ij}^\alpha)_{n\times n}J(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^T$$

这说明

$$\det(g^{\beta}_{ij})_{n\times n} = (\det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}))^2 \det(g^{\alpha}_{ij})_{n\times n}$$

因为行列式大于零(定向覆盖), 因此上式说明, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$, 即它们定义了 M 上的整体 n 次微分形式, 称为体积形式.

命题 2.5.6. n 维连通微分流形可定向当且仅当 M 上存在处处非零的 n 次微分形式.

证明. 如果 M 可定向, 则任取 M 上的黎曼度量 g, 由上面的例子知, (M, g) 的体积形式就是一个处处非零的 n 次微分形式.

反之, 设 ω 为 M 上处处非零的 n 次微分形式, 我们来构造 M 的定向坐标覆盖. 首先, 我们选取 M 的坐标覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得 U_α 都是连通集合. 考虑 U_α 光滑函数 f_α,

$$f_\alpha = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\Big|_p\Big).$$

f_α 为处处非零的函数, 因此由 U_α 连通知, f_α 恒大于零或恒小于零. 通过调整坐标次序, 我们不妨设 $f_\alpha > 0$.

断言: $\{U_\alpha\}$ 为 M 的定向坐标覆盖.

事实上, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上,

$$f_\beta = f_\alpha \det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}),$$

因此, 转换映射 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 的 Jacobian 行列式为正, 这说明 M 可定向. □

例 2.5.2. n 维球面 S^n 的可定向性.

记 $i: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含映射, 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上如下 n 次微分形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1},$$

不难证明 (习题), $i^*\omega$ 为 S^n 上处处非零的 n 次微分形式, 因此 S^n 是可定向的微分流形.

例 2.5.3. 实投影空间 RP^n 的定向性质.

考虑商投影 $\pi: S^n \to RP^n$. 令 $\rho: S^n \to S^n$, $\rho(x) = -x$ 为对径映射, 显然有 $\pi \circ \rho = \pi$. 仍记 ω 为上例中的 n 次微分形式, 则

$$\rho^*\omega = (-1)^{n+1}\omega.$$

因此, 如果 n 为奇数, 则 ρ 保持 ω 不变, 从而 RP^n 上存在 n 次微分形式 η, 使得 $\omega=\pi^*\eta$. 因为 ω 在 S^n 上处处非零, 故 η 在 RP^n 上处处非零, 这说明当 n 为奇数时, RP^n 是可定向的.

当 n 为偶数时, RP^n 不可定向. 我们可用反证法来说明这一点: 如果 RP^n 可定向, 则 RP^n 上存在处处非零的 n 次微分形式 τ. 因此 $\pi^*\tau$ 为 S^n 上处处非零的 n 次微分形式, 从而存在 S^n 上处处非零的光滑函数 f, 使得

$$\pi^*\tau = f\cdot\omega$$

另一方面, 由 $\pi\circ\rho=\pi$ 知

$$f\cdot\omega = \pi^*\tau = \rho^*\pi^*\tau = \rho^*(f\omega) = -f\circ\rho\cdot\omega$$

即 $f=-f\circ\rho$, 这和 f 处处非零相矛盾 (介值定理).

例 2.5.4. $\mathbb{R}^{2n}$ 上的辛形式和辛变换.

考虑 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准坐标 $\{x^i\}_{i=1}^{2n}$. 令

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i\wedge dx^{n+i},$$

则 ω 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的 2 次微分形式, 称为标准辛形式. 又令 $\Omega=dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^{2n}$, Ω 为标准体积形式. 简单的计算表明

$$\omega^n = \omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\,\Omega. \tag{2.3}$$

如果 $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 为线性映射, 且 $f^*\omega=\omega$, 则称 f 为辛变换. 对于辛变换, 有

$$f^*\omega^n = (f^*\omega)^n = \omega^n.$$

因此, 由 (2.3) 知 $f^*\Omega=\Omega$. 由本节习题知, 此时

$$\Omega = f^*\Omega = (\det A)\Omega,$$

其中 A 是 f 在标准基下的矩阵表示, 由上式知 $\det A=1$.

注. 如果 A 是辛变换 f 在标准基下的矩阵表示, 则

$$A\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}.$$

下面我们考虑微分形式空间上重要的外微分运算. 这是光滑函数的外微分运算的推广.

定义 2.5.4 (外微分). 设 ω 为 s 次微分形式, 对于任意光滑向量场 X_i $(1 \leqslant i \leqslant s+1)$, 令

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{s+1}) = &\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}X_i\omega(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{s+1}) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{s+1}), \end{aligned}$$

$d\omega$ 称为 ω 的外微分.

我们来说明 $d\omega$ 是 $s+1$ 次的微分形式. 为此首先验证 $d\omega$ 是场张量. 为了简单起见, 以 $s=1$ 加以说明: 设 ω 为 1 次微分形式, 则对任何向量场 X, Y, 均有

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

如果 f 为光滑函数, 则

$$\begin{aligned} d\omega(fX, Y) &= fX\omega(Y) - Y\omega(fX) - \omega([fX, Y]) \\ &= fX\omega(Y) - (Yf)\omega(X) - fY\omega(X) - \omega(f[X, Y] - (Yf)X) \\ &= fX\omega(Y) - (Yf)\omega(X) - fY\omega(X) - f\omega([X, Y]) + (Yf)\omega(X) \\ &= fd\omega(X, Y). \end{aligned}$$

显然, $d\omega$ 关于两个分量 X, Y 是反称的, 因此由上面的计算即知 $d\omega$ 为场张量, 因此定义了一个 2 次反称协变张量场, 即 $d\omega$ 为 2 次微分形式. 对于一般的 s 次微分形式, 类似的计算表明 $d\omega$ 为场张量 (习题). 虽然直接的计算可以说明其反称性, 但为了避免过于冗长的计算, 我们先考虑下面的简单性质.

命题 2.5.7. 设 f 为光滑函数, ω 为 s 次微分形式, 则

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega,$$

特别地, 当 $d\omega = 0$ 时, $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega$.

证明. 任取光滑向量场 $X_1,\cdots,X_{s+1}$, 我们计算如下

$$
\begin{aligned}
&d(f\cdot\omega)(X_1,\cdots,X_{s+1})\\
&=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}X_i[f\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{s+1})]\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}f\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_{s+1})\\
&=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}X_i(f)\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{s+1})+fd\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})\\
&=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}df(X_i)\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{s+1})+fd\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})\\
&=df\wedge\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})+f\cdot d\omega(X_1,\cdots,X_{s+1}).
\end{aligned}
$$

在上面最后的等式中用到了楔积的性质. □

由于我们已经说明了 $d\omega$ 为场张量 (张量场), 故现在可以作一些局部的计算. 设 (U,φ) 为局部坐标, 我们考虑 s 次局部微分形式 $\omega=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$, 因为 $[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]=0$, 因此有

$$
\begin{aligned}
d\omega(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}})&=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}})\\
&=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}\omega_{k_1\cdots\widehat{k_i}\cdots k_{s+1}}=0.
\end{aligned}
$$

在上面最后的等式是因为 ω 的分量为 1 或 0, 因此求导后为零, 这说明此时 $d\omega=0$.

现在, 对于一般的 s 次微分形式 ω, 记其局部表示为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

则由上面的命题和计算即得

$$
\begin{aligned}
d\omega&=\sum_{i_1<\cdots i_s}d\omega_{i_1\cdots i_s}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\\
&=\sum_{i_1<\cdots i_s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.
\end{aligned}
$$

特别地, 上式表明 $d\omega$ 为 $s+1$ 次微分形式. 映射

$$d:C^\infty(M;\ \bigwedge^s T^*M)\to C^\infty(M;\ \bigwedge^{s+1}T^*M)$$

称为**外微分**算子.

命题 2.5.8. 外微分算子 d 具有如下性质

(1) $d(\lambda\omega+\mu\eta)=\lambda d\omega+\mu d\eta,\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$;

(2) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta,\ \omega$ 为 r 次微分形式;

(3) $d^2=0$, 即 $d(d\omega)=0$ 对任意微分形式 ω 成立.

(4) 设 $f:M\to N$ 为光滑映射, ω 为 N 上的微分形式, 则 $d(f^*\omega)=f^*(d\omega)$.

证明. (1) 外微分算子的线性性是显然的.

(2) 由线性性和微分形式的局部表示, 可以假设 $\omega=f\omega_0,\eta=g\eta_0$, 其中 $d\omega_0=0$, $d\eta_0=0$. 于是

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\eta)&=d(fg\omega_0\wedge\eta_0)=d(fg)\wedge\omega_0\wedge\eta_0\\&=gdf\wedge\omega_0\wedge\eta_0+fdg\wedge\omega_0\wedge\eta_0\\&=d\omega\wedge\eta+f(-1)^r\omega_0\wedge dg\wedge\eta_0\\&=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta.\end{aligned}$$

(3) 不妨设 $\omega=f\omega_0$, 其中 $d\omega_0=0$, 则由 (2) 知

$$d(d\omega)=d(df\wedge\omega_0)=d(df)\wedge\omega_0,$$

在局部坐标系中, 有

$$d(df)=d(\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}dx^i)=\frac{\partial^2 f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j.$$

因为上式最后的系数关于指标 i,j 对称, 而 $dx^i\wedge dx^j$ 关于指标 i,j 反对称, 因此求和为零, 即 $d^2=0$.

(4) 先假设 $\omega=dg$, g 为 N 上的光滑函数, 则对于 M 上的切向量 X, 有

$$f^*(dg)(X)=dg(f_*X)=f_*X(g)=X(g\circ f)=d(g\circ f)(X).$$

这说明 $f^*(dg)=d(g\circ f)=d(f^*g))$. 对于一般的微分形式, 利用微分形式的局部表示和拉回映射的性质即可类似证明. □

如果 $d\omega=0$, 则称 ω 为**闭形式**; 如果 $\omega=d\eta$, 则称 ω 为**恰当形式**. 由上述命题知, 恰当形式必为闭形式. s 次闭形式的全体记为 $Z^s(M;\mathbb{R})$, s 次恰当形式的全体记为 $B^s(M;\mathbb{R})$. 令

$$H^s_{dR}(M;\mathbb{R})=Z^s(M;\mathbb{R})/B^s(M;\mathbb{R}),$$

称为 M 的 s 次 de Rham 上同调群. 我们在第四章中将进一步研究 de Rham 上同调群.

推论 2.5.9. 设 $f:M\to N$ 为光滑映射, 则 f 的拉回映射诱导了 *de Rham* 上同调群之间的同态:

$$f^*:H^s_{dR}(N;\mathbb{R})\to H^s_{dR}(M;\mathbb{R}).$$

证明. 由上面的命题即知, f 把闭形式拉回为闭形式, 把恰当形式拉回为恰当形式, 如果用 $[\omega]$ 表示闭形式 ω 的上同调类, 则令

$$f^*[\omega] = [f^*\omega]$$

f^* 就是定义恰当的群同态. □

最后我们来研究外微分运算和 Lie 导数运算之间的关系.

定义 2.5.5 (内乘)**.** *设 ω 为 s 次微分形式, X 为切向量场, 定义 $s-1$ 次微分形式 $i_X(\omega)$ 如下: 设 $Y_1, \cdots, Y_{s-1}$ 为切向量, 令*

$$i_X(\omega)(Y_1, \cdots, Y_{s-1}) = \omega(X, Y_1, \cdots, Y_{s-1}).$$

称算子

$$i_X : C^\infty(M;\ \bigwedge\nolimits^s T^*M) \to C^\infty(M;\ \bigwedge\nolimits^{s-1} T^*M)$$

为关于 X 的内乘算子.

内乘算子具有以下性质:

- $i_X \circ i_X = 0$, $i_{fX}(\omega) = i_X(f\omega) = f i_X(\omega)$, 其中 f 为光滑函数. 这从定义可以立即得到.
- 对于 1 次微分形式 ω, 有 $i_X(\omega) = \omega(X)$. 特别地, $i_X(df) = Xf$, 其中 f 为光滑函数.
- 如果 $\{x^i\}$ 为局部坐标函数, 则

  $$i_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}) = \begin{cases} 0, & i \notin \{i_j\}_{j=1}^s, \\ (-1)^{k-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}, & i = i_k. \end{cases}$$

  这可由定义和简单的计算得出. 由此可知, 对于一般的向量场 X, 有

  $$i_X(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}) = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} X(x^{i_j}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}.$$

- $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X\eta$, 其中 ω 为 r 次微分形式. 这可由微分形式的局部表示和上面两条性质得出.

定义 2.5.6 (Lie 导数)**.** *设 ω 为 s 次微分形式, X 为切向量场, 我们来定义一个新的 s 次微分形式 $L_X(\omega)$ 如下: 设 X 生成的单参数变换群为 $\{\phi_t\}$, 经过 p 的积分曲线记为 $\sigma(t)$, $Y_1, \cdots, Y_s$ 是 p 处的切向量, 则令*

$$L_X(\omega)(Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega_{\sigma(t)}((\phi_t)_* Y_1, \cdots, (\phi_t)_* Y_s)$$

算子 L_X 称为关于 X 的 Lie 导数运算.

我们也可以用拉回映射的求导来表示 Lie 导数:

$$L_X(\omega) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t)^*\omega.$$

Lie 导数运算具有以下性质:

- $L_X(f) = Xf$, 其中 f 为光滑函数. 事实上, 由定义,

$$L_X(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\sigma(t)) = Xf.$$

- $L_X(\omega\wedge\eta) = L_X(\omega)\wedge\eta + \omega\wedge L_X(\eta)$. 这是因为

$$(\phi_t)^*(\omega\wedge\eta) = (\phi_t)^*(\omega)\wedge(\phi_t)^*(\eta)$$

  由 Lie 导数的拉回映射的求导表示即得欲证等式. 特别地, 我们有

$$L_X(f\cdot\omega) = (Xf)\omega + f\cdot L_X\omega.$$

- $dL_X = L_X d$, 即 Lie 导数运算和外微分运算可交换. 这是因为外微分运算和拉回映射可交换.

- $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$. 这条性质的证明留作习题.

命题 2.5.10. 我们有如下恒等式

$$L_X = d\circ i_X + i_X\circ d.$$

证明. 只需局部验证即可, 即假设 $\omega = f dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$, 由几个算子的性质, 我们有

$$\begin{aligned}
di_X(\omega) &= d[f\, i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s})]\\
&= df\wedge i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}) + f\,d\,i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s})\\
&= df\wedge i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s})\\
&\quad + f\,d\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}X(x^{i_k})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_k}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\\
&= df\wedge i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}) + f\sum_{k=1}^{s} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dX(x^{i_k})\wedge\cdots\wedge dx^{i_s};
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
i_X\,d\omega &= i_X(df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s})\\
&= (Xf)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} - df\wedge i_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s});
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
L_X(\omega) &= L_X(f)\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} + f\,L_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s})\\
&= (Xf)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} + f\sum_{k=1}^{s} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge L_X(dx^{i_k})\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\\
&= (Xf)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} + f\sum_{k=1}^{s} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dX(x^{i_k})\wedge dx^{i_s}.
\end{aligned}$$

将上面的这几个等式合起来即得欲证等式. □

注. 内乘运算和 Lie 导数运算均可以直接推广到张量场上. 例如, 设 θ 为 (r,s) 型的张量场, X 为向量场, 则 $L_X\theta$ 仍为 (r,s) 型的张量场, 它可如下定义

$$\begin{aligned}
L_X\theta(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s) &= X(\theta(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s))\\
&\quad-\sum_{i=1}^{r}\theta(\omega_1,\cdots,L_X\omega_i,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_r)\\
&\quad-\sum_{j=1}^{s}\theta(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,L_XX_j,\cdots,X_s).
\end{aligned}$$

当 η 也是张量场时, $L_X(\theta\otimes\eta) = L_X(\theta)\otimes\eta + \theta\otimes L_X(\eta)$.

习题 2.5

1. 给出 2.5.3 中 (3) 的完整证明.
2. 证明等式 (2.2).
3. 设 α 为 1 阶协变张量, β 为 s 阶协变张量, 则
$$\alpha\wedge\beta(X_1,\cdots,X_{s+1}) = \sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i-1}\alpha(X_i)\beta(X_1,X_2,\cdots,\widehat{X_i},X_{s+1})$$
其中 $\widehat{X_i}$ 表示去掉 X_i.
4. 证明, M 可定向当且仅当 $\bigwedge^n T^*M$ 同构于平凡线丛.
5. 设 N 为定向流形 M 的正则子流形, $\dim N = \dim M - 1$. 在 M 上取黎曼度量 g, 向量丛 $TM|_N$ 的一个截面 Y 称为 N 的法向量场, 如果 $Y(p)\perp T_pN$, $\forall p\in N$. 证明, N 可定向当且仅当 N 上存在处处非零的连续法向量场.
6. 设 $f: M\to\mathbb{R}$ 为定向流形上的光滑函数, c 为 f 的正则值. 如果 $f^{-1}(c)$ 非空, 则 $f^{-1}(c)$ 为 M 的定向正则子流形.

7. 证明本节例子中给出的 S^n 上的微分形式的确是处处非零的.

8. 如果 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, 则 $f^*\Omega = (\det A)\Omega$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准体积形式, A 为 f 在标准基下的矩阵表示.

9. 对于一般的 s 次微分形式, 证明 $d\omega$ 是函数线性的, 即为场张量.

10. 设 f 为光滑函数, ω 为微分形式, 则 $d(df \wedge \omega) = -df \wedge d\omega$.

11. 对于微分流形 M, 计算它的 0 次 de Rham 上同调.

§2.6 带边流形

在这一节里我们为下一节的流形上的微积分基本公式作一些预备. 令

$$\mathbb{H}^n_+ = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geqslant 0\},$$

这是 $\mathbb{R}^n$ 的带边上半空间, 其边界 $\partial\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$ 为 $n-1$ 维欧氏空间.

定义 2.6.1. *设 M 为具有 A_2, T_2 性质的拓扑空间, 如果存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 以及相应的同胚族 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$, 其中 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 为 $\mathbb{H}^n_+$ 中的开集, 且当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 转换映射*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

均为 C^k 映射, 则称 M 为 n 维 C^k 带边流形.

为了区别起见, 我们也把本书开头所定义的微分流形称为无边流形. 紧致 (连通) 的无边流形有时称为**闭流形**, 而非紧 (连通) 的无边流形有时称为**开流形**. 对于带边流形, 我们可以类似地定义微分结构, 可定向性以及切丛等.

注. (1) 设 M 是定义中的带边流形, $p \in U_\alpha$. 如果 $\varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}$, 则由逆映射定理不难证明 (习题), 如果 $p \in U_\beta$, 则也有 $\varphi_\beta(p) \in \partial\mathbb{H}$.

(2) 根据 (1), 我们可以可以定义带边流形的边界为:

$$\partial M = \{p \in M \mid \text{存在 } \alpha, \text{ 使得 } \varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}\}.$$

当 φ_α 限制在 $U_\alpha \cap \partial M$ 时, 我们就得到了 ∂M 的局部坐标覆盖, 因此当 M 为 n 维带边流形时, 其边界 ∂M 为无边 $n-1$ 维流形.

例 2.6.1. *显然, 上半空间 $\mathbb{H}^n_+$ 为带边流形, 其边界为无边流形 $\mathbb{R}^{n-1}$. $\mathbb{R}^n$ 中的闭球也是带边流形, 例如, 单位闭球为带边流形, 其边界为单位球面.*

特别地, $\mathbb{R}^1$ 上的闭区间 $[a,b]$ 为带边流形, 其边界由两个点 (零维流形) 组成. 可以证明, 边界非空的 1 维紧致连通带边流形均为某个闭区间.

例 2.6.2. *柱面 $S^1\times I$ 为 2 维带边流形, 其中 I 为某个闭区间; 实心环 $S^1\times D^2$ 为 3 维带边流形, 其中 D^2 为闭的 2 维圆盘.*

例 2.6.3. *Möbius 带.*

考虑乘积空间 $X=[a,b]\times[0,1]$, 在 X 上定义等价关系 $\sim$ 如下: $(x,s)\sim(y,t)$ 当且仅当 $x=a, y=b$ 或 $x=b, y=a$ 且 $s+t=1$. 于是商空间 $X/\sim$ 具有带边流形的结构, 其边界为 S^1. 这个带边流形称为 Möbius 带.

例 2.6.4. *设 W 为微分流形 M 中的开集, 且作为集合, 其边界 ∂W 为 M 的 $n-1$ 维正则子流形, 则 W 在 M 中的闭包 $\bar{W}$ 为带边流形.*

特别地, 如果 $f:M\to\mathbb{R}$ 为无边流形上的光滑函数, 如果 $c\in\mathbb{R}$ 为 f 的正则值, 则 $f^{-1}((-\infty,c])$ 为带边流形.

带边流形去掉边界的部分称为其内部, 这是一个无边流形. 对于带边流形, Sard 定理同样成立.

定理 2.6.1 (Sard)**.** *设 M 为带边流形, N 为无边流形, $f:M\to N$ 为光滑映射, f 在边界 ∂M 上的限制记为 ∂f. 则 f 和 ∂f 的临界值之并为 N 中的零测集, 即, 几乎所有的 $y\in N$ 既是 f 也是 ∂f 的正则值.*

证明. 由无边流形的 Sard 定理, $\partial f:\partial M\to N$ 的临界值为零测集. 同理, f 限制在 M 的内部得到的光滑映射的临界值也为零测集, 从而几乎所有的 $y\in N$ 既是 f 也是 ∂f 的正则值. □

设 $f:M\to N$ 是从带边流形 M 到无边流形 N 的光滑映射, S 为 N 的正则子流形. 如果 f 在 M 的内部的限制映射以及 f 在边界 ∂M 上的限制映射 ∂f 都和 S 横截相交, 则称 f 和 S **横截相交**. 这等价于说, 对任意 $p\in f^{-1}(S)$, 下面的等式成立:

$$f_{*p}(T_pM)+T_{f(p)}S=T_{f(p)}N,$$

$$(\partial f)_{*p}(T_p(\partial M))+T_{f(p)}S=T_{f(p)}N.$$

其中第二个等式当 $p\in\partial M$ 时成立. 和无边流形类似, 我们有

定理 2.6.2. *设 $f:M\to N$ 是从带边流形 M 到无边流形 N 的光滑映射, S 为 N 的正则子流形, 如果 f 和 S 横截相交, 则 $f^{-1}(S)$ 为带边流形, 其边界*

$$\partial f^{-1}(S)=f^{-1}(S)\cap\partial M,$$

且 $\mathrm{codim} f^{-1}(S)=\mathrm{codim} S$.

作为应用, 我们有

定理 2.6.3. *设 M 为紧致带边流形, 则不存在光滑映射 $f: M \to \partial M$, 使得 ∂f 为恒同映射 id.*

证明. 选取 $q \in \partial M$, 使得 q 为 f 的正则值. 因为 f 在边界上为恒同映射, q 也是 ∂f 的正则值. 因此 $f^{-1}(q)$ 为紧致 1 维带边流形, 且

$$\partial f^{-1}(q) = f^{-1}(q) \cap \partial M = \{q\}.$$

然而紧致 1 维带边流形的边界必由偶数个点组成, 这就得到了一个矛盾. □

在上面的定理中, 光滑性条件的要求有时可以减弱为连续性, 我们以 $\mathbb{R}^n$ 中的单位闭球 D^n 为例加以说明.

定理 2.6.4. *不存在连续映射 $f: D^n \to S^{n-1}$, 使得 f 限制在边界 S^{n-1} 上为恒同映射.*

证明. 用反证法. 假设这样的连续映射 $f: D^n \to S^{n-1}$ 存在, 则定义 $\tilde{f}: D^n \to S^{n-1}$ 如下:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(2x), & \|x\| \leqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & \|x\| \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ 仍为连续映射, 且在 $\{\frac{1}{2} < \|x\| \leqslant 1\}$ 上光滑, 在 S^{n-1} 上为恒同映射. 我们用光滑映射 $\tilde{g}: D^n \to S^{n-1}$ 逼近 $\tilde{f}$, 使得 $\tilde{g}$ 在 $\{\frac{2}{3} < \|x\| \leqslant 1\}$ 上保持不变, 且

$$\|\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\| \leqslant \frac{1}{4}, \ \ \forall\, x \in D^n.$$

令 $g = r \circ \tilde{g}$, 其中 $r: \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}$ 为压缩映射:

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

显然, g 是光滑的, 且限制在 S^{n-1} 上为恒同映射, 这和前一定理的结论相矛盾. □

推论 2.6.5 (Brouwer)**.** *对任何连续映射 $f: D^n \to D^n$, 必存在 $x_0 \in D^n$, 使得 $f(x_0) = x_0$.*

证明. 用反证法. 如果连续映射 $f: D^n \to D^n$ 没有不动点, 即 $f(x) \neq x$, 任意 $x \in D^n$. 则定义映射 $g: D^n \to S^{n-1}$ 为 $g(x) = f(x) + t(x - f(x))$, 其中 $t = t(x)$ 为下面方程中的惟一正解:

$$y - f(x) = t(x - f(x)), \ \|y\| = 1.$$

通过解一元二次方程可知 $t(x)$ 为 x 的连续函数, 且当 $\|x\|=1$ 时, $t=1$, 即 $g(x)=x$, $x\in S^{n-1}$. 这样我们就得到了从 D^n 到 S^{n-1} 的连续映射, 且它限制在 S^{n-1} 上为恒同映射, 这和上面定理的结论相矛盾. □

下面考虑带边流形的定向. 我们知道, 如果 M 为 n 维带边流形, 则其边界 ∂M 为 $n-1$ 维无边流形, 因此其切空间为 M 在该点切空间的一个超平面, 超平面两侧的切向量分别称为的内向量和外向量. 利用局部坐标, 我们可以定义内向量如下: 设 (U,φ) 为 $p\in\partial M$ 附近的局部坐标系, 使得

$$\varphi(U)\subset\mathbb{H}^n,\ \ \varphi(U\cap\partial M)=\varphi(U)\cap\partial\mathbb{H}.$$

设 $X_p\in T_pM-T_p(\partial M)$, 如果 $X_p(x^n)\geqslant 0$, 则称 X_p 为内向量. 我们要说明这个定义是恰当的. 为此设 (V,ψ) 为满足同样条件的 p 附近的局部坐标, y^i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为坐标函数, 则

$$X_p(y^n)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p)X_p(x^i).$$

因为 y^n 限制在 ∂M 上恒为零, 故当 $i<n$ 时, $\frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p)=0$. 且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p)&=\lim_{x_n\to0^+}\frac{y^n(x)-y^n(p)}{x^n-x^n(p)}\\&=\lim_{x_n\to0^+}\frac{y^n(x)}{x^n}\geqslant 0,\end{aligned}$$

因此

$$X_p(y^n)=\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p)X_p(x^n)\geqslant 0.$$

这说明内向量的定义与局部坐标的选取无关. 类似地可以定义外向量. 如果我们在 M 上选取黎曼度量, 则也可以把内法向量定义为与 $T_p(\partial M)$ 正交的内向量. 因此, 在边界 ∂M 上每一点处均存在惟一的一个单位内法向量, 这是 ∂M 的法从的一个处处非零的截面, 因此有

命题 2.6.6. *带边流形边界上的法从为平凡线丛.*

如果 M 为可定向带边流形, 则得到下面的推论

推论 2.6.7. *如果 M 为可定向带边流形, 则其边界 ∂M 为可定向的无边流形.*

我们可以用定向局部坐标覆盖将 M 和 ∂M 上的定向表示出来. 为此, 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为 M 的一个定向坐标覆盖, 则考虑 ∂M 的坐标覆盖

$$\{(U_\alpha\cap\partial M,\ \varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap\partial M})\},$$

我们来说明这是 ∂M 的一个定向坐标覆盖.

事实上, 注意到 $\varphi_\beta^n|_{\partial M}\equiv 0$, 故

$$\frac{\partial(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^n}{\partial x^i}\Big|_{\partial M}=0,\quad i\leqslant n-1.$$

从而有

$$0<\det J(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\partial M}=\det J(\varphi_\beta|_{\partial M}\circ\varphi_\alpha|_{\partial M}^{-1})\frac{\partial(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^n}{\partial x^n}\Big|_{\partial M},$$

在前面我们已经证明 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}(x_\beta^n)\geqslant 0$, 因此上式表明

$$\det J(\varphi_\beta|_{\partial M}\circ\varphi_\alpha|_{\partial M}^{-1})>0.$$

这说明 M 上的定向坐标覆盖限制在边界 ∂M 上也是定向坐标覆盖.

通常, 我们用定向坐标覆盖中的有序坐标函数来表示一个定向. 在此意义下, 如果 $\{x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n\}$ 为 M 的一个定向, 则 $\{(-1)^n x_\alpha^1,x_\alpha^2,\cdots,x_\alpha^{n-1}\}$ 为 ∂M 上的一个定向, 称为**诱导定向**.

有时我们也用一个处处非零的 n 次微分形式来表示一个定向. 两个处处非零的 n 次微分形式 ω 和 η 之间相差一个处处非零的光滑函数, 即

$$\omega=f\eta.$$

当 f 恒正时, 称 ω 和 η 表示同一个定向; 当 f 恒负时, 称 ω 和 η 表示相反定向. 如果 $g:M\to N$ 为定向流形之间的微分同胚, ω_M, ω_N 分别为代表 M, N 定向的 n 次微分形式, 则当 $f^*\omega_N$ 和 ω_M 表示同一定向时, 称 f 为保持定向的微分同胚.

回到带边流形的定向, 沿用前面的记号, 如果 $\omega=dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n$ 代表了 M 的定向, 则 $\omega'=(-1)^n dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{n-1}$ 表示了边界 ∂M 的定向, 这样选取的定向满足下面的等式:

$$(-dx_\alpha^n)\wedge\omega'=(-dx_\alpha^n)\wedge(-1)^n dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{n-1}=\omega.$$

习题 2.6

1. 给出本节定义 2.6.1 后注记的证明.

2. 设 M 为无边流形, N 为带边流形, 证明 $M\times N$ 为带边流形, 其边界为 $M\times\partial N$.

3. 证明 Möbius 带不可定向.

4. 设 M^n 为连通可定向的无边流形, N^{n-1} 为 M 的紧致连通正则子流形. 如果集合 M^n-N^{n-1} 不连通, 则 N^{n-1} 可定向.

5. 用 Brouwer 不动点定理证明: 具有非负元素的 n 阶方阵必定存在一个非负实特征值.

6. 证明带边流形边界上的单位内法向量场为法从的光滑截面.

7. 设 M 为可定向带边流形, 证明 M 上存在光滑 1 次微分形式 η, 使得 $\eta(T\partial M) = 0$, 且 η 在 ∂M 上处处非零.

§2.7 Stokes 积分公式

下面我们考虑微分形式在可定向流形上的积分. 为此设 M 为 n 维 (带边) 流形, 并在 M 上给定了一个定向. 设 ω 为 M 上具有紧支集的 n 次微分形式, 即支集

$$\operatorname{Supp}\omega = \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}$$

为紧致集合. 我们假设以下出现的局部坐标系均与给定的定向相容.

(1) 假设 $\operatorname{Supp}\omega$ 含于某局部坐标邻域 U_α 中, 且在此局部坐标下 ω 表示为

$$\omega = a_\alpha\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

ω 在 M 上的积分定义为如下多元函数的积分

$$\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x)\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

并记为 $\displaystyle\int_M \omega$.

断言: 上述积分和局部坐标的选取无关.

事实上, 如果 $\operatorname{Supp}\omega$ 含于另一局部坐标邻域 U_β 中, 则 $\operatorname{Supp}\omega \subset U_\alpha \cap U_\beta$. 在 U_β 中, ω 可以表示为

$$\omega = b_\beta\, dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n,$$

则

$$b_\beta = \det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \cdot a_\alpha.$$

因此有

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_\beta(U_\beta)} b_\beta\, dx_\beta^1 \cdots dx_\beta^n &= \int_{\varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)} b_\beta\, dx_\beta^1 \cdots dx_\beta^n \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)} |\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}))| \cdot b_\beta\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} a_\alpha\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n.
\end{aligned}$$

上面倒数第二式用到了坐标转换映射 Jacobian 行列式大于零以及多元函数积分的变量代换公式.

(2) 设 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i$, 且 ω_i 的支集均含于某一个局部坐标邻域 U 中, 则 ω 的支集也含于 U 中, 因此可以用 (1) 中的方式定义 ω 在 M 上的积分.

断言: $\int_M\omega=\sum\limits_{i=1}^{k}\int_M\omega_i$.

事实上, 如果 ω_i 在 U 中有局部表示 $\omega_i=a_i\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 则 ω 有局部表示

$$\omega=(\sum_{i=1}^{k}a_i)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_M\omega&=\int_{\varphi(U)}\big(\sum_{i=1}^{k}a_i\circ\varphi^{-1}(x)\big)dx^1\cdots dx^n\\&=\sum_{i=1}^{k}\int_{\varphi(U)}a_i\circ\varphi^{-1}(x)\,dx^1\cdots dx^n\\&=\int_M\omega_i.\end{aligned}$$

(3) 最后, 设 ω 为具有紧支集的 n 次微分形式, 取从属于 $\mathrm{Supp}\,\omega$ 的一个有限局部坐标覆盖的单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$, 并令

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_M\varphi_\alpha\cdot\omega,$$

称为 ω 在 M 上的积分. 我们来说明, 积分的定义是恰当的, 和开覆盖及单位分解的选取无关.

事实上, 如果另有一个坐标覆盖以及相应的单位分解 $\{\psi_\beta\}$, 则对每一个固定的指标 α, 由于微分形式 $\psi_\beta\varphi_\alpha\omega$ 的支集都在统一坐标邻域中, 由 (2) 就有

$$\int_M\varphi_\alpha\omega=\sum_\beta\int_M\psi_\beta\varphi_\alpha\omega,$$

同理有

$$\int_M\psi_\beta\omega=\sum_\alpha\int_M\varphi_\alpha\psi_\beta\omega.$$

这说明

$$\begin{aligned}\sum_\alpha\int_M\varphi_\alpha\omega&=\sum_\alpha\sum_\beta\int_M\psi_\beta\varphi_\alpha\omega\\&=\sum_\beta\sum_\alpha\int_M\psi_\beta\varphi_\alpha\omega\\&=\sum_\beta\int_M\psi_\beta\omega.\end{aligned}$$

微分形式的积分具有如下性质:

- $\int_{-M}\omega = -\int_M \omega$, 其中 $-M$ 表示选取了与 M 上给定定向相反的定向. 例如, 如果 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ 为 M 上定向坐标, 则 $\{y^1 = -x^1, y^2 = x^2, \cdots, y^n = x^n\}$ 为 $-M$ 的定向坐标. 如果 ω 在前一局部坐标下局部表示的系数为 $a(x)$, 则在后一局部坐标下局部表示的系数为 $-a(x)$, 因此由积分的定义知 ω 在这两个定向下的积分相差一个符号.

- $\int_M(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda\int_M \omega + \mu\int_M \eta$, 其中 λ, μ 为实数. 这由积分的定义可以立即推出.

- 设 $f: M \to N$ 为定向流形之间保持定向的微分同胚, ω 为 N 上具有紧支集的微分形式, 则
$$\int_M f^*\omega = \int_N \omega.$$
事实上, 如果 $\{\rho_\alpha\}$ 为 N 上的单位分解, 则 $\rho_\alpha \circ f$ 为 M 上的单位分解, 通过利用单位分解, 上述等式由多元函数积分的变量替换公式即可推出.

在微积分中, 联系微分和积分的 Newton-Leibniz 公式或微积分基本公式是最重要的一个结果. 下面我们在微分流形上给出一个联系外微分和微分形式积分的公式, 它可视为流形上的微积分基本公式. 我们先看一个简单的情形.

定理 2.7.1. 设 M^n 为定向无边流形, ω 为具有紧支集的 $n-1$ 次微分形式, 则
$$\int_M d\omega = 0.$$

证明. 利用单位分解我们不妨假设 ω 的支集含于局部坐标邻域 U 中, 将 ω 写为
$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$
则
$$d\omega = (\frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \cdots \frac{\partial a_n}{\partial x^n}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$
于是
$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n.$$

注意到 a_i 的支集含于 U 中, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^i \, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [a_i \Big|_{x^i=-\infty}^{x^i=+\infty}] \, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= 0,\end{aligned}$$

上面我们用到 a_i 支集的紧致性. 由此即知 $\displaystyle\int_M d\omega = 0$. □

推论 2.7.2. *设 M^n 为闭的可定向微分流形, 则 $H^n_{dR}(M;\mathbb{R}) \neq 0$.*

证明. 设 M 为可定向流形, 任取 M 的黎曼度量 g, 其体积形式 Ω 为 M 上处处非零的 n 次微分形式, 因为 M 上的 $n+1$ 次微分形式均为零, 故 Ω 为闭形式, 它代表了 de Rham 上同调群中的一个元素 $[\Omega]$. 记

$$\mathrm{Vol}(M,g) = \int_M \Omega,$$

称为黎曼流形 (M,g) 的体积. 根据 Ω 的局部表达式易知 $\mathrm{Vol}(M,g) > 0$.

另一方面, 如果 Ω 为恰当形式, 即 $\Omega = d\eta$, 则由前一定理, 有

$$\int_M \Omega = \int_M d\eta = 0.$$

这就说明 $[\Omega]$ 为 $H^n_{dR}(M;\mathbb{R})$ 中非零元素. □

下面的定理是流形上的微积分基本公式.

定理 2.7.3 (Stokes)**.** *设 M^n 为定向带边流形, ω 为 M 上具有紧支集的 $n-1$ 次微分形式, 则*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

其中, $i : \partial M \to M$ 为包含映射, ∂M 上的定向为诱导定向.

证明. 通过利用单位分解, 不妨设 $\mathrm{Supp}\,\omega$ 含于坐标邻域 U 中, φ 为 U 上的坐标函数, 且

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}.$$

ω 在 U 中可以表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

于是

$$d\omega = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

我们分两种情况讨论:

(1) $\partial M \cap U = \varnothing$. 此时, 和前面定理的证明一样, 有

$$\int_M d\omega = \int_U d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = 0.$$

另一方面, 由于 $\partial M \cap \mathrm{Supp}\, \omega = \varnothing$, 故 $i^*\omega = 0$, 从而

$$\int_{\partial M} i^*\omega = 0 = \int_M d\omega.$$

(2) $\partial M \cap U \neq \varnothing$. 此时,

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{H}^n_+} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} a_i \Big|_{x^i=-\infty}^{x^i=+\infty} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n \Big|_{x^n=0}^{x^n=+\infty} dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= -\int_{\partial \mathbb{H}} a_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由于 $x^n|_{\partial M} \equiv 0$, 故

$$i^*\omega = (-1)^{n-1} a_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1},$$

由于 ∂M 上的诱导定向由坐标 $\{(-1)^n x^1, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 给出, 因此

$$\int_{\partial M} i^*\omega = -\int_{\partial \mathbb{H}} a_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}.$$

这说明

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

这就证明了定理. □

设 M 为定向带边流形, Ω 为一个体积形式. 如果 X 为 M 上的光滑向量场, 则 $L_X\Omega$ 可以写为

$$L_X\Omega = \mathrm{div}(X)\Omega,$$

系数 $\mathrm{div}(X)$ 称为 X 的**散度**.

推论 2.7.4 (散度定理). *设 M 为定向带边流形, Ω 为体积形式, X 为 M 上具有紧支集的光滑向量场, 则*

$$\int_M \mathrm{div}(X)\Omega = \int_{\partial M} i_X\Omega.$$

证明. 利用等式

$$L_X\Omega = d\circ i_X\Omega + i_X\circ d\Omega = d\circ i_X\Omega$$

以及 Stokes 公式即可. □

如果体积形式 Ω 是 M 上黎曼度量 g 的体积形式, 则记 g 在 ∂M 上的限制的体积形式为 ω. 记 $\vec{N}$ 为边界 ∂M 的单位外法向量, 则有

推论 2.7.5. *在上面推论的条件下, 有*

$$\int_M \mathrm{div}(X)\Omega = \int_{\partial M}\langle X,\vec{N}\rangle\omega.$$

证明. 设 $p\in\partial M$, 取 $T_p(\partial M)$ 的一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, 使得

$$\omega(e_1,\cdots,e_{n-1}) = 1.$$

则

$$\begin{aligned}
i_X\Omega(e_1,\cdots,e_{n-1}) &= \Omega(X,e_1,\cdots,e_{n-1})\\
&= \Omega(\langle X,\vec{N}\rangle\vec{N} + \sum_{i=1}^{n-1}\langle X,e_i\rangle e_i,\ e_1,\cdots,e_{n-1})\\
&= \langle X,\vec{N}\rangle\Omega(\vec{N},e_1,\cdots,e_{n-1}) = \langle X,\vec{N}\rangle.
\end{aligned}$$

这里我们用到了诱导定向的定义. 这说明

$$i_X\Omega = \langle X,\vec{N}\rangle\omega,$$

从而本推论由前一推论即可得到. □

例 2.7.1. Newton – Leibniz 公式.

取 1 维带边流形 $[a,b]$ 其定向由 $\mathbb{R}^1$ 上的标准坐标给出, 考虑 1 次微分形式 $\omega = df = f'(x)dx$, 则由 Stokes 公式, 有

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b df = \int_{\partial[a,b]} f = f(b)-f(a) = f(x)\Big|_a^b.$$

此处, $\partial[a,b]$ 由带有诱导定向的两点 $\{-a,b\}$ 组成.

例 2.7.2. $\mathbb{R}^2$ 中的 Green 公式.

考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的有界区域 W, 设其边界为 1 维正则子流形 (曲线), W 上的定向由 $\mathbb{R}^2$ 上的标准坐标 $\{x,y\}$ 给出, ∂W 的定向为诱导定向, 即由 "右手法则" 确定的定向. 设 $\omega = pdx + qdy$ 为 1 次微分形式, 则

$$d\omega = (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dx \wedge dy.$$

由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_W d\omega &= \int_W (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dx \wedge dy \\ &= \int_{\partial W} pdx + qdy = \int_{\partial W} \omega.\end{aligned}$$

例 2.7.3. $\mathbb{R}^3$ 中的 Stokes 公式.

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维曲面 M, 其边界 ∂M 为 1 维正则子流形, 在 M 上选定外法向, 并由此从 $\mathbb{R}^3$ 中诱导定向 ("右手法则"), ∂M 的定向从 M 诱导而来. 如果 $\omega = pdx + qdy + rdz$ 为 1 形式, 则

$$d\omega = (\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dx \wedge dy.$$

由 Stokes 公式, 得

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_M (\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dx \wedge dy \\ &= \int_{\partial M} pdx + qdy + rdz = \int_{\partial M} \omega.\end{aligned}$$

例 2.7.4. $\mathbb{R}^3$ 中的 Gauss 公式.

设 W 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界开集, 其边界 ∂W 为 2 维曲面, 定向皆为诱导定向. 设 ω 为 2 次微分形式,

$$\omega = pdy \wedge dz + qdz \wedge dx + rdx \wedge dy.$$

则

$$d\omega = (\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz,$$

由 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}\int_W d\omega &= \int_W (\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{\partial W} pdy \wedge dz + qdz \wedge dx + rdx \wedge dy = \int_{\partial M} \omega.\end{aligned}$$

最后我们以一个应用结束本章, 这个应用在前一节也证明过.

定理 2.7.6. *设 M 为定向紧致带边流形, 则不存在光滑映射 $f: M \to \partial M$, 使得 f 限制在 ∂M 上为恒同映射.*

证明. 反证法, 设这样的 f 存在, 我们来导出矛盾. 取 ∂M 上体积形式 ω, 则

$$\int_{\partial M} \omega = \mathrm{Vol}(\partial M) > 0.$$

另一方面, 由于 ∂f 为恒同映射, 故由 Stokes 公式, 有

$$0 < \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} f^*\omega = \int_M df^*\omega = \int_M f^*d\omega = 0,$$

上式最后是因为 $d\omega$ 的次数大于 ∂M 的维数, 从而为零. 这就导出了矛盾. □

习题 2.7

1. 设 M^n 为定向无边流形, M 上具有紧支集的 s 次微分形式全体记为 $\Omega_c^s(M)$, 外微分运算可以自然定义在 $\Omega_c^s(M)$ 上, 令

$$H_c^s(M;\mathbb{R}) = \Omega_c^s(M)/d\Omega_c^{s-1}(M),$$

称为紧支集 de Rham 上同调. 证明, $H_c^n(M;\mathbb{R}) \neq 0$.

2. 计算 S^n 在标准度量下的体积

3. 设 x, y, x 为 $\mathbb{R}^3$ 上的标准坐标, 计算 2 次微分形式 $xdy \wedge dz$ 在 S^2 上的积分, 其中 S^2 的定向取诱导定向 (看成 D^3 的边界).

4. 设 M 为定向紧致流形, g 为黎曼度量, X 为光滑向量场, 它生成的但参数变换群记为 $\{\phi_t\}$, 记 $g_t = (\phi_t)^*g$ 为拉回度量, (M, g_t) 的体积记为 V_t, 证明

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V_t = \int_M \mathrm{div}(X)\Omega,$$

其中 Ω 为 g 的体积形式.

5. 设 M^n 为定向无边流形, α, β 分别为 s 次和 $n-s$ 次微分形式, X 为具有紧支集的光滑向量场, 则

$$\int_M L_X(\alpha) \wedge \beta = -\int_M \alpha \wedge L_X(\beta).$$

6. 证明推论 2.7.5 中用到的等式 $\Omega(\vec{N}, e_1, \cdots, e_{n-1}) = 1$.

第三章　流形的几何

本章介绍流形上的微分几何, 我们将首先引入度量、联络、曲率等几何学基本概念, 并研究若干特殊的例子, 最后证明重要的 Gauss-Bonnet 公式.

§3.1　度量回顾

我们回忆一下, 微分流形上的一个黎曼度量指的是一个二阶正定对称协变张量场, 它在流形的每一点的切空间上都指定了一个内积. 在局部坐标系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 中, 黎曼度量 g 可以表示为

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j,$$

其中

$$g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}).$$

例 3.1.1. *黎曼度量的存在性.*

设 M 为微分流形, 取 M 的局部有限坐标覆盖 $\{U_\alpha\}$, 从属于这个覆盖的单位分解记为 $\{\rho_\alpha\}$. 如果 U_α 中的坐标函数为 $\{x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n\}$, 令

$$g = \sum_{\alpha} \rho_\alpha g_{ij}^\alpha dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j,$$

其中 (g_{ij}^α) 是 U_α 上的正定对称函数矩阵. 显然, g 为 M 上的二阶对称协变张量场. 根据单位分解函数的性质也容易看出 g 是正定的, 即 g 是 M 上的黎曼度量.

例 3.1.2. *拉回度量*

设 $f : M \to N$ 为浸入, h 是 N 上的黎曼度量, 则拉回协变张量场 f^*h 是 M 上的二阶协变对称张量场. 因为 f 是浸入, 其切映射是非退化的, 从而 h 也是正定的, 即 h 是 M 上的黎曼度量, 称为拉回度量.

例 3.1.3. *球面 S^n 上的度量.*

考虑包含映射 $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上有标准黎曼度量

$$g_0 = \sum_{i=1}^{n+1} dx^i \otimes dx^i.$$

S^n 上的拉回度量记为 $g_1 = i^* g_0$, g_1 也就是将 g_0 限制在 S^n 上每一点的切空间上得到的限制度量.

现在我们在局部坐标下写出 g_1 的局部表示. 令 $U = S^n - \{(0,\cdots,0,-1)\}$, U 上的局部坐标映射为

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = \Big(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\Big),$$

其中 $x = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in U$. 如果记 φ 的第 i 个分量为 u_i, 则

$$x^i = \frac{2u^i}{1+\sum_{i=1}^n (u^i)^2} \quad (1 \leqslant i \leqslant n); \quad x^{n+1} = \frac{1-\sum_{i=1}^n (u^i)^2}{1+\sum_{i=1}^n (u^i)^2}.$$

因此, 直接的计算表明, 在 U 中 g_1 可以表示为

$$g_1 = i^* g_0 = \frac{4}{[1+\sum_{i=1}^n (u^i)^2]^2} \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i.$$

类似地, 可以得到 g_1 在 $V = S^n - \{(0,\cdots,0,1)\}$ 上的局部表示.

定义 3.1.1 (等距同构). *设 $f:\ (M,g) \to (N,h)$ 是黎曼流形之间的微分同胚, 如果 $g = f^*h$, 则称 f 为黎曼流形 (M,g) 和 (N,h) 之间的等距同构. 我们不区分等距同构的黎曼流形.*

除了等距同构的概念以外, 还有局部等距同构和等距嵌入的概念. 局部等距同构是指黎曼流形之间的映射 $f : (M,g) \to (N,h)$, 使得任给 $p \in M$, 均存在 p 的开邻域 U, 使得 $f : (U,g) \to (f(U),h)$ 为等距同构. 等距嵌入是指黎曼流形之间的嵌入映射 $f : (M,g) \to (N,h)$, 使得 $g = f^*h$. 1957 年左右, Nash 证明了任何 (完备) 黎曼流形均可等距嵌入到高维欧氏空间中.

黎曼流形 (M,g) 到自身的等距同构称为自同构, 自同构的全体组成的集合在复合运算下形成的群称为等距自同构群, 记为 $I(M,g)$, Myers 和 Steenrod 在 1939 年证明这是一个 Lie 群, 它可自然地作用在 M 上.

定义 3.1.2 (Killing 场). *设 X 为黎曼流形 (M,g) 上的向量场, 如果 X 生成的无穷小变换均为等距同构, 则称 X 为 (M,g) 的 Killing 向量场.*

由 Lie 导数的定义可知, X 为 Killing 向量场当且仅当 $L_X g = 0$. 这等价于说, 对任意向量场 Y, Z, 有

$$X\langle Y,\ Z\rangle = \langle [X,Y],\ Z\rangle + \langle Y,\ [X,Z]\rangle, \tag{3.1}$$

其中 $g = \langle , \rangle$.

例 3.1.4. *欧氏空间的等距同构.*

在 $\mathbb{R}^n$ 上取标准度量. 则如下映射均为等距同构

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = Ax + b,$$

其中 $A \in O(n)$ 为正交矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$. □

例 3.1.5. 复迭空间上的度量.

设 $f: M \to N$ 为微分流形之间的复迭映射, h 为 N 上的黎曼度量, 则 $g = f^*h$ 为 M 上的黎曼度量, 此时 $f: (M, g) \to (N, h)$ 为局部等距同构. □

例 3.1.6. 商空间上的度量.

设 (M, g) 为黎曼流形, G 为 $I(M, g)$ 中的离散子群. 如果 G 在 M 上的作用是自由的, 则商空间

$$M/G = \{G \cdot x \,|\, x \in M\}$$

具有微分流形的结构, 且 M 上的黎曼度量可 “降” 到 M/G 上, 即 M/G 上存在黎曼度量 h, 使得 $g = \pi^*h$, 其中 $\pi: M \to M/G$ 为商投影, 这是一个复迭映射.

作为例子, 考虑欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, g_0)$. $\mathbb{R}^n$ 中的平移都是等距自同构. 作为加群, $\mathbb{R}^n$ 的离散子群也是等距自同构群的离散子群. 如果 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的 n 个向量, 考虑离散子群

$$\Lambda = \{\sum_{i=1}^n m_i v_i \,|\, m_i \in \mathbb{Z}\},$$

Λ 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上都是平移. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义等价关系如下:

$$x \sim y \text{ 当且仅当存在 } m_i \in \mathbb{Z} \text{ 使得 } x - y = \sum_{i=1}^n m_i v_i.$$

于是商空间 $\mathbb{R}^n/\Lambda = \{[x] \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$ 上存在黎曼度量 h, 使得商投影 $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ 为局部等距同构. 商空间 $\mathbb{R}^n/\Lambda$ 为紧致黎曼流形, 通常称为黎曼环面. □

例 3.1.7. 双曲模型的等价性.

考虑 Poincaré 圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$, 其中 $z = x + iy$ 为复坐标, $\mathbb{D}$ 上的黎曼度量为

$$g_{-1} = \frac{4}{[1 - |z|^2]^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

我们还有上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$, $\mathbb{H}$ 上的黎曼度量为

$$h_{-1} = \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

考虑全纯映射

$$\varphi: \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad \varphi(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

则

$$\varphi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}, \quad 1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4\mathrm{Im} z}{|z+i|^2},$$

因此

$$\varphi^* g_{-1} = \frac{4}{[1-|\varphi(z)|]^2}|\varphi'(z)|^2(dx\otimes dx + dy\otimes dy) = \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2}(dx\otimes dx + dy\otimes dy),$$

这说明 φ 是一个等距同构.

类似的计算表明, 当 $\theta\in\mathbb{R}$, $z_0\in\mathbb{D}$ 时, 分式线性变换

$$\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D},\quad \varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

是 $(\mathbb{D}, g_{-1})$ 的等距自同构; 当 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc=1$ 时, 分式线性变换

$$\varphi:\mathbb{H}\to\mathbb{H},\quad \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

是 $(\mathbb{H}, h_{-1})$ 的等距自同构. □

定义 3.1.3 (曲线的长度). *设 $\sigma:[a,b]\to M$ 为黎曼流形 (M,g) 上的 C^1 曲线, 定义其长度 $L(\sigma)$ 为*

$$L(\sigma) = \int_a^b \|\dot\sigma(t)\|dt,$$

其中 $\|\dot\sigma(t)\| = (g(\dot\sigma(t),\dot\sigma(t)))^{1/2}$ 是切向量 $\dot\sigma(t)$ 的长度.

注. (1) 曲线的长度与重新参数化无关; (2) 对于分段 C^1 的曲线, 可以同样地定义其长度; (3) 曲线的长度在等距变换下不变, 即如果 $f: M\to N$ 为等距同构, 则 $L(f(\sigma)) = L(\sigma)$.

利用曲线的长度, 我们可以在黎曼流形上定义一个距离, 使之成为距离 (度量) 空间.

定义 3.1.4 (距离). *设 $p,q\in M$, M 为连通黎曼流形. 令*

$$d(p,q) = \inf_\sigma L(\sigma),$$

称为 p,q 之间的距离, 其中下确界是对所有连接 p,q 的连续分段 C^1 曲线取的.

下列性质是显然的:

- $d(p,q)\geqslant 0$, $\forall\, p,q\in M$;
- $d(p,q) = d(q,p)$, $\forall\, p,q\in M$;
- $d(p,q)\leqslant d(p,r)+d(r,q)$, $\forall\, p,q,r\in M$.

下面的引理表明 (M,d) 的确是一个度量空间.

引理 3.1.1. *当 $p\neq q$ 时, $d(p,q)>0$.*

证明. 取 p 附近的局部坐标系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$, 使得 $x^i(p) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 且

$$q \notin \{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 \leqslant \delta\} = U.$$

在 U 上 M 的黎曼度量 g 可写为

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j.$$

令

$$g_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i,$$

根据黎曼度量的正定性和连续性可知, 存在正数 λ, μ, 使得

$$\lambda^2 g_0 \leqslant g \leqslant \mu^2 g_0.$$

因此, 对于 U 中的曲线 σ, 在 g 和 g_0 下, 其长度满足关系

$$\lambda L_{g_0}(\sigma) \leqslant L_g(\sigma) \leqslant \mu L_{g_0}(\sigma). \tag{3.2}$$

特别地, 当 $x, y \in U$ 时, 取 $\xi(t) = x + t(y - x)$, 则

$$d(x, y) \leqslant L_g(\xi) \leqslant \mu L_{g_0}(\xi) = \mu[\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2]^{1/2}.$$

另一方面, 如果 $\sigma : [a, b] \to U$ 为连接 x, y 的分段 C^1 曲线, 则

$$\begin{aligned} L_{g_0}(\sigma) &= \int_a^b [\sum_{i=1}^{n} (\dot{\sigma}^i(t))^2]^{1/2} dt \\ &\geqslant \int_a^b [\sum_{i=1}^{n} (\sigma^i(t))^2]^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^i(t) \dot{\sigma}^i(t) dt \\ &= \int_a^b \left([\sum_{i=1}^{n} (\sigma^i(t))^2]^{1/2} \right)' dt \\ &= [\sum_{i=1}^{n} (y^i)^2]^{1/2} - [\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

特别地, 如果 $\gamma : [0, 1] \to M$ 是连接 p, q 的曲线, 则存在 t_0, 使得 $\gamma(t_0) \in \partial U$, 此时由 (3.2) 得

$$L_g(\gamma) \geqslant \lambda L_{g_0}(\gamma|_{[0,t_0]}) \geqslant \lambda \delta,$$

即 $d(p, q) \geqslant \lambda \delta > 0$. □

推论 3.1.2. (M, d) 为度量空间.

注. (1) 从引理的证明可以看出, 作为度量空间, (M, d) 的拓扑和微分流形的拓扑是一致的;

(2) 从引理的证明还可以看出, $(\mathbb{R}^n, g_0)$ 中, 连接任意两点的长度最短曲线一定是直线段.

设 $p \in M$, $r > 0$, 记 $B_r(p) = \{q \in M \,|\, d(p,q) < r\}$, 称为以 p 为中心, 以 r 为半径的测地球; 记 $S_r(p) = \{q \in M \,|\, d(p,q) = r\}$, 称为测地球面.

例 3.1.8. *双曲模型中的距离.*

先看 Poincaré 圆盘模型. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, 取等距同构 $\varphi(z) = e^{i\theta}\dfrac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$, 使得 $\varphi(z_1) = 0$, $\varphi(z_2) \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$. 如果 $\sigma : [0,1] \to \mathbb{D}$ 是连接 $\varphi(z_1) = 0$ 和 $\varphi(z_2)$ 的曲线, 记 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ 则

$$\begin{aligned}
L(\sigma) &= \int_0^1 \frac{2}{1 - x^2(t) - y^2(t)}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \\
&\geqslant \int_0^1 \frac{2|x'(t)|}{1 - x^2(t)}dt \geqslant \Big|\int_0^1 \frac{2x'(t)}{1 - x^2(t)}dt\Big| \\
&= \left|\ln\frac{1 + \varphi(z_2)}{1 - \varphi(z_2)}\right| = \ln\frac{1 + |\varphi(z_2)|}{1 - |\varphi(z_2)|} \\
&= \ln\frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 σ 是连接 $\varphi(z_1) = 0$ 和 $\varphi(z_2) \in \mathbb{R}$ 的直线段. 因此

$$d(z_1, z_2) = d(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = \ln\frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}.$$

这就得到了 $(\mathbb{D}, g_{-1})$ 的距离, 也称为双曲距离. □

如果 γ 为黎曼流形 (M, g) 中的曲线, 且 $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L(\gamma|_{[t_1,t_2]})$ 对定义域中任意 $t_1 < t_2$ 成立, 则称 σ 为一条最短测地线. 显然, 在等距同构下, 最短测地线仍然变为最短测地线.

从以上计算可以看出, 经过圆心的直线段均为 $(\mathbb{D}, g_{-1})$ 的最短测地线. 因为分式线性变换将直线变为直线或圆弧, 同时分式线性变换是保角的, 因此, 那些在端点处和单位圆周 $S^1 = \partial\mathbb{D}$ 正交的圆弧 (包括直线) 都是 $(\mathbb{D}, g_{-1})$ 的最短测地线, 并且这也是所有可能的最短测地线.

黎曼度量的概念可以推广到一般的向量丛上. 设 E 为 M 上的一个向量丛, 如果张量丛 $\otimes^{0,2}E = E^* \otimes E^*$ 的一个截面 g 满足正定对称性, 则称为 E 的一个黎曼度量. 即对每一点 $p \in M$, g_p 是纤维 E_p 中的内积. 象切丛上的黎曼度量一样, 利用单位分解可以得到向量丛上黎曼度量的存在性.

在 M 的切丛上给定黎曼度量 g, 我们可以将这个度量定义到其它的张量丛 $\otimes^{r,s}TM$ 上. 先看余切丛 T^*M. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为切空间 T_pM 中的一组标准正交

基, 即

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall\ i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

这一组基的对偶基记为 $\{e^1, \cdots, e^n\}$, 即

$$e^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall\ i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

我们规定 $\{e^1, \cdots, e^n\}$ 是 T_p^*M 的标准正交基, 这样就在余切空间 T_p^*M 中定义了一个内积, 称为诱导内积, 仍记为 g. 在这个内积下, 任意两个余切向量 ω, η 的内积为

$$g(\omega, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i)\eta(e_i),$$

从这个等式不难看出这个内积不依赖于切空间中标准正交基的选取.

有了切空间和余切空间中的内积, 我们可以在张量丛 $\otimes^{r,s}TM$ 上定义内积. 事实上, 只要规定 $\otimes^{r,s}T_pM$ 的基

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \quad (1 \leqslant i_k, j_l \leqslant n)$$

为标准正交基即可.

向量丛上的度量限制在子丛上是子丛上的度量, 因此, 在外形式丛上也有诱导度量.

习题 3.1

1. 给出 S^n 上拉回度量在局部坐标下局部表示的详细计算过程.

2. 设 (M, g) 上任意两点均可用最短测地线连接. 如果 φ, ψ 为等距同构, 且存在一点 $p \in M$, 使得
$$\varphi(p) = \psi(p), \quad \varphi_{*p} = \psi_{*p},$$
证明 $\varphi = \psi$.

3. 利用上题说明, $(\mathbb{R}^n, g_0)$ 的等距同构均形如 $\varphi(x) = Ax + b$, 其中 $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

4. 证明 (S^n, g_1) 的等距同构群为 $O(n+1)$.

5. 证明, 双曲空间中的测地球也是欧氏空间中的标准球, 并计算其球心位置.

6. 求双曲空间的等距同构群.

7. 证明余切空间中的诱导内积不依赖于切空间中标准正交基的选取.

§3.2 联络

在前一章, 我们考虑了流形上的两种求导运算, 一是 Lie 导数, 二是外微分. 前者作用对象为张量场, 后者作用对象为微分形式. 这两种运算之间有紧密的联系. 一个自然的问题就是如何将这些求导运算作用于一般向量丛的截面上. 例如, 给定流形的一个切向, 对于函数我们可以求方向导数. 函数的一般推广为向量丛的截面, 对于截面应该如何求方向导数? 为了解决这一问题, 人们提出了联络的概念, 联络可以看成是求导的一种手段.

设 E 为流形 M 上的向量丛. 为了方便起见, E 上光滑截面的全体记为 $\Gamma(E)$. 例如, M 上光滑向量场的全体可记为 $\Gamma(TM)$, 它等价于 $C^\infty(M;TM)$.

定义 3.2.1 (联络)**.** *满足以下条件的算子* $\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ *称为向量丛* E *上的一个联络:*

(i) $\nabla_{fX+gY}s=f\nabla_X s+g\nabla_Y s,\ \forall\ X,Y\in\Gamma(TM),\ f,g\in C^\infty(M),\ s\in\Gamma(E)$;

(ii) $\nabla_X(s_1+s_2)=\nabla_X s_1+\nabla_X s_2,\ \forall\ X\in\Gamma(TM),\ s_1,s_2\in\Gamma(E)$;

(iii) $\nabla_X(fs)=(Xf)s+f\nabla_X s,\ \forall\ X\in\Gamma(TM),\ f\in C^\infty(M),\ s\in\Gamma(E)$.

作为一种求导方式的推广, 联络具有和方向导数类似的性质:

- 由于联络关于 X 是函数线性的, 因此, 给定切向量 $X_p\in T_pM$ 以及截面 s, 可以定义方向导数 $\nabla_{X_p}s\in E_p$. 事实上, 将 X_p 延拓为光滑向量场 X, 并令
$$\nabla_{X_p}s=\nabla_X s\Big|_p\in E_p$$
即可. 读者可验证上式与向量场的延拓方式无关.

- 虽然联络关于截面 s 不是函数线性的, 但根据定义的条件易见, $\nabla_X s$ 在 p 处的值只与 s 在 p 附近的值有关, 因此联络可作用于局部截面上. 更准确地说, 如果 σ 为 M 上的光滑曲线, 截面 s_1 和 s_2 限制在 σ 上完全相同, 则
$$\nabla_{\dot\sigma}s_1=\nabla_{\dot\sigma}s_2.$$

- 设 λ,μ 为函数, ∇^1,∇^2 为 E 上的两个联络. 如果 $\lambda+\mu=1$, 则线性组合 $\lambda\nabla^1+\mu\nabla^2$ 也是 E 上的联络. 这个结论也可以推广至有限个联络的情形.

下面我们研究向量丛上联络的存在性, 先看平凡丛的情形.

例 3.2.1. 平凡丛 $E=M\times\mathbb{R}^k$ 上的联络.

平凡丛上的截面 s 可以看成 M 上的向量值函数 $s=(f_1,\cdots,f_k)$, 其中 f_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 为 M 上的函数. 如果 X 为 M 上的向量场, 则令

$$\nabla_X s=(Xf_1,\cdots,Xf_k),$$

容易验证这样定义的算子 ∇ 的确是 E 上的一个联络. □

因为向量丛均可局部平凡化, 因此, 作用于局部截面的联络总是可以定义的. 利用单位分解以及联络的上述性质, 我们就可以在向量丛上构造整体的联络了. 事实上, 向量丛上的联络是十分丰富的, 我们往往要根据向量丛的其它几何结构来选取适当的联络.

设 $\sigma:[a,b]\to M$ 为 M 上的光滑曲线, $\sigma(a)=p$, $\sigma(b)=q$. 给定 E 上的联络 ∇, 我们可以定义沿曲线 σ 的一个平移算子.

命题 3.2.1. *给定向量 $v\in E_p$, 存在惟一的沿 σ 的截面 s, 使得 $s(a)=v$, 且 $\nabla_{\dot\sigma}s\equiv 0$.*

证明. 不妨设 σ 含于 E 的一个平凡化坐标邻域 U 内, 设 $\{s_i\}_{i=1}^k$ 为 U 上向量丛 E 的局部标架场 (即局部截面, 且在每一点处均为纤维的一组基). 沿 σ 的截面可以表示为

$$s=\sum_{i=1}^k f_i(t)s_i.$$

条件 $\nabla_{\dot\sigma}s\equiv 0$ 等价于

$$\frac{df_i}{dt}s_i+f_i(t)\nabla_{\dot\sigma}s_i=0,$$

这是关于 $f_i(t)$ 的一阶线性常微分方程组, 在初始条件 $s(a)=v$ 下它有惟一的解. □

满足条件 $\nabla_{\dot\sigma}s\equiv 0$ 的截面 s 称为沿 σ 平行的截面. 现在我们可以定义平移算子 $P_\sigma:\ E_p\to E_q$ 了: 令 $P_\sigma(v)=s(b)\in E_q$, 其中 s 是初值为 v 的沿 σ 平行的截面. 显然, P_σ 是线性算子, 由平行截面的惟一性可知 P_σ 为单射, 因此它实际上总是线性同构.

以下我们转而研究切丛上的联络, 我们将 TM 上的联络称为流形 M 上的仿射联络. 如同在本节开头所说过的那样, 仿射联络提供了向量场的一种求导方式. 不仅如此, 即使对于函数的求导, 联络的存在也是有益的. 例如, 设 f 为光滑函数. 给定 p 处两个切向量 v,w, 如何先后沿 v,w 方向对 f 在 p 处求导? 一个自然的想法是, 首先延拓 v,w 为 M 上的光滑向量场 X,Y, 然后考虑导数 $Y(Xf)$. 不过, 这样定义的导数依赖于 X,Y 的选取. 有了联络, 我们可以定义二阶导数 $\nabla^2 f(v,w)$ 如下:

$$\nabla^2 f(v,w)=[Y(Xf)-\nabla_Y Xf]\Big|_p.$$

下面的命题说明这个定义是恰当的.

命题 3.2.2. 设 ∇ 为 M 上的仿射联络, f 为光滑函数, 则 $\nabla^2 f$ 为 M 上的二阶协变张量场.

证明. 只要说明 $\nabla^2 f$ 关于 X,Y 是函数线性的即可. 关于 Y 的函数线性性是显然的, 以下验证关于 X 的函数线性性. 设 ϕ 为光滑函数, 则

$$\begin{aligned} Y(\phi Xf) - \nabla_Y(\phi X)f &= (Y\phi)Xf + \phi\cdot Y(Xf) - [(Y\phi)Xf + \phi\nabla_Y Xf] \\ &= \phi[Y(Xf) - \nabla_Y Xf], \end{aligned}$$

因此 $\nabla^2 f$ 关于 Y 是函数线性的. □

二阶协变张量场 $\nabla^2 f$ 称为函数 f 在仿射联络 ∇ 下的 Hessian. 我们知道, 欧氏空间中, 函数的 Hessian 矩阵是对称的. 对于仿射联络, 如果要求函数的 Hessian 具有对称性, 则必须有等式

$$X(Yf) - \nabla_X Yf = Y(Xf) - \nabla_Y Xf$$

成立, 即

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])f = 0.$$

命题 3.2.3. 设 ∇ 为 M 上的仿射联络, 则 $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ 定义了 M 上的一个张量场, 称为 ∇ 的挠率张量.

证明. 显然, T 关于 X,Y 具有反称性. 以下说明 T 关于 X 的函数线性性. 设 ϕ 为光滑函数, 则

$$\begin{aligned} T(\phi X, Y) &= \nabla_{\phi X} Y - \nabla_Y(\phi X) - [\phi X, Y] \\ &= \phi\nabla_X Y - (Y\phi)X - \phi\nabla_Y X - \phi[X,Y] + (Y\phi)X \\ &= \phi T(X,Y). \end{aligned}$$

因此 T 是场张量 (张量场). □

如果挠率张量 $T=0$, 则称仿射联络 ∇ 是无挠的或对称的. 对于无挠的仿射联络, 函数 f 的 Hessian 是对称的二阶协变张量场. 设 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 为 M 的局部坐标系, 则 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ 为局部基向量场. 如果 ∇ 为仿射联络, 则记

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

其中 Γ_{ij}^k 是局部函数, 称为仿射联络的 Christoffel 系数. 此时, 挠率张量可计算如下

$$T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

由此可见, ∇ 为无挠联络当且仅当 Γ_{ij}^k 关于指标 i,j 是对称的.

例 3.2.2. 欧氏空间上的仿射联络和平移.

设 $X = (a_1, \cdots, a_n)$, $Y = (b_1, \cdots, b_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场, 定义

$$\nabla_X Y = (Xb_1, \cdots, Xb_n),$$

则 ∇ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射联络. 在标准的直角坐标下, 这个联络的 Christoffel 系数恒为零. 事实上, 记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为标准基向量场, 其中 e_i 是第 i 个分量为 1, 其它分量为零的常值向量场, 则 $\nabla_X e_i = 0$. 特别地, 这个仿射联络是无挠的.

如果 σ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲线, $Y = (b_1, \cdots, b_n)$ 为沿 σ 的平行向量场, 则

$$0 = \nabla_{\dot\sigma} Y = (b_1'(t), \cdots, b_n'(t)),$$

即 b_i 沿 σ 是常值的. 这说明, 这个仿射联络所定义的平移和欧氏空间作为向量空间的平移是一致的. □

设 σ 为流形 M 上的光滑曲线, 则 $\dot\sigma$ 是沿着 σ 的向量场, 如果它沿 σ 自身平行, 则称 σ 为仿射联络的测地线. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 中, σ 可表示为 $\sigma = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$, 从而 $\dot\sigma = \dot x^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$, 条件 $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$ 可写为

$$\ddot x^k(t) + x^i(t)x^j(t)\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \forall\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.3}$$

这是二阶常微分方程组 (但一般不是线性的), 如果给定初值

$$\sigma(a) = p \in M, \quad \dot\sigma(a) = X_p \in T_pM,$$

则其解在局部上是存在且惟一的. 显然, 对于欧氏空间来说, 测地线方程的解均为直线.

欧氏空间中的平移还有一条性质, 即平移算子保持欧氏空间的内积. 如果流形 M 具有黎曼度量 $g = \langle , \rangle$, 则一个仿射联络所定义的平移在什么情况下是保持内积的呢? 这是由所谓的相容性条件所保证的. 设 ∇ 为 M 上的仿射联络, 如果对任意向量场 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, 均有

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

则称 ∇ 与黎曼度量 g 相容.

设 ∇ 与 g 相容. 如果 X, Y 为沿曲线 σ 平行的向量场, 则

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_{\dot\sigma} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{\dot\sigma} Y\rangle = 0,$$

从而 X, Y 的内积沿 σ 保持不变, 这说明沿 σ 的平移是切空间之间的等距变换.

下面的定理是黎曼几何学的基本定理, 它说明与 M 上给定的黎曼度量相容的对称仿射联络是惟一存在的, 这个联络称为 Levi-Civita 联络.

定理 3.2.4. *设 (M,g) 为黎曼流形, 则满足下面条件的仿射联络 ∇ 是存在且惟一的:*

(i) $Z\langle X,Y\rangle = \langle\nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Z Y\rangle,\ \ \forall\ X,Y,Z\in\Gamma(TM)$;

(ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\ \ \forall\ X,Y\in\Gamma(TM)$.

证明. 先说明惟一性. 首先, 根据条件 (i) 得

$$\begin{aligned}
Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Z Y\rangle,\\
X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle,\\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle + \langle Z,\nabla_Y X\rangle.
\end{aligned}$$

然后, 利用度量和联络的对称性得

$$\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle\\
&= \langle\nabla_X Y + \nabla_Y X,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle + \langle X,\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle\\
&= 2\langle\nabla_X Y,Z\rangle - \langle[X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle X,[Y,Z]\rangle,
\end{aligned}$$

由此可知满足条件 (i) 和 (ii) 的联络是惟一的.

反之, 我们可利用上式定义 $\nabla_X Y$, 并且可验证 ∇ 是满足所有条件的联络. □

在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中, 黎曼度量 g 可表示为

$$g = g_{ij}dx^i\otimes dx^j,$$

其中 $g_{ij} = \langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle$. 以 $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x^l}$ 代入上述定理证明的等式中, 得

$$2\Gamma_{ij}^m\cdot g_{ml} = \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l},$$

由此得到 Levi-Civita 联络的 Christoffel 系数在局部坐标下的表达式

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{3.4}$$

其中, g^{kl} 表示 $(g_{ij})_{n\times n}$ 的逆矩阵在 (k,l) 位置的元素.

例 3.2.3. *(S^n,g_1) 的联络和测地线.*

记 $\bar\nabla$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的联络 (前面定义过). 如果 X,Y 为 S^n 上的光滑向量场, 则 $\bar\nabla_X Y$ 仍然有意义, 将它向 S^n 的切空间作投影, 记为 $\nabla_X Y$, 则

$$\nabla_X Y = \bar\nabla_X Y - \langle\bar\nabla_X Y,\vec{x}\rangle\vec{x},$$

其中 $\vec{x}\in\mathbb{R}^{n+1}$ 为 S^n 的位置向量 (单位外法向量场). 下面说明 ∇ 是限制度量 g_1 的 Levi-Civita 联络.

先说明 ∇ 为仿射联络. 联络定义中的 (i), (ii) 是显然满足的. (iii): 给定 S^n 上的光滑函数 f, 有

$$\begin{aligned}\nabla_X(fY) &= \bar{\nabla}_X(fY) - \langle\bar{\nabla}_X(fY), \vec{x}\rangle\vec{x}\\ &= (Xf)Y + f\bar{\nabla}_XY - \langle(Xf)Y + f\bar{\nabla}_XY, \vec{x}\rangle\vec{x}\\ &= (Xf)Y + f\bar{\nabla}_XY - f\langle\bar{\nabla}_XY, \vec{x}\rangle\vec{x}\\ &= (Xf)Y + f\nabla_XY,\end{aligned}$$

其中我们用到切向量场 Y 与法向量场 $\vec{x}$ 之间的正交性.

其次, ∇ 是无挠的:

$$\begin{aligned}\nabla_XY - \nabla_YX &= \bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX - \langle\bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX, \vec{x}\rangle\vec{x}\\ &= [X, Y] - \langle[X, Y], \vec{x}\rangle\vec{x}\\ &= [X, Y],\end{aligned}$$

其中我们用到切向量场 $[X, Y]$ 与法向量场 $\vec{x}$ 之间的正交性.

最后, ∇ 与限制度量相容: 设 X, Y, Z 均为 S^n 上的光滑向量场, 则

$$\begin{aligned}Z\langle X, Y\rangle &= \langle\bar{\nabla}_ZX, Y\rangle + \langle X, \bar{\nabla}_ZY\rangle\\ &= \langle\bar{\nabla}_ZX - \langle\bar{\nabla}_ZX, \vec{x}\rangle\vec{x}, Y\rangle + \langle X, \bar{\nabla}_ZY - \langle\bar{\nabla}_ZY, \vec{x}\rangle\vec{x}\rangle\\ &= \langle\nabla_ZX, Y\rangle + \langle X, \nabla_ZY\rangle.\end{aligned}$$

设 σ 为 S^n 上以弧长为参数的测地线, 则

$$0 = \nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = \bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} - \langle\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma}, \sigma\rangle\sigma = \ddot{\sigma} - \langle\ddot{\sigma}, \sigma\rangle\sigma,$$

其中,

$$\langle\ddot{\sigma}, \sigma\rangle = \langle\dot{\sigma}, \sigma\rangle' - \langle\dot{\sigma}, \dot{\sigma}\rangle = -1,$$

因此, 测的线方程成为

$$\ddot{\sigma} = -\sigma,$$

其解形如

$$\sigma(t) = \sigma(0)\cos t + \dot{\sigma}(0)\sin t,$$

也就是说测地线均为球面大圆 (或大圆的一部分). □

以上关于 S^n 的讨论可以推广到一般的子流形上. 设 (M, g) 为黎曼流形, N 为 M 的子流形, $i : N \to M$ 为包含映射, g 在 N 上的限制 i^*g 成为 N 上的黎曼度量, 我们将 (N, i^*g) 称为 (M, g) 的黎曼子流形. 如果 $\bar{\nabla}$ 为 (M, g) 的 Levi-Civita 联络, 定义

$$\nabla_XY = (\bar{\nabla}_XY)^\top, \quad \forall\ X, Y \in \Gamma(TN),$$

其中 $\top: TM \to TN$ 是正交投影. 这样定义的算子 ∇ 是 (N, i^*g) 的 Levi-Civita 联络.

如前所述, 仿射联络给出了向量场的一种求导方式, 我们可以将这种求导方式推广至所有的张量场上. 先看一些特例. 设 X 为 M 上的光滑向量场.

(1) 如果 f 为光滑函数, 则令 $\nabla_X f = Xf$, 这也就是方向导数;

(2) 如果 ω 为 1 形式, 定义 $\nabla_X\omega$ 如下: 任给光滑向量场 Y, 令

$$\nabla_X\omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y),$$

上式关于向量场 Y 是函数线性的, 因此 $\nabla_X\omega$ 为 1 形式. 算子 ∇ 是 1 形式丛上的一个联络.

按照以上定义, 在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, 我们有

$$\nabla_X(dx^j)(\frac{\partial}{\partial x^k}) = -dx^j(\nabla_X\frac{\partial}{\partial x^k}),$$

特别地, 当 $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ 时, 有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^j)(\frac{\partial}{\partial x^k}) = -dx^j(\Gamma_{ik}^l\frac{\partial}{\partial x^l}) = -\Gamma_{ik}^j,$$

这说明

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^j) = -\Gamma_{ik}^j dx^k. \tag{3.5}$$

(3) 如果 $Y\otimes\omega$ 为 $(1,1)$ 型的张量场, 则令

$$\nabla_X(Y\otimes\omega) = (\nabla_X Y)\otimes\omega + Y\otimes(\nabla_X\omega),$$

这样就将联络定义到了 $(1,1)$ 型的张量丛上.

一般地, 通过令 ∇_X 与张量积运算 $\otimes$ 可交换, 可以将切丛上的联络推广至其它张量场上. 我们也可以这样定义张量丛上的联络: 设 θ 为 (r,s) 型的张量场, 任给 1 形式 $\{\eta_i\}_{i=1}^r$ 以及向量场 $\{Y_j\}_{j=1}^s$, 令

$$\begin{aligned}\nabla_X\theta(\eta_1,\cdots,\eta_r;Y_1,\cdots,Y_s) = {} & X(\theta(\eta_1,\cdots,\eta_r;Y_1,\cdots,Y_s))\\ & -\sum_{i=1}^r\theta(\eta_1,\cdots,\eta_{i-1},\nabla_X\eta_i,\eta_{i+1},\cdots\eta_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\ & -\sum_{j=1}^s\theta(\eta_1,\cdots,\eta_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s),\end{aligned}$$

这样定义的 $\nabla_X\theta$ 是 (r,s) 型的场张量 (张量场), 称为 θ 关于 X 的协变导数. 如果此协变导数为零, 则称 θ 关于 X 平行. 如果 ∇ 为 Levi-Civita 联络, g 为黎曼度量, 则按照以上定义, 任给向量场 Y, Z, 有

$$\nabla_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

即在 Levi-Civita 联络下, 黎曼度量总是平行的.

直接的验算表明, ∇ 是 (r,s) 型张量丛上的联络. 这个联络具有以下性质:

- ∇_X 与张量积运算 $\otimes$ 可交换, 即

$$\nabla_X(\theta\otimes\eta)=(\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta,$$

其中 θ,η 均为张量场. 我们验证一个特殊情形, 一般的情形留作练习. 设 Y 为向量场, ω 为 1 形式. 则任给 1 形式 η 和向量场 Z, 有

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y\otimes\omega)(\eta,Z)&=X(\eta(Y)\cdot\omega(Z))-\nabla_X\eta(Y)\cdot\omega(Z)-\eta(Y)\cdot\omega(\nabla_XZ)\\&=X(\eta(Y))\cdot\omega(Z)+\eta(Y)\cdot X(\omega(Z))-X(\eta(Y))\cdot\omega(Z)\\&\quad+\eta(\nabla_XY)\cdot\omega(Z)-\eta(Y)\cdot\omega(\nabla_XZ)\\&=\eta(\nabla_XY)\cdot\omega(Z)+\eta(Y)\cdot[X(\omega(Z))-\omega(\nabla_XZ)]\\&=[(\nabla_XY)\otimes\omega+Y\otimes(\nabla_X\omega)](\eta,Z),\end{aligned}$$

这说明协变求导和张量积可交换.

- ∇_X 与外积运算 $\wedge$ 可交换, 即

$$\nabla_X(\alpha\wedge\beta)=(\nabla_X\alpha)\wedge\eta+\alpha\wedge\nabla_X\beta,$$

其中 α, β 均为微分形式. 这可由上一条以及外积运算的定义推出.

- ∇_X 与缩并运算可交换. 记 C_i^j 为逆变指标 i 和协变指标 j 之间的缩并算子, 它将 (r,s) 型的张量缩并为 $(r-1,s-1)$ 型的张量. 于是有 $\nabla_X\circ C_j^i=C_j^i\circ\nabla_X$. 我们仍以一个特例加以说明. 设 Y,Z 为向量场, ω,η 为 1 形式. 则 $\theta=Y\otimes Z\otimes\omega\otimes\eta$ 为 $(2,2)$ 型的张量场, 将其第二个逆变指标和第一个协变指标作缩并, 得 $(1,1)$ 型张量场 $C_1^2(\theta)=\omega(Z)\cdot Y\otimes\eta$. 计算协变导数如下:

$$\nabla_X\circ C_1^2(\theta)=X(\omega(Z))\cdot Y\otimes\eta+\omega(Z)\cdot\nabla_XY\otimes\eta+\omega(Z)\cdot Y\otimes\nabla_X\eta.$$

另一方面, 先求协变导数再作缩并:

$$\begin{aligned}C_1^2\circ\nabla_X(\theta)&=\omega(Z)\cdot\nabla_XY\otimes\eta+\omega(\nabla_XZ)\cdot Y\otimes\eta\\&\quad+\nabla_X\omega(Z)\cdot Y\otimes\eta+\omega(Z)\cdot Y\otimes\nabla_X\eta\\&=\omega(Z)\cdot\nabla_XY\otimes\eta+X(\omega(Z))\cdot Y\otimes\eta+\omega(Z)\cdot Y\otimes\nabla_X\eta,\end{aligned}$$

因此所得两个结果是一致的.

进一步, 由于协变求导算子 ∇_X 关于 X 函数线性, 因此我们可以象对函数求全微分那样, 对张量场求一种全微分. 具体来说, 设 θ 为 (r,s) 型张量场, 定义 $(r,s+1)$ 型的张量场 $\nabla\theta$ 如下: 任给 1 形式 $\{\eta_i\}_{i=1}^r$ 以及向量场 $\{Y_j\}_{j=1}^s$, X, 令

$$\nabla\theta(\eta_1,\cdots,\eta_r;Y_1,\cdots,Y_s,X)=\nabla_X\theta(\eta_1,\cdots,\eta_r;Y_1,\cdots,Y_s),$$

这样定义的 $\nabla\theta$ 是 $(r,s+1)$ 型的场张量 (张量场), 称为 θ 的协变微分. 协变微分为零的张量场称为平行张量场. 例如, 在 Levi-Civita 联络下, 黎曼度量就是平行的.

在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中, 设 (r,s) 型张量 θ 表示为

$$\theta=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

其协变微分记为

$$\nabla\theta=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^k,$$

其中, 协变微分的系数计算如下:

$$\begin{aligned}
\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\theta(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}})\\
&=\frac{\partial\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}-\sum_{p=1}^r\theta(dx^{i_1},\cdots,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}dx^{i_p},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}})\\
&\quad-\sum_{q=1}^s\theta(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^{j_q}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}})\\
&=\frac{\partial\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}+\sum_{p=1}^r\theta^{i_1\cdots i_{p-1}\,h\,i_{p+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_p}_{kh}-\sum_{q=1}^s\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{q-1}\,h\,j_{q+1}\cdots j_s}\Gamma^h_{k\,j_q}.
\end{aligned}$$

由上式可清楚地看到, 协变导数和通常的偏导数之间的差别体现在 Christoffel 系数的引入上.

如果 f 为函数, 则由定义易见 $\nabla f=df$, 协变微分也就是外微分 (注意, 以前我们曾用记号 ∇f 表示 f 的梯度场). 于是, $\nabla^2 f=\nabla(\nabla f)$ 为 2 阶协变张量场, 按定义计算如下:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y)&=\nabla_Y(df)(X)\\
&=Y(df(X))-df(\nabla_Y X)\\
&=Y(Xf)-\nabla_Y Xf,
\end{aligned}$$

其中 X,Y 为任意向量场. 这样, $\nabla^2 f$ 就和前面定义的 Hessian 是一致的.

以下再考虑协变导数的一些应用.

例 3.2.4. 散度算子 div.

设 (M,g) 为黎曼流形, ∇ 为 Levi-Civita 联络. 如果 θ 为 M 上的 (r,s) 型张量场, 则 $\nabla\theta$ 为 $(r,s+1)$ 型的张量场. 将它的第 r 个逆变指标和第 $s+1$ 个协变指标作缩并, 得到的 $(r-1,s)$ 型张量场称为 θ 的散度, 记为 $\mathrm{div}\theta$.

如果 X 为向量场, 则其散度可表示为

$$\mathrm{div}X = \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle,$$

其中, $\{e_i\}$ 为 TM 的一组局部标准正交基. 当 M 可定向时, 我们曾用 Lie 导数定义过散度:

$$L_X\Omega = (\mathrm{div}X)\Omega,$$

其中 Ω 为体积形式. 为了说明这两个定义的一致性, 先作一些准备工作.

首先, 当 $\{e_i\}$ 为标准正交基时, 有

$$0 = e_i\langle e_j, e_j\rangle = 2\langle \nabla_{e_i} e_j, e_j\rangle,$$

因此, 当 $i \neq j$ 时, $[e_i,e_j]$ 的 e_i, e_j 分量形如

$$\begin{aligned}
[e_i,e_j] &= \nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i \\
&= \langle \nabla_{e_i}e_j, e_i\rangle e_i + \langle \nabla_{e_i}e_j, e_j\rangle e_j - \langle \nabla_{e_j}e_i, e_i\rangle e_i - \langle \nabla_{e_j}e_i, e_j\rangle e_j + \cdots \\
&= -\langle e_j, \nabla_{e_i}e_i\rangle e_i + \langle e_i, \nabla_{e_j}e_j\rangle e_j + \cdots .
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}X &= L_X\Omega(e_1,\cdots,e_n) = d(i_X\Omega)(e_1,\cdots,e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i\Omega(X,e_1,\cdots,\hat{e}_i,\cdots,e_n) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Omega(X,[e_i,e_j],e_1,\cdots,\hat{e}_i,\cdots,\hat{e}_j,\cdots,e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i\langle X,e_i\rangle + \sum_{i<j}[-\langle X,e_j\rangle\langle e_j,\nabla_{e_i}e_i\rangle - \langle X,e_i\rangle\langle e_i,\nabla_{e_j}e_j\rangle] \\
&= e_i\langle X,e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i}e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle.
\end{aligned}$$

即向量场散度的两个定义是一致的. $\square$

有了散度算子, 我们可以引入重要的 Laplace 算子 Δ. 设 f 为光滑函数, 其梯度场记为 $\mathrm{grad}f$. 定义

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}f), \tag{3.6}$$

如果 $\Delta f = 0$, 则称 f 为 M 上的调和函数.

为了求出 Laplace 算子的局部表示, 我们先引入迹 (trace) 的概念.

定义 3.2.2 (trace)**.** 设 S 为二阶对称协变张量场, 其迹 $\mathrm{tr}S$ 是 M 上的函数, 定义为

$$\mathrm{tr}S = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i),$$

其中 $\{e_i\}$ 为标准正交基.

容易看出, $\mathrm{tr}S$ 的定义不依赖于标准正交基的选取. 一般地, 我们可以对张量场的任意两个协变指标求 trace.

命题 3.2.5. 对于光滑函数, 成立

$$\Delta f = \mathrm{tr}\nabla^2 f.$$

证明. 按照定义, 有

$$\begin{aligned}\Delta f &= \langle \nabla_{e_i}\mathrm{grad}f, e_i\rangle \\ &= e_i\langle \mathrm{grad}f, e_i\rangle - \langle \mathrm{grad}f, \nabla_{e_i}e_i\rangle \\ &= e_i(e_i f) - \nabla_{e_i}e_i f \\ &= \nabla^2 f(e_i, e_i) = \mathrm{tr}\nabla^2 f,\end{aligned}$$

命题得证. □

设 $\{x^i\}$ 为 M 的局部坐标系. 标准正交基 $\{e_i\}$ 可表示为 $e_i = b_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 其中

$$\delta_{kl} = \langle e_k, e_l\rangle = b_k^i b_l^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = b_k^i b_l^j g_{ij},$$

这说明

$$g^{ij} = b_k^i b_k^j. \tag{3.7}$$

有了上式, 我们可以在局部坐标系中表示 $\mathrm{tr}S$.

命题 3.2.6. 设 S 为二阶对称协变张量场, 则

$$\mathrm{tr}S = g^{ij}\cdot S(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}).$$

证明. 按照定义, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}S = S(e_k, e_k) &= S(b_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}, b_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= b_k^i b_k^j \cdot S(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= g^{ij}\cdot S(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}),\end{aligned}$$

命题得证. □

特别地, 在局部坐标系中, Laplace 算子可以写为

$$\Delta f = g^{ij} \cdot \nabla^2 f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}). \tag{3.8}$$

利用上式可以继续得到下面的公式.

命题 3.2.7. 记 $G = \det(g_{ij})$, 则

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ik}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^i}). \tag{3.9}$$

证明. 先做一些计算:

$$\begin{aligned}
g^{ij}\Gamma^k_{ji} &= \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l}) \\
&= \frac{1}{2}g^{ij}(g^{kl}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}) + \frac{1}{2}g^{ij}(g^{kl}\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}) - \frac{1}{2}g^{kl}(g^{ij}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{ij}(\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}g_{lj}) - \frac{1}{2}g^{ij}(\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j}g_{li}) - \frac{1}{2}g^{kl}G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x^l} \\
&= -\frac{\partial g^{ki}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}g^{kl}G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x^l}.
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\Delta f &= g^{ij} \cdot \nabla^2 f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= g^{ij}[\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}f] \\
&= g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) - g^{ij}\Gamma^k_{ji}\frac{\partial f}{\partial x^k} \\
&= g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) + \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{1}{2}g^{kl}G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial f}{\partial x^k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ik}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^i}),
\end{aligned}$$

命题得证. □

习题 3.2

1. 给出联络基本性质的详细证明.

2. 用单位分解在向量丛上构造联络, 要求按联络的定义加以验证.

3. 证明, 对于 Levi-Civita 联络下的测地线, 其切向量的长度必为常数.

4. 按照联络的定义验证, 由 $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$ 给出的子流形上的算子的确为 Levi-Civita 联络.

5. 设 ∇ 为无挠的仿射联络, ω 为 r 次微分形式. 则对任意向量场 $\{X_i\}$, 成立

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\nabla_{X_i}\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{r+1}).$$

6. 设 (M,g) 为黎曼流形, f 为光滑函数, 证明 $L_{\mathrm{grad}f}\,g=2\nabla^2 f$.

7. 设 ∇ 为 (M,g) 的 Levi-Civita 联络, 则 Z 为 Killing 场当且仅当

$$\langle\nabla_X Z,Y\rangle+\langle X,\nabla_Y Z\rangle=0,\quad\forall\ X,Y\in\Gamma(TM).$$

§3.3 曲率

设 (M,g) 为黎曼流形, 如无特别申明, 以下均假设 ∇ 为 Levi-Civita 联络. 我们继续考虑张量场在联络下的求导. 如果 f 为光滑函数, 则由前一节的计算知 $\nabla^2 f$ 为对称二阶协变张量场. 如果 Z 为向量场, 则 $\nabla^2 Z$ 为 $(1,2)$ 型的张量场, 它关于两个协变指标是否对称? 我们可以计算如下: 设 ω 为 1 形式, X,Y 为向量场, 则

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z(\omega,X,Y)&=\nabla_Y(\nabla Z)(\omega,X)\\&=Y(\nabla Z(\omega,X))-\nabla Z(\nabla_Y\omega,X)-\nabla Z(\omega,\nabla_Y X)\\&=Y(\omega(\nabla_X Z))-\nabla_Y\omega(\nabla_X Z)-\omega(\nabla_{\nabla_Y X}Z)\\&=\omega(\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{\nabla_Y X}Z).\end{aligned}$$

如同考虑 $\nabla^2 f$ 的对称性的时候用到挠率张量那样, 令

$$R(X,Y)Z=\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z,\tag{3.10}$$

则

$$\nabla^2 Z(\omega,X,Y)-\nabla^2 Z(\omega,Y,X)=\omega(R(X,Y)Z).$$

一般来说, $R(X,Y)Z$ (也记为 $R_{XY}Z$) 不为零, 它反映了向量场不同次序求导之间的差异. 从上述计算易见, $R(X,Y)Z$ 关于 X,Y 是函数线性的, 下面说明它关于 Z 也是函数线性的, 从而定义了一个 $(1,3)$ 型的张量场. 设 ϕ 为光滑函数, 则

$$\begin{aligned}R(X,Y)(\phi Z)&=\nabla_Y\nabla_X\phi Z-\nabla_X\nabla_Y\phi Z+\nabla_{[X,Y]}\phi Z\\&=\nabla_Y((X\phi)Z+\phi\nabla_X Z)-\nabla_X((Y\phi)Z+\phi\nabla_Y Z)+([X,Y]\phi)Z\\&\quad+\phi\nabla_{[X,Y]}Z\\&=(YX\phi)Z+(X\phi)\nabla_Y Z+(Y\phi)\nabla_X Z+\phi\nabla_Y\nabla_X Z-(XY\phi)Z\\&\quad-(Y\phi)\nabla_X Z-(X\phi)\nabla_Y Z-\phi\nabla_X\nabla_Y Z+([X,Y]\phi)Z+\phi\nabla_{[X,Y]}Z\\&=\phi[\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z]\\&=\phi R(X,Y)Z,\end{aligned}$$

这说明 $R(X,Y)Z$ 关于 Z 是函数线性的. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, 它所定义的 $(1,3)$ 型张量场 R 可表示为

$$R = R_{ijk}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k,$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{ijk}{}^{l} &= dx^l(R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k})\\
&= dx^l(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k})\\
&= dx^l[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\Gamma_{ik}^m\frac{\partial}{\partial x^m})-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\Gamma_{jk}^m\frac{\partial}{\partial x^m})]\\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l-\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l+\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l-\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l.
\end{aligned}$$

利用黎曼度量 g, 我们可以将 R 的逆变指标降为协变指标, 这样得到的 $(0,4)$ 型张量场称为**曲率张量**, 仍记为 R. 于是, 任给向量场 X, Y, Z, W, 有

$$R(X,Y,Z,W)=\langle R(X,Y)Z,W\rangle.$$

在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, 曲率张量可表示为

$$R=R_{ijkl}dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l,$$

其中

$$R_{ijkl}=R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}).$$

为了计算系数 R_{ijkl}, 我们首先注意到

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle &= \Gamma_{jk}^m g_{ml}=\frac{1}{2}g_{ml}g^{mt}(\frac{\partial g_{tj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{tk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^t})\\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}),
\end{aligned}$$

其次有

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle-\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle\\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle-\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle-\frac{\partial}{\partial x^i}\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle\\
&\quad -\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}\rangle,
\end{aligned}$$

最后得

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k})\\
&\quad +g_{rs}\Gamma_{jk}^r\Gamma_{il}^s-g_{rs}\Gamma_{jl}^r\Gamma_{ik}^s. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

由上式可知, 曲率张量由黎曼度量的二阶导数和一阶导数构成.

曲率张量是黎曼几何中主要的几何不变量, 对它的理解和研究是黎曼几何学的中心任务之一.

例 3.3.1. *欧氏空间* $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *的曲率张量恒为零, 这可从* (3.11) *立即知道.*

例 3.3.2. *球面* (S^n, g_1) *的曲率.*

我们先看联络. 沿用前一节的记号, 以 $\bar{\nabla}$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的联络, $\vec{x}$ 为 S^n 的位置向量. 如果 X, Y 为 S^n 的切向量场, 则

$$\bar{\nabla}_X \vec{x} = (X(x^1), \cdots, X(x^{n+1})) = X,$$

从而有

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \vec{x} \rangle = X\langle Y, \vec{x} \rangle - \langle Y, \bar{\nabla}_X \vec{x} \rangle = -\langle Y, X \rangle,$$

这说明 S^n 的联络 ∇ 可表示为

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle X, Y \rangle \vec{x}. \tag{3.12}$$

利用上式我们来计算二阶求导:

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X Z &= \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \vec{x} \\ &= \bar{\nabla}_Y (\bar{\nabla}_X Z + \langle X, Z \rangle \vec{x}) + X\langle Y, Z \rangle \vec{x} - \langle \nabla_X Y, Z \rangle \vec{x} \\ &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + (Y\langle X, Z \rangle + X\langle Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle)\vec{x} + \langle X, Z \rangle Y,\end{aligned}$$

于是有 (注意 $\mathbb{R}^{n+1}$ 曲率为零)

$$R(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

最后得到 S^n 的曲率张量为

$$R(X, Y, Z, W) = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle. \tag{3.13}$$

对于一般的黎曼流形, 其曲率张量可能非常复杂. 不过, 从 (3.11) 式可以观察到以下等式:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{3.14}$$

进一步的观察表明

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0. \tag{3.15}$$

我们将这些等式总结为

命题 3.3.1. *曲率张量具有以下对称性:*

(1) (第一 Bianchi 恒等式) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$;

(2) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$;

(3) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

证明. 我们只证明 (1). 计算如下:

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y\\
&=\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_Y\nabla_Z X\\
&\quad+\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_Z\nabla_X Y+\nabla_{[Z,X]}Y\\
&=-\nabla_Y[Z,X]-\nabla_X[Y,Z]-\nabla_Z[X,Y]+\nabla_{[X,Y]}Z\\
&\quad+\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_{[Z,X]}Y\\
&=-[X,[Y,Z]]-[Y,[Z,X]]-[Z,[X,Y]]=0,
\end{aligned}$$

最后的等号用到了 Jacobi 恒等式. □

利用曲率张量的对称性, 我们给出重要的**截面曲率**的概念. 设 Π 为切空间 T_pM 的二维子空间, 取它的一组基为 X, Y, 定义 Π 的截面曲率为

$$K(\Pi)=\frac{R(X,Y,X,Y)}{|X\wedge Y|^2}, \tag{3.16}$$

其中 $|X\wedge Y|^2=\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2$. 我们要说明截面曲率的定义与 Π 的基的选取无关. 设 $\{Z,W\}$ 为 Π 的另一组基, 则存在实数 a, b, c, d 使得

$$Z=aX+bY,\quad W=cX+dY,\quad ad-bc\neq 0.$$

此时, 直接的计算表明

$$|Z\wedge W|^2=(ad-bc)^2|X\wedge Y|^2.$$

根据曲率算子的对称性, 有

$$\begin{aligned}
R(Z,W,Z,W)&=R(aX+bY,cX+dY,aX+bY,cX+dY)\\
&=(ad-bc)R(X,Y,aX+bY,cX+dY)\\
&=(ad-bc)^2R(X,Y,X,Y).
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{R(Z,W,Z,W)}{|Z\wedge W|^2}=\frac{R(X,Y,X,Y)}{|X\wedge Y|^2},$$

即截面曲率的定义是恰当的. 根据前面例子中的计算可知, $(\mathbb{R}^n,g_0)$ 的截面曲率恒为零, 而 (S^n,g_1) 的截面曲率恒为 1.

例 3.3.3. 双曲空间的曲率.

考虑上半空间模型 $\mathbb{H}$, 黎曼度量 $g=x_n^{-2}(dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^n\otimes dx^n)$. 此时 $g_{ij}=x_n^{-2}\delta_{ij}$, $g^{ij}=x_n^2\delta_{ij}$. 于是有

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k&=\frac{1}{2}x_n^2\delta_{km}(-2x_n^{-3}\delta_{im}\delta_{jn}-2x_n^{-3}\delta_{jm}\delta_{in}+2x_n^{-3}\delta_{ij}\delta_{mn})\\
&=x_n^{-1}(\delta_{ij}\delta_{kn}-\delta_{ik}\delta_{jn}-\delta_{kj}\delta_{in}),
\end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = 6x_n^{-4}\delta_{kn}\delta_{ln}\delta_{ij}.$$

将它们代入 (3.11) 得

$$R_{ijkl} = x_n^{-4}(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}) = -(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

因此有

$$R(X,Y,Z,W) = -(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle),$$

这说明双曲空间的截面恒为 -1. □

从 $(0,4)$ 型的曲率张量 R 出发, 对它的 1, 3 指标求 Trace, 就得到一个二阶协变张量场, 称为 Ricci 张量. 具体来说, 取标准正交基 $\{e_i\}$, 令

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X, e_i, Y), \tag{3.17}$$

则根据曲率张量的对称性质, Ric 为对称二阶协变张量场. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, Ric 可以表示为

$$\mathrm{Ric} = R_{ij}dx^i \otimes dx^j,$$

其中

$$R_{ij} = g^{kl}R_{kilj}.$$

如果 X 为单位向量, 则称 $\mathrm{Ric}(X,X)$ 为 X 方向的 **Ricci 曲率**. 如果将 $X = e_1$ 扩充为一组标准正交基 $\{e_i\}$, 则

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X, e_i, X) = \sum_{i=2}^{n} R(e_i, e_1, e_i, e_1),$$

因此 Ricci 曲率均为 $(n-1)$ 个截面曲率之和.

从 Ricci 张量出发, 对它求 Trace 就得到 M 上的函数 S, 称为 (M,g) 的**数量曲率**或**纯量曲率**. 按照定义, S 可表示为

$$S = g^{ij}g^{kl}R_{kilj} = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

例 3.3.4. *对于 2 维流形来说, 它在每一点的截面曲率只有一个, 记为 K. 此时 $\mathrm{Ric} = Kg$, $S = 2K$.*

例 3.3.5. *(S^n, g_1) 的 Ricci 曲率恒为 $(n-1)$, 因此 $\mathrm{Ric} = (n-1)g$, $S = n(n-1)$.*

一般地, Ricci 曲率为常数的黎曼度量称为 Einstein 度量, 拥有 Einstein 度量的黎曼流形称为 Einstein 流形. Einstein 流形的研究是微分几何的重要课题之一, 其研究动力很大程度上是来自于 Einstein 的广义相对论.

例 3.3.6. 3 维 *Einstein* 流形.

如果 M^3 为 Einstein 流形, 设其 Ricci 曲率为常数 λ. 任取标准正交基 $\{e_i\}$, 记

$$R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), \quad R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j).$$

由 Ricci 曲率的定义, 有

$$R_{11} = R_{1212} + R_{1313}, \quad R_{22} = R_{1212} + R_{3232}, \quad R_{33} = R_{1313} + R_{2323}.$$

从上式中可解出

$$R_{1212} = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}) = \frac{1}{2}\lambda,$$

由于 $\{e_i\}$ 是任取的, 这表明 M^3 的截面曲率实际上是常数. □

以上讨论的曲率均涉及二阶求导. 关于三阶求导, 我们有

命题 3.3.2 (第二 Bianchi 恒等式)**.** 对于 $(1,3)$ 型的张量 $R_{XY}Z$, 有

$$(\nabla_X R)_{YZ} + (\nabla_Y R)_{ZX} + (\nabla_Z R)_{XY} = 0.$$

证明. 任给向量场 W, 有

$$(\nabla_X R)_{YZ}W = \nabla_X(R_{YZ}W) - R_{YZ}(\nabla_X W) - R_{\nabla_X Y, Z}W - R_{Y, \nabla_X Z}W,$$

将上式中的 X, Y, Z 依次轮换, 得到另外两个方程, 将它们相加, 并利用联络和曲率的性质即可得到证明. 具体的计算有些繁琐, 我们略去. 下一节我们将给出另外一个证明. □

Bianchi 恒等式对于 $(0,4)$ 型的曲率张量也成立. 事实上, 因为

$$\begin{aligned}
&\nabla R(X,Y,Z,W,V) = \nabla_V R(X,Y,Z,W) \\
&= V(R(X,Y,Z,W)) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_V Y, Z, W) \\
&\quad - R(X,Y,\nabla_V Z, W) - R(X,Y,Z,\nabla_V W) \\
&= \langle V(R(X,Y)Z), W\rangle + \langle R(X,Y)Z, \nabla_V W\rangle - \langle R(\nabla_V X, Y)Z, W\rangle \\
&\quad - \langle R(X, \nabla_V Y)Z, W\rangle - \langle R(X,Y)\nabla_V Z, W\rangle - \langle R(X,Y)Z, \nabla_V W\rangle \\
&= \langle (\nabla_V R)_{XY}Z, W\rangle,
\end{aligned}$$

轮换上式中 V, X, Y 的位置, 将所得等式相加, 得

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y) = 0, \tag{3.18}$$

根据曲率张量的对称性, 上式也可以改写为

$$\nabla R(Z,W,X,Y,V) + \nabla R(Z,W,Y,V,X) + \nabla R(Z,W,V,X,Y) = 0. \tag{3.19}$$

在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, 如果 ∇R 写为

$$\nabla R = R_{ijkl,h} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes dx^h,$$

则第二 Bianchi 恒等式成为

$$R_{ijkl,h} + R_{ijlh,k} + R_{ijhk,l} = 0. \tag{3.20}$$

如果对数量曲率求协变导数, 并利用上式, 则有

$$\begin{aligned} S_m &= g^{ij} g^{kl} R_{kilj,m} = -g^{ij} g^{kl} R_{kijm,l} - g^{ij} g^{kl} R_{kiml,j} \\ &= g^{kl} R_{km,l} + g^{ij} R_{im,j} \\ &= 2 g^{ij} R_{mi,j}. \end{aligned}$$

如果 Ricci 张量是黎曼度量的倍数, 即存在函数 $f(x)$, 使得 $R_{ij} = f(x) g_{ij}$, 则易见 $f(x) = S/n$, 即

$$\mathrm{Ric} = \frac{S}{n} g.$$

此时对上式求协变导数, 得

$$R_{mi,j} = \frac{1}{n} S_j g_{mi},$$

因此有

$$S_m = 2 g^{ij} R_{mi,j} = \frac{2}{n} g^{ij} S_j g_{mi} = \frac{2}{n} S_m,$$

于是当 $n \geqslant 3$ 时 $\nabla S = 0$. 这可总结为下面的结果.

定理 3.3.3 (Shur)**.** *设 M 为连通 n 维流形, $n \geqslant 3$. 如果黎曼度量 g 的 Ricci 张量是 g 的倍数, 则 g 是 Einstein 度量.*

最后, 我们简单介绍一般张量场的二阶求导曲率算子. 设 X, Y 为向量场, K 为 (r,s) 型的张量场, 令

$$R_{XY} K = \nabla_Y \nabla_X K - \nabla_X \nabla_Y K + \nabla_{[X,Y]} K. \tag{3.21}$$

R_{XY} 称为由 X, Y 所定义的曲率算子, 显然 $R_{XY} = -R_{YX}$.

命题 3.3.4. *设 K_1, K_2 为张量场, f 为光滑函数, 则*

(1) $R_{XY}(K_1 \otimes K_2) = (R_{XY} K_1) \otimes K_2 + K_1 \otimes (R_{XY} K_2)$;

(2) $R_{(fX)Y} K = R_{X(fY)} K = R_{XY}(fK) = f R_{XY} K$.

证明. (1) 这只要利用协变求导与张量积运算之间的可交换性即可, 略.

(2) 由定义, 有

$$
\begin{aligned}
R_{(fX)Y}K &= \nabla_Y\nabla_{fX}K - \nabla_{fX}\nabla_Y K + \nabla_{[fX,Y]}K \\
&= \nabla_Y(f\nabla_X K) - f\nabla_X\nabla_Y K + \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}K \\
&= (Yf)\nabla_X K + f\nabla_Y\nabla_X K - f\nabla_X\nabla_Y K + f\nabla_{[X,Y]}K - (Yf)\nabla_X K \\
&= fR_{XY}K.
\end{aligned}
$$

同理可得 $R_{X(fY)}K = fR_{XY}K$. 另一方面, 曲率算子 R_{XY} 可以写为

$$R_{XY} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y],$$

由此不难验证关于 K 的函数线性性. □

我们知道, 对向量场的二阶求导时, 不同次序的导数之差体现在曲率上. 对于一般的张量场, 会出现完全类似的现象.

命题 3.3.5 (Ricci 恒等式)**.** *设 K 为张量场, 则*

$$\nabla^2 K(\cdot, X, Y) - \nabla^2 K(\cdot, Y, X) = (R_{XY}K)(\cdot).$$

证明. 首先, 按协变导数 (联络) 的定义, 可以验证

$$\nabla^2 K(\cdot, X, Y) = \nabla_Y\nabla_X K(\cdot) - \nabla_{\nabla_Y X}K(\cdot). \tag{3.22}$$

于是交换 X, Y 的次序再相减就得到欲证等式. □

我们在局部坐标 $\{x^i\}$ 下做一些计算. 首先有

$$
\begin{aligned}
R_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}(dx^k) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}dx^k - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}dx^k \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(-\Gamma^k_{im}dx^m) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(-\Gamma^k_{jm}dx^m) \\
&= -(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{im})dx^m + \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl}dx^l + (\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jm})dx^m - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il}dx^l \\
&= (\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il})dx^l \\
&= -R_{ijl}{}^k dx^l.
\end{aligned}
$$

如果张量场 $\nabla^2 K$ 表示为

$$\nabla^2 K = K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^k\otimes dx^l,$$

则由 Ricci 恒等式以及曲率算子 R_{XY} 与张量积的可交换性可得

$$K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl} - K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk} = \sum_{p=1}^r K^{i_1\cdots i_{p-1}ii_{p+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}R_{kli}{}^{i_p} - \sum_{q=1}^s K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{q-1}jj_{q+1}\cdots j_s}R_{klj_q}{}^j. \tag{3.23}$$

习题 3.3

1. 设 $f:\ (M,g)\to(N,h)$ 为等距同构, 证明 f 保持曲率不变, 即 $R_M=f^*R_N$.

2. 设 $(0,4)$ 型的张量场 S,T 均满足曲率张量关于指标的对称性. 证明, 如果

$$S(X,Y,X,Y)=T(X,Y,X,Y),\ \ \forall\ X,Y\in\Gamma(TM)$$

则 $S\equiv T$.

3. 证明, 黎曼流形 (M,g) 的截面曲率为常数 c 当且仅当曲率张量满足

$$R(X,Y)Z=c(\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,Z\rangle X).$$

4. 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面

$$H^n(1)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\sum_{i=1}^n(x^i)^2-(x^{n+1})^2=-1,\ x^{n+1}>0\}.$$

证明, 当二阶协变张量场 $g_{n,1}=\sum\limits_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i-dx^{n+1}\otimes dx^{n+1}$ 限制在 $H^n(1)$ 上时是正定的黎曼度量, 并计算截面曲率.

5. 设 (M,g) 为黎曼流形, f 为 M 上的正光滑函数, 则 $\bar g=f^2g$ 也是 M 上的黎曼度量. 求这两个黎曼度量的曲率张量之间的关系.

6. 在上一题的情况下, 如果 f 为常数, 说明 $\mathrm{Ric}(g)=\mathrm{Ric}(\bar g)$.

7. 设 Z 为 (M,g) 为 Killing 向量场, 证明

   (1) $\langle\nabla^2Z(X,Y),W\rangle=-\langle\nabla^2Z(W,Y),X\rangle$;

   (2) $\nabla^2Z(X,Y)=R(Z,Y)X$.

8. 设 ∇ 为向量丛 E 上的联络. 任给 $X,\,Y\in\Gamma(TM)$, 定义曲率算子

$$R(X,Y):\ \Gamma(E)\to\Gamma(E),\ \ R(X,Y)s=\nabla_Y\nabla_Xs-\nabla_X\nabla_Ys+\nabla_{[X,Y]}s.$$

证明 $R(X,Y)s$ 关于 $X,\,Y$ 以及截面 s 都是函数线性的.

§3.4 联络和曲率的计算

§3.4.1 活动标架法

设 ∇ 为流形 M 上的仿射联络. 如果 $\{e_i\}$ 为 TM 的一组 (局部) 基, 则存在 1 形式 $\{\omega_j^i\}$, 使得

$$\nabla e_i = e_j \otimes \omega_i^j, \tag{3.24}$$

$\{\omega_i^j\}$ 称为联络 ∇ 的联络形式. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 下, 如果取 $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则由

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ki}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k$$

知 $\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j dx^k$.

设 $\{\omega^i\}$ 为 $\{e_i\}$ 的一组对偶基, 由 (X 为向量场)

$$\nabla_X \omega^i(e_j) = X(\omega^i(e_j)) - \omega^i(\nabla_X e_j) = -\omega_j^i(X)$$

知 $\nabla_X \omega^i = -\omega_j^i(X)\omega^j$, 因此

$$\nabla \omega^i = -\omega^j \otimes \omega_j^i. \tag{3.25}$$

例如, 当 $\omega = dx^i$ 时,

$$\nabla dx^i = -\Gamma_{kj}^i dx^j \otimes dx^k.$$

以下假设 ∇ 为 Levi-Civita 联络, 由于联络的挠率为零, 故任给向量场 X, Y, 有

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega(\nabla_X Y) + \omega(\nabla_Y X) \\ &= \nabla_X \omega(Y) - \nabla_Y \omega(X) \\ &= \nabla\omega(Y,X) - \nabla\omega(X,Y), \end{aligned}$$

对 ω^i 利用上式以及 (3.25) 得

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j. \tag{3.26}$$

联络形式也可以用来计算曲率. 事实上, 由定义有

$$\begin{aligned} & R_{XY} e_i = \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_X \nabla_Y e_i + \nabla_{[X,Y]} e_i \\ &= \nabla_Y(\omega_i^j(X)e_j) - \nabla_X(\omega_i^j(Y)e_j) + \omega_i^j([X,Y])e_j \\ &= Y(\omega_i^j(X))e_j + \omega_i^j(X)\nabla_Y e_j - X(\omega_i^j(Y))e_j - \omega_i^j(Y)\nabla_X e_j + \omega_i^j([X,Y])e_j \\ &= -d\omega_i^j(X,Y)e_j + \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y)e_k - \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k \\ &= -d\omega_i^j(X,Y)e_j + (\omega_i^k \wedge \omega_k^j)(X,Y)e_j, \end{aligned}$$

这说明

$$(-d\omega_i^j+\omega_i^k\wedge\omega_k^j)(X,Y)=\omega^j(R_{XY}e_i),$$

或改写为

$$-d\omega_i^j+\omega_i^k\wedge\omega_k^j=\frac{1}{2}R_{kli}{}^j\omega^k\wedge\omega^l, \tag{3.27}$$

其中 $R_{kli}{}^j=\omega^j(R(e_k,e_l)e_i)$. (3.26) 式和 (3.27) 式统称**Cartan 结构方程**, 它们是非常有用的计算工具. (3.27) 也常改写为

$$d\omega_j^i=-\omega_k^i\wedge\omega_j^k+\Omega_j^i, \tag{3.28}$$

其中

$$\Omega_j^i=-\frac{1}{2}R_{klj}{}^i\omega^k\wedge\omega^l, \tag{3.29}$$

Ω_j^i 称为曲率形式.

当 $\{e^i\}$ 为标准正交基时, 黎曼度量 g 可以写成

$$g=\omega^1\otimes\omega^1+\cdots+\omega^n\otimes\omega^n. \tag{3.30}$$

此时有

$$\begin{aligned}0=d\langle e_i,e_j\rangle&=\langle\nabla e_i,e_j\rangle+\langle e_i,\nabla e_j\rangle\\&=\langle e_k\otimes\omega_i^k,e_j\rangle+\langle e_i,e_l\otimes\omega_j^l\rangle\\&=\omega_i^j+\omega_j^i,\end{aligned}$$

即联络形式关于它的两个指标具有反称性.

其次, 当 $\{e_i\}$ 为标准正交基时, 下式也成立

$$R_{kli}{}^j=\langle R(e_k,e_l)e_i,e_j\rangle=R_{klij},$$

此时曲率形式可写为

$$\Omega_j^i=-\frac{1}{2}R_{klji}\omega^k\wedge\omega^l=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l.$$

例 3.4.1. 曲面的曲率.

设二维曲面 M 有黎曼度量 $g=\phi^2du\otimes du+\psi^2dv\otimes dv$, 其中 $\{u,v\}$ 为局部坐标, ϕ, ψ 为正的光滑函数. 此时, $e_1=\phi^{-1}\frac{\partial}{\partial u}$, $e_2=\psi^{-1}\frac{\partial}{\partial v}$ 为标准正交基, 其对偶基为 $\omega^1=\phi du$, $\omega^2=\psi dv$. 由

$$d\omega^1=d\phi\wedge du=\phi_v dv\wedge du=-\psi^{-1}\phi_v du\wedge\omega^2,$$

以及

$$d\omega^2=d\psi\wedge dv=\psi_u du\wedge dv=-\phi^{-1}\psi_u dv\wedge\omega^1,$$

解出联络形式为

$$\omega_2^1 = \psi^{-1}\phi_v du - \phi^{-1}\psi_u dv.$$

于是曲率形式为

$$\Omega_2^1 = d\omega_2^1 = -[(\frac{\psi_u}{\phi})_u + (\frac{\phi_v}{\psi})_v] du \wedge dv,$$

这说明 M^2 的截面曲率为

$$K = R_{1212} = -\frac{1}{\phi\psi}[(\frac{\psi_u}{\phi})_u + (\frac{\phi_v}{\psi})_v].$$

这与古典微分几何中的结果是一致的. □

从结构方程可以得到 Bianchi 恒等式. 例如, 对 (3.26) 两边求外微分, 并利用 (3.27), 得

$$\begin{aligned} 0 = d^2\omega^i &= -d\omega_j^i \wedge \omega^j + \omega_j^i \wedge d\omega^j \\ &= -(\Omega_j^i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k) \wedge \omega^j - \omega_j^i \wedge \omega_k^j \wedge \omega^k \\ &= -\Omega_j^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{klj}{}^i \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^j, \end{aligned}$$

这表明

$$R_{klj}{}^i + R_{ljk}{}^i + R_{jkl}{}^i = 0,$$

这是第一 Bianchi 恒等式.

为了获得第二 Bianchi 恒等式, 我们先在标架 $\{e_i\}$ 和 $\{\omega^i\}$ 下计算 (r,s) 型张量 θ 的协变导数:

$$\begin{aligned} \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k} &= \nabla_{e_k}\theta(\omega^{i_1},\cdots,\omega^{i_r};e_{j_1},\cdots,e_{j_s}) \\ &= e_k(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}) - \sum_{p=1}^r \theta(\omega^{i_1},\cdots,\nabla_{e_k}\omega^{i_p},\cdots,\omega^{i_r};e_{j_1},\cdots,e_{j_s}) \\ &\quad - \sum_{q=1}^s \theta(\omega^{i_1},\cdots,\omega^{i_r};e_{j_1},\cdots,\nabla_{e_k}e_{j_q},\cdots,e_{j_s}) \\ &= e_k(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}) + \sum_{p=1}^r \theta^{i_1\cdots i_{p-1}\,h\,i_{p+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\omega_h^{i_p}(e_k) - \sum_{q=1}^s \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{q-1}\,h\,j_{q+1}\cdots j_s}\omega_{j_q}^h(e_k), \end{aligned}$$

上式也可以改写为

$$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\cdot\omega^k = d\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + \sum_{p=1}^r \theta^{i_1\cdots i_{p-1}\,h\,i_{p+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\omega_h^{i_p} - \sum_{q=1}^s \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{q-1}\,h\,j_{q+1}\cdots j_s}\omega_{j_q}^h. \quad (3.31)$$

现在, 如果对 (3.27) 两边求外微分就得到

$$d\Omega_j^i = d\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge d\omega_j^k = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k,$$

将 (3.29) 以及结构方程再代入上式并整理, 得

$$(dR_{klj}{}^{i} - R_{hlj}{}^{i}\omega_k^h - R_{khj}{}^{i}\omega_l^h - R_{klh}{}^{i}\omega_j^h + R_{klj}{}^{h}\omega_h^i) \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,$$

利用 (3.31), 上式可改写为

$$R_{klj,h}{}^{i} \cdot \omega^h \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0, \tag{3.32}$$

这也就是第二 Bianchi 恒等式.

以下继续给出结构方程的简单应用.

例 3.4.2. 双曲空间的结构方程.

在上半空间 $\mathbb{H}^n$ 中考虑黎曼度量 $g = x_n^{-2}(dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n)$, 取标准正交标架 $\{e_i = x_n \frac{\partial}{\partial x^i}\}$, 其对偶标架为 $\{\omega^i = x_n^{-1}dx^i\}$. 于是有

$$-\omega_j^i \wedge \omega^j = d\omega^i = x_n^{-2}dx^i \wedge dx^n = \omega^i \wedge \omega^n,$$

以及

$$-\omega_j^n \wedge \omega^j = d\omega^n = 0.$$

从以上两式中解出联络形式为

$$\omega_j^i = 0 \ (i, j < n), \quad \omega_i^n = -\omega_n^i = \omega^i \ (i < n).$$

因此, 当 $i, j < n$ 时,

$$\Omega_j^i = \omega_n^i \wedge \omega_j^n = -\omega^i \wedge \omega^j,$$

当 $i < n$ 时

$$\Omega_n^i = d\omega_n^i = -d\omega^i = -\omega^i \wedge \omega^n,$$

总之, 曲率形式形如 $\Omega_j^i = -\omega^i \wedge \omega^j$, 这再一次说明双曲空间的曲率恒为 -1.

例 3.4.3. 黎曼度量的共形形变.

设 g 为流形 M 上的黎曼度量. 如果 ρ 为 M 上的光滑正函数, 则 $\tilde{g} = \rho^2 g$ 也是 M 上的黎曼度量, 称为 g 的共形形变. 如果 $\{\omega^i\}$ 为 (M, g) 的标准正交余切标架, 则 $\tilde{\omega}^i = \rho\omega^i$ 为 $(M, \tilde{g})$ 的标准正交余切标架, 我们计算相应的结构方程如下:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^i &= d\rho \wedge \omega^i + \rho d\omega^i = \rho_j \omega^j \wedge \omega^i - \rho\omega_j^i \wedge \omega^j \\ &= -\omega_j^i \wedge \tilde{\omega}^j - \rho^{-1}\rho_j \omega^i \wedge \tilde{\omega}^j, \end{aligned}$$

从上式可解出 $\tilde{g}$ 对应的联络形式 $\tilde{\omega}_j^i$ 为

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \rho^{-1}\rho_j\omega^i - \rho^{-1}\rho_i\omega^j,$$

其中 $\{\rho_i\}$ 由 $d\rho=\rho_i\omega^i$ 定义. 继续计算 $\tilde{g}$ 对应的曲率形式 $\tilde{\Omega}^i_j$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}^i_j &= d\tilde{\omega}^i_j+\tilde{\omega}^i_m\wedge\tilde{\omega}^m_j\\
&= d\omega^i_j+\omega^i_m\wedge\omega^m_j+d(\ln\rho)_j\wedge\omega^i+(\ln\rho)_j d\omega^i-d(\ln\rho)_i\wedge\omega^j-(\ln\rho)_i d\omega^j\\
&\quad+[(\ln\rho)_m\omega^i-(\ln\rho)_i\omega^m]\wedge\omega^m_j+\omega^i_m\wedge[(\ln\rho)_j\omega^m-(\ln\rho)_m\omega^j]\\
&\quad+[(\ln\rho)_m\omega^i-(\ln\rho)_i\omega^m]\wedge[(\ln\rho)_j\omega^m-(\ln\rho)_m\omega^j]\\
&= \Omega^i_j-|\nabla\ln\rho|^2\omega^i\wedge\omega^j+[(\ln\rho)_{jm}-(\ln\rho)_m(\ln\rho)_j]\omega^m\wedge\omega^i\\
&\quad-[(\ln\rho)_{im}-(\ln\rho)_m(\ln\rho)_i]\omega^m\wedge\omega^j,
\end{aligned}$$

其中 $|\nabla\ln\rho|^2=(\ln\rho)_i(\ln\rho)_i$, 而 $(\ln\rho)_{ij}$ 由下式定义:

$$(\ln\rho)_{ij}\omega^j=d(\ln\rho)_i-(\ln\rho)_k\omega^k_i.$$

从曲率形式可以得到 $\tilde{g}$ 对应的曲率张量 $\tilde{R}$ 的表示:

$$\begin{aligned}
\rho^2\tilde{R}_{ijkl}&=R_{ijkl}-|\nabla\ln\rho|^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+[(\ln\rho)_{jm}-(\ln\rho)_m(\ln\rho)_j](\delta_{mk}\delta_{il}-\delta_{ml}\delta_{ik})\\
&\quad-[(\ln\rho)_{im}-(\ln\rho)_m(\ln\rho)_i](\delta_{mk}\delta_{jl}-\delta_{ml}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

$\tilde{g}$ 对应的 Ricci 曲率表示为 (Δ 是 g 对应的 Laplace 算子)

$$\begin{aligned}
\rho^2\tilde{R}_{ij}&=R_{ij}+(2-n)[(\ln\rho)_{ij}-(\ln\rho)_i(\ln\rho)_j]\\
&\quad+(2-n)|\nabla\ln\rho|^2\delta_{ij}-(\Delta\ln\rho)\delta_{ij},
\end{aligned}$$

而纯量曲率 $\tilde{S}$ 表示为

$$\rho^2\tilde{S}=S+2(1-n)\Delta(\ln\rho)-(n-1)(n-2)|\nabla\ln\rho|^2.$$

当 $n=2$ 时, 令 $\rho=e^u$, 则纯量曲率 $\tilde{S}$ 和 S 之间的关系化为

$$\tilde{S}=e^{-2u}(S-2\Delta u),$$

或改写为 $(K,\tilde{K}$ 为截面曲率)

$$\Delta u-K+\tilde{K}e^{2u}=0. \tag{3.33}$$

当 $n\geqslant 3$ 时, 令 $\rho=u^{\frac{2}{n-2}}$, 则纯量曲率 $\tilde{S}$ 和 S 之间的关系化为

$$\tilde{S}=u^{-\frac{n+2}{n-2}}(Su-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u),$$

或改写为

$$\Delta u-\frac{n-2}{4(n-1)}Su+\frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{S}u^{\frac{n+2}{n-2}}=0. \tag{3.34}$$

这些方程可以用来研究在流形上预定纯量曲率的问题. 例如, Yamabe 在 1960 年提出猜测: 在紧致流形上, 任何给定的黎曼度量均可作共形形变, 使其纯量曲率为常数. 这个猜测经过 Aubin, Schoen 等人的研究在 1984 年被最终证实了.

当 $n \geqslant 3$ 时, 考虑下式给出的 Weyl 张量,

$$\begin{aligned}W_{ijkl} = R_{ijkl} &- \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta_{jl} - R_{jk}\delta_{il} + R_{jl}\delta_{ik} - R_{il}\delta_{jk}) \\ &+ \frac{S}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}).\end{aligned}$$

Weyl 张量的特点是其任意两个指标缩并 (求迹) 均为零. 当 $n = 3$ 时 Weyl 张量恒为零. 对黎曼度量作共形形变时, Weyl 张量的变化特别简单:

$$\rho^2 \tilde{W}_{ijkl} = W_{ijkl}.$$

因此, 当黎曼度量 (局部) 共形于欧氏度量时, 其 Weyl 张量恒为零, 反之, 当 $n \geqslant 4$ 时, Weyl 张量恒为零意味着黎曼度量可局部共形形变到欧氏度量.

为了处理 $n = 3$ 的情形, 考虑 Bak 张量,

$$B_{ijk} = \frac{1}{n-2}(R_{ij,k} - R_{ik,j}) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\delta_{ij}S_{,k} - \delta_{ik}S_{,j}).$$

当 $n = 3$ 时, $\rho^3 \tilde{B}_{ijk} = B_{ijk}$. 可以证明, 三维黎曼流形局部共形于欧氏空间当且仅当 Bak 张量为零.

§3.4.2 正规坐标

当我们在局部坐标系中计算联络以及与曲率相关的几何量时, 不可避免地要遇到 Chirstoffel 系数及其导数. 在某些坐标系中, 这样的计算往往可以简化. 下面我们就来构造这样的坐标.

设 p 为流形 M 上任意固定的一点. 在 p 附近选取局部坐标 $\{u^i\}$, 使得 $u^i(p) = 0$. 在 $\{u^i\}$ 下的 Christoffel 系数记为 $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$. 令

$$x^i = u^i + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^i_{jk}(p)u^j u^k,$$

则

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^j}(p) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^j \partial u^k}(p) = \tilde{\Gamma}^i_{jk}(p).$$

因此, $\{x^i\}$ 可以作为 p 附近的局部坐标. 我们说明, 在此坐标下的 Chirstoffel 系数 Γ^k_{ij} 在 p 处均为零.

事实上, 对 $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}du^j$ 求协变微分, 得

$$\nabla dx^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^k \partial u^j}du^j \otimes du^k - \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\tilde{\Gamma}^j_{kl}du^k \otimes du^l,$$

上式在 p 处取值, 得 $\nabla dx^i(p)=0$, 因此 $\Gamma^j_{ik}(p)=0$. 这也意味着

$$dg_{ij}(p)=0,\quad dg^{ij}(p)=0,\quad dG(p)=0,$$

其中 $G=\det(g_{ij})$. 通过作线性变换, 我们还可以要求 $g_{ij}(p)=\delta_{ij}$.

在以上构造的局部坐标 $\{x^i\}$ 中, 由于在 p 处联络的系数均为零 (联络形式在 p 处也为零), 因此在 p 处协变导数就等于偏导数:

$$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,h}(p)=\frac{\partial\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^h}(p).$$

曲率张量的表示也变得很简单:

$$R_{ijkl}(p)=\frac{1}{2}(\partial_j\partial_k g_{il}+\partial_i\partial_l g_{jk}-\partial_j\partial_l g_{ik}-\partial_i\partial_k g_{jl}), \tag{3.35}$$

其中, 为了简单起见, 我们用记号 ∂_i 表示关于 x^i 的偏导数. 曲率张量的协变微分可以写为:

$$R_{ijkl,h}(p)=\frac{1}{2}(\partial_h\partial_j\partial_k g_{il}+\partial_h\partial_i\partial_l g_{jk}-\partial_h\partial_j\partial_l g_{ik}-\partial_h\partial_i\partial_k g_{jl}). \tag{3.36}$$

例 3.4.4. 散度的局部表示.

设 X 为向量场, 在如上坐标下可表示为 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 由于

$$\mathrm{div}X=\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}X^i),$$

于是在 p 处有

$$\mathrm{div}X(p)=\partial_i(X^i),$$

这就回到了欧氏空间中的散度公式了. 当然, 上式只在 p 处成立. □

例 3.4.5. *Laplace* 算子的局部表示.

设 f 为光滑函数, 则

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f),$$

于是在 p 处有

$$\Delta f(p)=\partial_i\partial_i f,$$

这就回到了欧氏空间中的 Laplace 算子了. □

例 3.4.6. 外微分算子的表示.

设 $\{e_i\}$ 为一组局部标架, $\{\omega^i\}$ 为其对偶, 则必有

$$d = \omega^i \wedge \nabla_{e_i}. \tag{3.37}$$

我们来证明上式. 首先容易看出, 上式右边不依赖于标架的选取. 因此, 我们可以在如上的局部坐标 $\{x^i\}$ 下令

$$\tilde{d} = dx^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}},$$

然后只要说明 $d = \tilde{d}$ 即可. 设 η 为 r 次微分形式, 不妨设

$$\eta = f dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_r},$$

则 (注意在 p 处 $\nabla dx^i = 0$)

$$\tilde{d}\eta(p) = (\partial_j f) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_r} = d\eta,$$

由于 p 可以任意选取, 这说明 (3.37) 总成立. □

在实际的应用中, 满足上述要求的局部坐标还可以如下构造. 仍设 $p \in M$. 我们知道, 给定 p 处的切向量 v, 存在从 p 出发的惟一测地线 σ_v, 使得 $\dot{\sigma}_v(0) = v$. 测地线方程为二阶常微分方程组, 根据常微分方程组关于初始条件的连续 (光滑) 依赖性, 存在 T_pM 中原点 0 的开邻域 U_0, 使得当 $v \in U_0$ 时, 测地线 σ_v 的定义域包含 $[0,1]$. 定义映射

$$\exp_p : U_0 \to M, \quad \exp_p(v) = \sigma_v(1), \quad \forall\, v \in U_0.$$

$\exp_p$ 是光滑映射, 称为 p 处的**指数映射**.

显然, 当 t 充分小时, $\exp_p(tv) = \sigma_v(t)$, 特别地,

$$d\exp_p(v) = \dot{\sigma}_v(0) = v,$$

即 $\exp_p$ 在 $0 \in T_pM$ 处的切映射为恒同映射, 这说明指数映射局部上为微分同胚. 利用这一点, 我们在 p 附近构造局部坐标. 事实上, 任取 T_pM 的一组标准正交基 $\{e_i\}$, p 附近的任意一点 q 可以惟一地表示为

$$q = \exp_p(x^1 e_1 + \cdots x^n e_n),$$

我们就将 $\{x^i\}$ 作为 q 的坐标. 这样就得到了 p 附近的局部坐标系 $\{x^i\}$, 称为 p 处的**法坐标**或**正规坐标**.

我们来研究正规坐标的性质. 首先, 按定义可得 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = e_i$, 因此

$$g_{ij}(p) = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \Big\rangle = \delta_{ij}. \tag{3.38}$$

其次, 任给向量 $v=v^ie_i$, 测地线 $\sigma_v(t)=\exp_p(tv)$ 在局部坐标 $\{x^i\}$ 中表示为

$$\sigma_v=(v^1t,\cdots,v^nt),$$

从而测地线方程成为

$$\Gamma_{ij}^k(\sigma_v(t))v^iv^j=0. \tag{3.39}$$

特别地, 在上式中令 $t=0$, 此时 $\{v^i\}$ 可任取, 从而立即得到

$$\Gamma_{ij}^k(p)=0. \tag{3.40}$$

如果在 (3.39) 式两边乘以 t^2, 则得到如下一般的恒等式

$$\Gamma_{ij}^k x^ix^j=0. \tag{3.41}$$

由于 σ_v 为测地线, 其切向量的长度不变, 因此

$$g_{ij}(\sigma_v(t))v^iv^j=g_{ij}(p)v^iv^j=v^iv^i,$$

在上式两边乘以 t^2, 得如下恒等式

$$g_{ij}x^ix^j=x^ix^i. \tag{3.42}$$

从以上这些等式出发, 我们再推导一个在正规坐标下很有用的等式. 首先, 以 Chirstoffel 系数的公式代入 (3.41) 可得

$$\frac{1}{2}(\partial_jg_{ik}+\partial_ig_{jk}-\partial_kg_{ij})x^ix^j=0,$$

由指标 i,j 的对称性得

$$(\partial_jg_{ik}-\frac{1}{2}\partial_kg_{ij})x^ix^j=0,$$

从而有

$$\begin{aligned}(\partial_jg_{ik})x^ix^j&=\frac{1}{2}(\partial_kg_{ij})x^ix^j\\&=\frac{1}{2}\partial_k(g_{ij}x^ix^j)-g_{ik}x^i\\&=\frac{1}{2}\partial_k(x^ix^i)-g_{ik}x^i\\&=x^k-g_{ik}x^i.\end{aligned}$$

另一方面, 由 $(\partial_jg_{ik})x^ix^j=\partial_j(g_{ik}x^i)x^j-g_{ik}x^i$ 代入上式得

$$\partial_j(g_{ik}x^i)x^j=x^k,$$

这可以改写为

$$\partial_j(g_{ik}x^i-x^k)x^j=0,$$

这说明, 沿着从 p 出发的任意测地线 $\sigma_v(t)$, 均有

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}x^i - x^k) = 0,$$

由于在 p 处 $g_{ik}x^i - x^k = 0$, 上式说明

$$x^k = g_{ik}x^i. \tag{3.43}$$

这个有用的等式称为 **Gauss 引理**.

对 (3.43) 在 p 处求导可以得到 g_{ij} 的各阶导数之间的关系. 例如, 等式两边先后关于 x^i, x^l 以及 x^j 求导, 然后在 p 处取值, 得到

$$(\partial_l\partial_i g_{jk} + \partial_i\partial_j g_{lk} + \partial_j\partial_l g_{ik})(p) = 0. \tag{3.44}$$

同理, 继续求导可得

$$(\partial_i\partial_j\partial_k g_{lm} + \partial_j\partial_k\partial_l g_{im} + \partial_k\partial_l\partial_i g_{jm} + \partial_l\partial_i\partial_j g_{km})(p) = 0. \tag{3.45}$$

高阶导数有完全类似的等式.

例 3.4.7. *黎曼度量的 Taylor 展开.*

在正规坐标 x^i 下, 黎曼度量的分量 g_{ij} 在 p 处可以作 Taylor 展开:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_l\partial_k g_{ij}(p)x^kx^l + \frac{1}{6}\partial_m\partial_l\partial_k g_{ij}(p)x^kx^lx^m + \cdots. \tag{3.46}$$

下面我们用曲率来表示上式中的系数.

首先, 利用 (3.44) 可得

$$\begin{aligned}
(\partial_j\partial_k g_{li} + \partial_k\partial_l g_{ji} + \partial_l\partial_j g_{ki})(p) &= 0,\\
(\partial_i\partial_k g_{lj} + \partial_k\partial_l g_{ij} + \partial_l\partial_i g_{kj})(p) &= 0,\\
(\partial_i\partial_j g_{lk} + \partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_l g_{jk})(p) &= 0,\\
(\partial_i\partial_j g_{kl} + \partial_j\partial_k g_{il} + \partial_k\partial_i g_{jl})(p) &= 0.
\end{aligned}$$

前两式的和减去后两式的和, 得

$$\partial_k\partial_l g_{ij}(p) = \partial_i\partial_j g_{kl}(p).$$

利用 (3.35) 以及上式得

$$\begin{aligned}
R_{ikjl}(p) + R_{iljk}(p) &= (\partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_k\partial_l g_{ij})(p) + (\partial_l\partial_j g_{ik} - \partial_k\partial_l g_{ij})(p)\\
&= -3\,\partial_k\partial_l g_{ij}(p).
\end{aligned}$$

同理, 多次利用 (3.36) 以及 (3.45) 可以算出

$$\begin{aligned}&(R_{ikjl,m}+R_{iljk,m}+R_{ikjm,l}+R_{imjk,l}+R_{iljm,k}+R_{imjl,k})(p)\\&=(\partial_m R_{ikjl}+\partial_m R_{iljk}+\partial_l R_{ikjm}+\partial_l R_{imjk}+\partial_k R_{iljm}+\partial_k R_{imjl})(p)\\&=-6\,\partial_m\partial_k\partial_l g_{ij}(p),\end{aligned}$$

因此 (3.46) 可以改写为

$$g_{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{3}R_{ikjl}(p)x^kx^l-\frac{1}{6}R_{ikjl,m}(p)x^kx^lx^m+\cdots. \tag{3.47}$$

从而有

$$G=\det(g_{ij})=1-\frac{1}{3}R_{kl}(p)x^kx^l-\frac{1}{6}R_{kl,m}(p)x^kx^lx^m+\cdots.$$

如果在测地球上对体积形式积分, 则得到测地球体积的渐近展开:

$$\mathrm{Vol}B_r(p)=\omega_n r^n[1-\frac{S}{6(n+2)}r^2+O(r^4)], \tag{3.48}$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体的体积.

习题 3.4

1. 设 M 为 n 维黎曼流形, 如果存在一组 (局部)1- 形式 $\{\omega^i\}$, 使得度量 g 可以表示为
$$g=\omega^1\otimes\omega^1+\cdots+\omega^n\otimes\omega^n,$$
则 $\{\omega^i\}$ 是一组标准正交基的对偶.

2. 设 $\{\omega^i\}$ 为余切标架场, $\{\omega^i_j\}$ 为一组 1 形式, 满足条件
$$\omega^i_j+\omega^j_i=0,\quad \omega^i_j\wedge\omega_j=0,$$
证明 $\omega^j_i\equiv 0$.

3. 用活动标架法证明等距同构保持曲率张量不变.

4. 设 (M,g), (N,h) 为黎曼流形, 计算 $(M\times N, g+h)$ 的曲率, 并说明, 当 X, Y 分别与 M, N 相切时, 平面 $\mathrm{span}\{X,Y\}$ 的截面曲率为零.

5. 设 (M,g), (N,h) 为黎曼流形, ϕ 为 M 上的正光滑函数, 计算 $M\times N$ 在度量 $g+\phi^2h$ 下的曲率.

6. 设 M^2 为曲面, g 为 M 上的黎曼度量. 设 $p\in M$, $r>0$. 记
$$S_r(p)=\{q\in M\,|\,d(p,q)=r\}.$$
当 r 充分小时 $S_r(p)$ 是圆周, 求其长度 $L(S_r(p))$ 的渐近展开.

§3.5 子流形几何

§3.5.1 第二基本形式

设 $(\bar{M}, \bar{g})$ 为黎曼流形, M 为 $\bar{M}$ 的子流形, 其黎曼度量 g 由 $\bar{g}$ 诱导而来. 记 $(\bar{M}, \bar{g})$ 的 Levi-Civita 联络为 $\bar{\nabla}$. 任给 M 的切向量场 X, Y, 记 $\nabla_X Y$ 为 $\bar{\nabla}_X Y$ 到 M 的切向投影, 则 $\nabla_X Y$ 定义了 (M, g) 的 Levi-Civita 联络. 令

$$\mathrm{II}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

则 II 关于 X, Y 均为函数线性的, 从而定义了从 M 的切空间到法空间的双线性映射, 称为 M 的第二基本形式. 黎曼度量 g 则称为 M 的第一基本形式.

第二基本形式关于 X, Y 是对称的:

$$\mathrm{II}(X, Y) - \mathrm{II}(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) = [X, Y] - [X, Y] = 0.$$

设 ν 为 M 的法向量 (即 $\langle \nu, X \rangle = 0$ 对任意切向量 X 成立), 令

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y) = \langle \nu, \mathrm{II}(X, Y) \rangle,$$

则 II_ν 是 M 上的二阶对称协变张量场, 称为关于法向 ν 的第二基本形式. 按定义, 上式还可以改写为

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y) = \langle \nu, \bar{\nabla}_X Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle,$$

记 $A_\nu(X)$ 为 $\bar{\nabla}_X \nu$ 到 M 的切向的投影, 则上式还可写为

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y) = -\langle A_\nu X, Y \rangle,$$

算子 A_ν 称为关于法向 ν 的形状算子. 如果 M 为超曲面 (即 $\dim M = \dim \bar{M} - 1$), ν 为单位法向量场, 则由

$$\langle \bar{\nabla}_X \nu, \nu \rangle = \frac{1}{2} X \langle \nu, \nu \rangle = 0$$

知 $\bar{\nabla}_X \nu$ 本身就是切向量, 此时 $A_\nu(X) = \bar{\nabla}_\nu X$. 算子 A_ν 的特征值称为主曲率 (principal curvature).

例 3.5.1. 等值面的第二基本形式.

设 $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, c 为 f 的正则值, 则 $M = f^{-1}(c)$ 为 $\bar{M}$ 的超曲面. 取 $\nu = \mathrm{grad} f$, 则 ν 限制在 M 上时是法向量. 任取 M 的切向量场 X, Y, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_\nu(X, Y) &= \langle \nu, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \langle \mathrm{grad} f, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \bar{\nabla}_X Y f = -Y X f + \bar{\nabla}_X Y f \\ &= -\bar{\nabla}^2 f(X, Y),\end{aligned}$$

这说明 $\mathrm{II}_\nu = -\bar{\nabla}^2 f$. □

如果 M 的第二基本形式恒为零, 则称 M 为 $\bar{M}$ 的全测地子流形. 设 M 为全测地子流形, σ 为 M 的一条测地线, 则

$$\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = \nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0,$$

这说明 σ 也是 $\bar{M}$ 的测地线. 反之, 如果初始位置与 M 相切的 $\bar{M}$ 的测地线均完全含于 M 中, 则 M 是全测地子流形.

最简单的全测地子流形莫过于测地线了. 一般维数的全测地子流形在大部分情况下并不存在. 不过, 等距同构有时能给出全测地子流形.

命题 3.5.1. *设 $\varphi\colon \bar{M} \to \bar{M}$ 为 $(\bar{M}, \bar{g})$ 的等距同构, 记*

$$M = \{p \in \bar{M} \mid \varphi(p) = p\},$$

即 M 为 φ 的不动点全体. 则 M 的每个连通分支均为 $\bar{M}$ 的全测地子流形.

证明. 设 $p \in M$. 记

$$V_p = \{v \in T_p\bar{M} \mid \varphi_{*p}(v) = v\},$$

则 V_p 为 $T_p\bar{M}$ 的子空间. 如果 $v \in V_p$, 设 σ 是从 p 出发的测地线, $\dot{\sigma}(0) = v$. 于是 $\varphi(\sigma)$ 也是从 p 出发的测地线, 且它的初始切向量也是 v. 根据测地线的惟一性, 必有 $\varphi(\sigma) = \sigma$, 这说明 $\sigma \subset M$, 因此

$$\exp_p(V_p) \subset M.$$

反之, 因为指数映射局部上是微分同胚, 任取 M 中靠近 p 的点 q, 在 p 附近有惟一的测地线 γ 连接 p 和 q. 由于 $\varphi(p) = p$, $\varphi(q) = q$, 故 $\varphi(\gamma)$ 也是这样的测地线, 这说明 $\varphi(\gamma) = \gamma$. 因此 $\dot{\gamma}(0) \in V_p$, 且 $q \in \exp_p(V_p)$.

利用指数映射的局部微分同胚性质, 以上论证就表明 M 的含有 p 的连通分支是 $\bar{M}$ 的正则子流形, 维数为 $\dim V_p$. 同时, 从以上论证还可以看出, 初始位置与 M 相切的测地线必定总是含于 M 中, 这说明 M 是全测地子流形. □

作为上述命题的推论, 如果一个等距同构的不动点集是一条曲线, 则该曲线必为测地线. 由此很容易确定 $\mathbb{R}^n$, S^n 以及 $\mathbb{H}^n$ 中的测地线.

下面我们研究子流形 M 的曲率和外围流形 $\bar{M}$ 的曲率之间的关系. 设 X, Y, Z 为 M 的切向量场. 则有

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \mathrm{II}(X,Z)) \\ &= \nabla_Y\nabla_X Z + \mathrm{II}(Y, \nabla_X Z) + \bar{\nabla}_Y(\mathrm{II}(X,Z)),\end{aligned}$$

同理可得

$$\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z + \mathrm{I\!I}(X,\nabla_Y Z) + \bar{\nabla}_X(\mathrm{I\!I}(Y,Z)),$$

再利用 $\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \mathrm{I\!I}([X,Y],Z)$ 可得

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + \mathrm{I\!I}(Y,\nabla_X Z) - \mathrm{I\!I}(X,\nabla_Y Z) + \mathrm{I\!I}([X,Y],Z) \\ & + \bar{\nabla}_Y(\mathrm{I\!I}(X,Z)) - \bar{\nabla}_X(\mathrm{I\!I}(Y,Z)).\end{aligned} \tag{3.49}$$

我们考虑上式在 M 的切向和法向的分量. 先考虑切向. 任取 M 的切向量场 W, 则

$$\langle\bar{\nabla}_Y(\mathrm{I\!I}(X,Z)),W\rangle = -\langle\mathrm{I\!I}(X,Z),\bar{\nabla}_Y W\rangle = -\langle\mathrm{I\!I}(X,Z),\mathrm{I\!I}(Y,W)\rangle,$$

同理有

$$\langle\bar{\nabla}_X(\mathrm{I\!I}(Y,Z)),W\rangle = -\langle\mathrm{I\!I}(Y,Z),\mathrm{I\!I}(X,W)\rangle,$$

代入 (3.49) 得

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \langle\mathrm{I\!I}(X,Z),\mathrm{I\!I}(Y,W)\rangle + \langle\mathrm{I\!I}(Y,Z),\mathrm{I\!I}(X,W)\rangle. \tag{3.50}$$

上式称为 M 的 Gauss 方程. 考虑 (3.49) 在 M 的法向的分量, 则有

$$\begin{aligned}\perp\bar{R}(X,Y)Z = {} & \mathrm{I\!I}(Y,\nabla_X Z) - \mathrm{I\!I}(X,\nabla_Y Z) + \mathrm{I\!I}([X,Y],Z) \\ & + \perp\bar{\nabla}_Y(\mathrm{I\!I}(X,Z)) - \perp\bar{\nabla}_X(\mathrm{I\!I}(Y,Z)).\end{aligned} \tag{3.51}$$

上式称为 M 的 Codazzi 方程.

当 M 为超曲面时, Codazzi 方程可以作一些简化. 此时, 取 M 的单位法向量场 ν, 则由 $\mathrm{I\!I}(X,Y) = \mathrm{I\!I}_\nu(X,Y)\cdot\nu$ 可得

$$\bar{\nabla}_Y(\mathrm{I\!I}(X,Z)) = Y(\mathrm{I\!I}_\nu(X,Z))\cdot\nu + \mathrm{I\!I}_\nu(X,Z)\bar{\nabla}_Y\nu,$$

同理可得 $\bar{\nabla}_X(\mathrm{I\!I}(Y,Z))$ 的分解. 此时 Codazzi 方程可写为

$$\perp\bar{R}(X,Y)Z = [(\nabla_Y\mathrm{I\!I}_\nu)(X,Z) - (\nabla_X\mathrm{I\!I}_\nu)(Y,Z)]\nu.$$

特别地, 当 $\bar{M}$ 为常曲率流形时, 上式左端为零, 这时 $(\nabla_X\mathrm{I\!I}_\nu)(Y,Z)$ 关于 X, Y, Z 都是对称的.

§3.5.2 活动标架法

下面我们运用结构方程来研究子流形. 设 $\bar{M}$ 为 $n+p$ 维流形, M 是其 n 维子流形. 我们规定, 指标 A, B, C 等的取值范围从 1 至 $n+p$, 指标 i, j, k 等的取值范围从 1 至 n, 指标 α, β, γ 等的取值范围从 $n+1$ 至 $n+p$. 在 $\bar{M}$ 上选取局部标准

正交标架 $\{e_A\}$, 使得当限制在 M 上时, $\{e_i\}$ 是 M 的局部正交标架, 从而 $\{e_\alpha\}$ 为 M 的法丛的局部标架.

设 $\{\omega^A\}$ 为 $\{e_A\}$ 的对偶余切标架. 考虑 $\bar{M}$ 的结构方程

$$\begin{aligned} d\omega^A &= -\omega^A_B \wedge \omega^B, \quad \omega^A_B + \omega^B_A = 0, \\ d\omega^A_B &= -\omega^A_C \wedge \omega^C_B + \bar{\Omega}^A_B, \\ \bar{\Omega}^A_B &= \frac{1}{2}\bar{R}_{ABCD}\omega^C \wedge \omega^D. \end{aligned}$$

其中 ω^A_B 和 $\bar{\Omega}^A_B$ 分别为 $\bar{M}$ 的联络形式和曲率形式. 由于 ω^α 限制在 M 上恒为零, 因此 $\bar{M}$ 的结构方程的第一式限制在 M 上就得到了 M 的结构方程的第一式. 在 M 上有

$$0 = d\omega^\alpha = -\omega^\alpha_i \wedge \omega^i.$$

从上式容易看出, ω^α_i 不含 ω^β 的分量. 其 ω^j 分量可计算如下:

$$\omega^\alpha_i(e_j) = \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_\alpha \rangle = \langle \mathrm{II}(e_j, e_i), e_\alpha \rangle = \mathrm{II}_{e_\alpha}(e_j, e_i).$$

如果记 $h^\alpha_{ji} = \mathrm{II}_{e_\alpha}(e_j, e_i)$, 则上式表明

$$\omega^\alpha_i = h^\alpha_{ij}\omega^j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}. \tag{3.52}$$

将上式代入 $\bar{M}$ 的结构方程的第二式, 计算出 M 的曲率形式 Ω^i_j 为

$$\Omega^i_j = -\omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j + \bar{\Omega}^i_j = h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}\omega^k \wedge \omega^l + \frac{1}{2}\bar{R}_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

因此 M 的曲率为

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}). \tag{3.53}$$

这也就是 M 的 Gauss 方程.

同理可求得

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha_\beta &= -\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta + \Omega^\alpha_\beta, \\ \Omega^\alpha_\beta &= \frac{1}{2}R_{\alpha\beta kl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

其中

$$R_{\alpha\beta kl} = \bar{R}_{\alpha\beta kl} + (h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl} - h^\alpha_{il}h^\beta_{jk}), \tag{3.54}$$

上式称为 M 的 Ricci 方程.

下面考虑 Codazzi 方程. 记 M 的法丛为 $T^\perp M$, 它由 M 的所有法向量构成. 我们可以在法丛上如下定义联络: 设 X 为 M 的切向量场, ξ 为法向量场, 令

$$\nabla_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp,$$

则不难验证 $\nabla_X\xi$ 定义了 $T^\perp M$ 上的联络. 由

$$\bar{\nabla}e_\alpha=\omega_\alpha^i\otimes e_i+\omega_\alpha^\beta\otimes e_\beta$$

可得

$$\bar{\nabla}_{e_i}e_\alpha=-h_{ij}^\alpha e_j+\omega_\alpha^\beta(e_i)e_\beta.$$

因此

$$\nabla_{e_i}e_\alpha=(\bar{\nabla}_{e_i}e_\alpha)^\perp=\omega_\alpha^\beta(e_i)e_\beta,$$

这说明 ω_α^β 是法从联络的联络形式.

有了这些联络以后, 我们可以对法从, 切从以及余切从的张量积的截面求协变微分. 例如, e_α 为法从的局部截面, 其协变微分 ∇e_α 是 $T^\perp M\otimes T^*M$ 的截面, 定义为

$$\nabla e_\alpha=e_\beta\otimes\omega_\alpha^\beta.$$

再如, 如果

$$S=S_{ij}^\alpha e_\alpha\otimes\omega^i\otimes\omega^j$$

是 $T^\perp M\otimes T^*M\otimes T^*M$ 的截面, 则其协变微分定义为

$$\nabla S=S_{ij,k}^\alpha e_\alpha\otimes\omega^i\otimes\omega^j\otimes\omega^k,$$

其中

$$S_{ij,k}^\alpha\omega^k=dS_{ij}^\alpha-S_{kj}^\alpha\omega_i^k-S_{ik}^\alpha\omega_j^k+S_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha. \tag{3.55}$$

一般的情形可类似地定义协变微分. 有了协变微分, M 的 Codazzi 方程可以写为

$$\perp\bar{R}(X,Y)Z=(\nabla_Y\mathrm{I\!I})(X,Z)-(\nabla_X\mathrm{I\!I})(Y,Z). \tag{3.56}$$

在局部标架下, M 的第二基本形式可写为

$$\mathrm{I\!I}=h_{ij}^\alpha e_\alpha\otimes\omega^i\otimes\omega^j,$$

于是 Codazzi 方程也可写为

$$\bar{R}_{ijk\alpha}=h_{ik,j}^\alpha-h_{jk,i}^\alpha, \tag{3.57}$$

它也可以通过对 (3.52) 两边求外微分, 再利用结构方程得到.

§3.5.3 极小子流形

设 M 为 n 维子流形, 法向量

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\mathrm{I\!I}$$

称为 M 的平均曲率向量. 其中 $\mathrm{tr}\mathrm{I\!I}$ 表示对第二基本形式的两个协变指标求 trace. 在前一小节的记号下, 有

$$H = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{\alpha})e_{\alpha}.$$

设 ν 为单位法向量, 记

$$H_{\nu} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\mathrm{I\!I}_{\nu},$$

称为 ν 方向的平均曲率. 容易看出, 平均曲率是主曲率的平均.

平均曲率向量恒为零的子流形称为**极小子流形**. 极小子流形是微分几何的重要研究对象之一, 我们在这里只给出一些基本的事实和例子.

例 3.5.2. 球面的平均曲率.

考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 c 的球面 $S^n(c)$. 此时 $\nu = c^{-1}\vec{x}$ 为其单位外法向, 如果 X 为切向量, 则

$$\bar{\nabla}_X \nu = c^{-1}\bar{\nabla}_X \vec{x} = c^{-1}X.$$

因此第二基本形式为

$$\mathrm{I\!I}_{\nu}(X, Y) = -c^{-1}\langle X, Y\rangle,$$

平均曲率为

$$H_{\nu} = -c^{-1}.$$

如果取单位内法向, 则平均曲率为 c^{-1}. □

例 3.5.3. $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图像.

设 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 为光滑函数, 则 $x^{n+1} = f(x^1, \cdots, x^n)$ 定义了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面, 称为函数 f 的图像. 我们来计算它的平均曲率.

首先, 第一基本形式可以表示为

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i + (\partial_i f dx^i) \otimes (\partial_j f dx^j) = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

其中 $g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f$, 因此 $g^{ij} = \delta_{ij} - A^{-2}\partial_i f \partial_j f$, 其中

$$A = [1 + \sum_{i=1}^{n}(\partial_i f)^2]^{1/2} = [1 + |\bar{\nabla} f|^2]^{1/2}.$$

我们取单位法向量为

$$\nu = A^{-1}(\partial_i f \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}),$$

则

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu = -\frac{\partial_i A}{A}\nu + \frac{1}{A}\partial_i \partial_j f \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

因此

$$\mathrm{I\!I}_\nu(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = -\frac{1}{A}\partial_i \partial_j f,$$

从而第二基本形式可表示为

$$\mathrm{I\!I}_\nu = -\frac{1}{A}\partial_i \partial_j f dx^i \otimes dx^j,$$

平局曲率为

$$H_\nu = -\frac{1}{n} g^{ij} \frac{1}{A}\partial_i \partial_j f = -\frac{1}{n}\partial_i (A^{-1}\partial_i f).$$

函数 f 的图像为极小超曲面当且仅当 f 满足以下方程

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\sqrt{1+|\bar{\nabla} f|^2}}\right) = 0. \tag{3.58}$$

下面我们讨论欧氏空间中一般的极小子流形所满足的条件. 设 $f:\ M^k \to \mathbb{R}^n$ 为浸入, M 有诱导度量 $g = f^* g_0$. 如果用分量表示 f, 即

$$f = (f^1, \cdots, f^n),$$

则 $g = df^1 \otimes df^1 + \cdots + df^n \otimes df^n$. 我们来计算 M 的平均曲率向量. 因为这可以局部计算, 我们不妨设 f 为嵌入, 这样, 当等同 M 与 $f(M)$ 以后, f 就可以看成是 M 的位置向量. 特别地, 对于 M 上的向量场 X 来说, $X = Xf$. 取 M 的局部标准正交标架 $\{e_i\}$, 则

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{k}(\bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i) \\ &= \frac{1}{k}[\bar{\nabla}_{e_i}(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f] \\ &= \frac{1}{k}[e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f] \\ &= \frac{1}{k}\Delta f, \end{aligned}$$

其中 $\Delta f = (\Delta f^1, \cdots, \Delta f^n)$. 于是我们有

推论 3.5.2. *浸入子流形 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的极小子流形当且仅当浸入映射的每一个分量均为调和函数.*

因为紧致无边流形上的调和函数必为常值函数, 因而还有

推论 3.5.3. *欧氏空间中不存在紧致无边的极小子流形.*

接着我们考察球面的极小子流形. 先设 $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为嵌入子流形, $f:\ M^k \to \bar{M}$ 为浸入, $M, \bar{M}$ 的度量均为诱导黎曼度量. M 在 $\bar{M}$ 和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的平均曲率向量分别记为 H 和 $\bar{H}$.

命题 3.5.4. *$H = \top\bar{H} = \frac{1}{k}\top\Delta f$, 其中 $\top$ 表示向 $\bar{M}$ 的切向作投影.*

证明. 记 ∇^0 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的联络, M 和 $\bar{M}$ 的联络分别记为 $\nabla, \bar{\nabla}$. 取 M 的局部标准正交标架 $\{e_i\}$, 则

$$\bar{H} = \frac{1}{k}(\nabla^0_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i),$$

$$H = \frac{1}{k}(\bar{\nabla}_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i).$$

由 $\top\nabla^0 = \bar{\nabla}$ 以及上式即知 $H = \top\bar{H}$. □

如果取 $\bar{M} = S^n(c)$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 c 的球面, 则 $f:\ M \to S^n(c)$ 为极小浸入当且仅当

$$\top(\Delta f) = 0,$$

于是 Δf 为 $S^n(c)$ 的法向, 从而存在函数 $\lambda:\ M \to \mathbb{R}$, 使得

$$\Delta f = \lambda f.$$

由 $|f|^2 = c^2$ 得

$$0 = \Delta|f|^2 = 2\langle\Delta f, f\rangle + 2|\nabla f|^2,$$

于是

$$\lambda c^2 = -|\nabla f|^2 = -\sum_{i=1}^{k}\langle e_i f, e_i f\rangle = -\sum_{i=1}^{k}\langle e_i, e_i\rangle = -k,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 的一组局部标准正交标架. 这就得到如下推论

推论 3.5.5. *如果 $f:\ M^k \to S^n(c)$ 为等距极小浸入, 则 f 满足条件*

$$\Delta f = -\frac{k}{c^2}f,$$

即 f 的每个分量均为 M 的 Laplace 算子的特征函数, 特征值为 $-k/c^2$.

反之, 设 $f:\ M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为等距浸入, 满足条件 $\Delta f = \lambda f$, 其中 λ 为 M 上处处非零的函数. 这说明, 作为位置向量, f 在 M 上是法向. 因此, 对 M 的任意切向量 X, 均有

$$X|f|^2 = 2\langle Xf, f\rangle = 2\langle X, f\rangle = 0,$$

从而 $|f|^2 = c^2$ 为常数, 即 $f(M) \subset S^n(c)$. 这时 M 为 $S^n(c)$ 的极小子流形, 且 $\lambda = -k/c^2$. 总结一下, 我们就得到了如下结果

定理 3.5.6 (Takahashi)**.** *设 $f:\ M^k \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为等距浸入. 则下列几条是等价的:*

(1) *$f(M)$ 为 $S^n(c)$ 的极小浸入子流形;*

(2) *$\Delta f = -\frac{k}{c^2}f$;*

(3) *$\Delta f = \lambda f$, 其中 λ 为 M 上处处非零的函数.*

这个定理可以用来构造球面极小子流形的许多例子.

例 3.5.4. *Veronese 曲面.*

考虑映射 $f: S^2(\sqrt{3}) \to S^4$, 其中

$$f(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{3}}xy, \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2-y^2), \frac{1}{6}(x^2+y^2-2z^2)).$$

直接的计算表明, f 为等距浸入. 为了说明它还是极小浸入, 我们要在球面上计算函数的 Laplace.

一般地, 设 ϕ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的光滑函数, 我们来比较球面 Laplace 算子 Δ 和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 Laplace 算子 $\bar{\Delta}$ 作用于 ϕ 的区别. 为此, 取 $S^n(c)$ 的局部标准正交标架 $\{e_i\}$, 则

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i\phi) - \nabla_{e_i}e_i\phi).$$

取 $\nu = c^{-1}\vec{x}$ 为单位外法向, 则

$$\bar{\Delta}\phi = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i\phi) - \bar{\nabla}_{e_i}e_i\phi) + (\nu(\nu\phi) - \bar{\nabla}_\nu\nu\phi).$$

于是

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \bar{\Delta}\phi + nH\phi - (\nu(\nu\phi) - \bar{\nabla}_\nu\nu\phi)\\
&= \bar{\Delta}\phi - \frac{n}{c}\nu\phi - \frac{1}{c^2}x^i\partial_i(x^j\partial_j\phi) + \frac{1}{c}\nu\phi\\
&= \bar{\Delta}\phi - \frac{n-1}{c^2}x^i\partial_i\phi - \frac{1}{c^2}x^i\partial_i(x^j\partial_j\phi).
\end{aligned}$$

利用上式很容易验证 $\Delta f = -2f$, 由 Takahashi 定理即知 f 为极小浸入. □

从上面的计算中可以看出, 如果 l 为球面 $S^n(c)$ 上的线性函数, 则

$$\Delta_{S^n(c)}l = -\frac{n}{c^2}l, \tag{3.59}$$

我们可以利用上式寻找一类乘积球面, 使得它们是单位球面里的极小子流形.

例 3.5.5. *Clifford 极小超曲面.*

设 $S^r(a)$ 和 $S^s(b)$ 分别为半径 a, b 的球面, $r+s=n$. 如果 $a^2+b^2=1$, 则乘积流形 $S^r(a)\times S^s(b)$ 是单位球面 S^{n+1} 的超曲面. 记

$$x=(x_1,x_2)\in S^r(a)\times S^s(b),$$

则

$$\Delta x=(\Delta_{S^r(a)}x_1,\Delta_{S^s(b)}x_2)=-(\frac{r}{a^2}x_1,\frac{s}{b^2}x_2).$$

$S^r(a)\times S^s(b)$ 为极小超曲面当且仅当 $\Delta x=-nx$, 即

$$r=na^2,\quad s=nb^2.$$

从上式解出

$$a=\sqrt{r/n},\quad b=\sqrt{s/n}.$$

这说明 $S^r(\sqrt{r/n})\times S^s(\sqrt{s/n})$ 为 S^{n+1} 的极小超曲面, 其中 $r+s=n$. 例如, $S^1(\sqrt{1/2})\times S^1(\sqrt{1/2})$ 是 S^3 中的极小曲面, 称为 Clifford 环面. □

最后, 我们指出极小子流形实际上是体积泛函的临界点. 为此先引入光滑变分的概念. 设 M 为紧致带边流形 (边界可能为空集).

定义 3.5.1. 设 $f\colon M\to\bar{M}$ 为浸入, f 的一个光滑变分是指满足下列条件的光滑映射 $F\colon M\times(-c,c)\to\bar{M}$:

(i) 每一个映射 $f_t=F(\cdot,t)$ 均为从 M 到 $\bar{M}$ 的浸入;

(ii) $f_0=f$;

(iii) $f_t\big|_{\partial M}=f\big|_{\partial M}$, $\forall\ t\in(-c,c)$.

设 $\bar{g}=\langle,\rangle$ 为 $\bar{M}$ 上的黎曼度量, 记 $g_t=g(t)=f_t^*\bar{g}$, 则 $\{g_t\}$ 为 M 上的一族度量, 我们研究体积 $\mathrm{Vol}(M,g_t)$ 如何随 t 变化. 为此, 取 (M,g_0) 的局部标准正交标架 $\{e_i\}$, 其对偶标架为 $\{\omega^i\}$. 于是

$$g_t=g_{ij}(t)\omega^i\otimes\omega^j,$$

其中 $g_{ij}(t)=g_t(e_i,e_j)=\bar{g}(f_{t*}e_i,f_{t*}e_j)$. 因此有

$$\mathrm{Vol}(M,g_t)=\int_M\Omega_t=\int_M\sqrt{G_t}\,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n,$$

其中 $G_t=\det(g_{ij}(t))$.

$M\times(-c,c)$ 上的局部标架 $\{e_i,\frac{\partial}{\partial t}\}$ 在 F 下的像记为 $\{e_i(t),V(t)\}$. 容易看出, $[e_i(t),V(t)]=0$. 我们如下计算体积关于 t 导数:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(M,g_t)&=\int_M\frac{d}{dt}\sqrt{G_t}\,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&=\int_M\frac{1}{2}G_t^{-1/2}\frac{d}{dt}G_t\,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&=\int_M\frac{1}{2}g^{ij}(t)g_{ij}'(t)\Omega_t.\end{aligned}$$

记 $\bar{g}$ 的联络为 $\bar{\nabla}$, 则进一步有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g^{ij}(t)g'_{ij}(t) &= \frac{1}{2}g^{ij}(t)V(t)\langle e_i(t), e_j(t)\rangle \\ &= g^{ij}(t)\langle \bar{\nabla}_{V(t)}e_i(t), e_j(t)\rangle = g^{ij}(t)\langle \bar{\nabla}_{e_i(t)}V(t), e_j(t)\rangle \\ &= g^{ij}(t)\langle \bar{\nabla}_{e_i(t)}\top V(t), e_j(t)\rangle - \mathrm{tr}_{g_t}\mathrm{II}_{\perp V(t)} \\ &= g^{ij}(t)\langle \nabla_{e_i(t)}\top V(t), e_j(t)\rangle - \mathrm{tr}_{g_t}\mathrm{II}_{\perp V(t)} \\ &= \mathrm{div}_{g_t}(\top V(t)) - \mathrm{tr}_{g_t}\mathrm{II}_{\perp V(t)},\end{aligned}$$

其中 $\top V(t)$, $\perp V(t)$ 分别表示向 M 的切向和法向作投影. 注意到 $V(t)\big|_{\partial M} = 0$, 利用 Stokes 公式, 最后得到如下的体积第一变分公式

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(M, g_t) = -\int_M n\langle H_t, V(t)\rangle \Omega_t, \tag{3.60}$$

其中 H_t 是 (M, g_t) 的平均曲率. 由此可见, 如果 (M, g_0) 为极小子流形, 则

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(M, g_t) = 0.$$

我们将 $V(t) = \frac{\partial f_t}{\partial t}$ 称为 M 的变分场. 当 $V(0)$ 总是沿着 M 的法向时, 称变分 $\{f_t\}$ 是法向变分, 此时无须边界条件, (3.60) 式对 $t = 0$ 仍成立.

以上说明极小子流形是体积泛函的临界点. 然而, 如果想了解极小子流形的体积是否在变分下是最小的, 就必须计算体积泛函的第二变分.

我们先引进几个概念. 在 M 的法从 $T^{\perp}M$ 上我们已经定义过联络 ∇. 对于法向量场 ξ, 定义其 Laplace 为

$$\Delta\xi = \mathrm{tr}\nabla^2\xi = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\xi - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\xi,$$

定义沿 ξ 方向的 Ricci 曲率向量为

$$\overline{\mathrm{Ric}}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \perp\bar{R}(e_i, \xi)e_i,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 (M, g_0) 的局部标准正交标架. 如果 ζ 为另一法向, 则

$$\begin{aligned}\langle\overline{\mathrm{Ric}}(\xi), \zeta\rangle &= \langle\bar{R}(e_i, \xi)e_i, \zeta\rangle = \langle\bar{R}(e_i, \zeta)e_i, \xi\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\zeta), \xi\rangle.\end{aligned}$$

最后, 定义

$$\mathrm{II}\circ\mathrm{II}^T(\xi) = \mathrm{II}_\xi(e_i, e_j)\mathrm{II}(e_i, e_j) = \langle\xi, \mathrm{II}(e_i, e_j)\rangle\mathrm{II}(e_i, e_j),$$

容易验证这个定义与标架的选取无关, 且

$$\langle\mathrm{II}\circ\mathrm{II}^T(\xi), \zeta\rangle = \langle\mathrm{II}\circ\mathrm{II}^T(\zeta), \xi\rangle.$$

设 $f: M \to \bar{M}$ 为极小浸入, $\{f_t\}$ 为法向变分, 变分场在 M 上满足条件

$$\nu\big|_{\partial M} = V(0)\big|_{\partial M} = 0.$$

我们来计算体积 $\mathrm{Vol}(M, g_t)$ 在 $t=0$ 的二阶导数:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(M,g_t) &= -\int_M \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle nH_t, V(t)\rangle\Omega_0 - \langle nH_0,\nu\rangle\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Omega_t \\ &= -\int_M \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle nH_t, V(t)\rangle\Omega_0,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle nH_t, V(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle g^{ij}(t)(\bar\nabla_{e_i(t)}e_j(t) - \nabla_{e_i(t)}e_j(t)),\ \perp V(t)\rangle \\ &= \frac{dg^{ij}}{dt}(0)\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j) + \langle\bar\nabla_\nu(\bar\nabla_{e_i(t)}e_i(t) - \nabla_{e_i(t)}e_i(t)),\ \nu\rangle\big|_{t=0} \\ &\quad + \langle nH_0, \bar\nabla_\nu\perp V(t)\rangle \\ &= \frac{dg^{ij}(0)}{dt}\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j) + \langle\bar\nabla_\nu(\bar\nabla_{e_i(t)}e_i(t) - \nabla_{e_i(t)}e_i(t)),\ \nu\rangle\big|_{t=0}.\end{aligned}$$

利用 $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 得

$$0 = \frac{d}{dt}(g^{ik}(t)g_{kj}(t)) = \frac{dg^{ij}}{dt}(0) + \frac{dg_{ij}}{dt}(0),$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{dg^{ij}}{dt}(0) &= -\frac{dg_{ij}}{dt}(0) = -V(t)\langle e_i(t), e_j(t)\rangle\big|_{t=0} \\ &= -\langle\bar\nabla_\nu e_i(t), e_j\rangle\big|_{t=0} - \langle e_i, \bar\nabla_\nu e_j(t)\rangle\big|_{t=0} \\ &= -\langle\bar\nabla_{e_i}\nu, e_j\rangle - \langle e_i, \bar\nabla_{e_j}\nu\rangle \\ &= 2\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j).\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla_\nu\bar\nabla_{e_i(t)}e_i(t),\nu\rangle &= \langle\bar R(e_i,\nu)e_i,\nu\rangle + \langle\bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_\nu e_i(t),\nu\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle + \langle\bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{e_i}\nu,\nu\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle + \langle\bar\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\nu + \top\bar\nabla_{e_i}\nu),\nu\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nu,\nu\rangle - \langle\top\bar\nabla_{e_i}\nu, \top\bar\nabla_{e_i}\nu\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nu,\nu\rangle - \langle\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j)e_j, \mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_k)e_k\rangle \\ &= \langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nu,\nu\rangle - \mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j)\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j).\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla_\nu\nabla_{e_i(t)}e_i(t),\perp V(t)\rangle &= -\langle\nabla_{e_i}e_i,\bar\nabla_\nu\perp V(t)\rangle\\ &= -\langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle\langle\bar\nabla_\nu\perp V(t),e_j\rangle\\ &= \langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle\langle\nu,\bar\nabla_\nu e_j\rangle = \langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle\langle\nu,\bar\nabla_{e_j}\nu\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle\nabla_{e_i}e_i,e_j\rangle e_j\langle\nu,\nu\rangle\\ &= \frac{1}{2}\nabla_{e_i}e_i\langle\nu,\nu\rangle = \langle\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\nu,\nu\rangle.\end{aligned}$$

将以上这些计算综合起来, 最后得到体积第二变分公式

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(M,g_t) = \int_M -\langle\Delta\nu + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu) + \mathrm{I\!I}\circ\mathrm{I\!I}^T(\nu),\ \nu\rangle\Omega_0. \tag{3.61}$$

如果极小子流形体积的第二变分总是非负的, 则称它是稳定的极小子流形. 如果边界相同的子流形中 M 的体积最小, 则当然 M 是稳定的极小子流形.

例 3.5.6. *极小图像的稳定性.*

设 f 是定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数, f 的图像记为 M, 它是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面. 设 M 是极小超曲面, 则 f 满足方程 (3.58). 设 N 是 $D\times\mathbb{R}$ 中的另一超曲面, 且 $\partial N=\partial M$, 我们来说明必有 $\mathrm{Vol}(N)\geqslant\mathrm{Vol}(M)$.

事实上, 考虑 $D\times\mathbb{R}$ 中的向量场

$$\nu = (1+|\bar\nabla f|^2)^{-1/2}(\partial_1 f,\cdots,\partial_n f,-1),$$

ν 限制在 M 上是单位法向量场. 由 (3.58) 知 $\mathrm{div}\nu=0$. 记 Σ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中由 M 及 N 围成的区域, 则

$$0 = \int_\Sigma \mathrm{div}\nu\Omega_\Sigma = \int_{\partial\Sigma}\langle\nu,\vec n\rangle\Omega_{\partial\Sigma},$$

其中 $\vec n$ 为边界 $\partial\Sigma = M-N$ 的单位法向. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M) &= \int_M\langle\nu,\vec n\rangle\Omega_M = \int_N\langle\nu,\vec n\rangle\Omega_N\\ &\leqslant \int_N |\nu||n|\Omega_N = \mathrm{Vol}(N).\end{aligned}$$

这说明 M 体积最小. □

对于极小超曲面, 其体积第二变分公式可以化简. 假定 M 可定向, 取其单位法向量场 $\vec n$, 则变分场 ν 可以表示为 $\nu=\phi\vec n$, 其中 ϕ 是 M 上的函数, 且在边界 ∂M 上为零. 对于 M 的切向量场 X, 由

$$\langle\bar\nabla_X\vec n,\vec n\rangle = \frac{1}{2}X\langle\vec n,\vec n\rangle = 0$$

知 $\nabla_X \vec{n} = 0$. 因此

$$\Delta\nu = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}(\phi\vec{n}) - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}(\phi\vec{n}) = (\Delta\phi)\vec{n}.$$

其次,

$$\langle\overline{\mathrm{Ric}}(\nu), \nu\rangle = \phi^2\langle\bar{R}(e_i, \vec{n})e_i, \vec{n}\rangle = \phi^2\overline{\mathrm{Ric}}(\vec{n}, \vec{n}).$$

最后,

$$\langle \mathrm{I\!I} \circ \mathrm{I\!I}^T(\nu), \nu\rangle = \phi^2 \sum_{i,j} \mathrm{I\!I}^2_{\vec{n}}(e_i, e_j) = \phi^2|A|^2,$$

其中 $|A|^2 = \sum\limits_{i,j} \mathrm{I\!I}^2_{\vec{n}}(e_i, e_j)$, $|A|^2$ 也可表示为主曲率的平方和. 总之, 极小超曲面的体积第二变分公式成为

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(M, g_t) &= \int_M \left(-\phi\Delta\phi - \phi^2[\overline{\mathrm{Ric}}(\vec{n}, \vec{n}) + |A|^2]\right)\Omega \\ &= \int_M \left(|\nabla\phi|^2 - \phi^2[\overline{\mathrm{Ric}}(\vec{n}, \vec{n}) + |A|^2]\right)\Omega.\end{aligned}$$

因此, M 为稳定极小超曲面当且仅当对任何具有紧支集的光滑函数 ϕ, 下式成立:

$$\int_M \phi^2[\overline{\mathrm{Ric}}(\vec{n}, \vec{n}) + |A|^2]\Omega \leqslant \int_M |\nabla\phi|^2\Omega,$$

其中 Ω 为 M 的体积形式, $\overline{\mathrm{Ric}}$ 表示 $\bar{M}$ 的 Ricci 张量. 特别地, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小超曲面是稳定的当且仅当

$$\int_M \phi^2|A|^2\Omega \leqslant \int_M |\nabla\phi|^2\Omega.$$

我们知道, 极小图像是体积最小的, 因而也是稳定的. 有名的 Bernstein 定理告诉我们, 定义在整个平面上的极小图像必定是某个平面. 这个定理的自然推广是去研究一般维数的极小图像. 1965 年, de Giorgi 证明了 3 维的整体极小图像必定是线性的. 1966 年, Almgren 证明了 4 维的情形. Simons 在 1967 年解决了维数不超过 7 的情形. 不过, 当维数大于 7 时, Bombieri, de Giorgi 和 Giusti 在 1969 年找到了非线性的整体极小图像.

§3.5.4 黎曼淹没

设 $\pi: \bar{M} \to M$ 为光滑淹没. 令 $V_p = \mathrm{Ker}\pi_{*p}$, $\forall\, p \in \bar{M}$. $\{V_p\}$ 组成了 $T\bar{M}$ 的子从, 记为 V, 称为垂直子从. 设 $\bar{g}$, g 分别为 $\bar{M}$, M 上的黎曼度量, 记 $H_p = \perp V_p$ 为 V_p 的正交补, $\{H_p\}$ 组成的子从称为水平子从. 如果对所有的 p,

$$\pi_*\big|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}M$$

均为保持内积的等距同构, 则称 π 为黎曼淹没. 以下我们主要研究 $(\bar{M}, \bar{g})$ 和 (M, g) 的一些几何量之间的联系. 先看淹没的两条基本性质.

- 设 X 为 M 上的切向量场, 则存在惟一的 $\bar{M}$ 上的向量场 $\bar{X}$, 使得 $\bar{X} \in \Gamma(H)$, 且 $\pi_*(\bar{X}) = X$. $\bar{X}$ 称为 X 的水平提升. 惟一性是显然的, 下面考虑存在性.

  事实上, 根据淹没的局部表示, 在一定的局部坐标系中 π 可以写为

$$\pi(x^1, \cdots, x^{n+p}) = (x^1, \cdots, x^n),$$

  其中 $\dim \bar{M} = n + p$, $\dim M = n$. 我们仍然规定指标 i, j, k 等的取值范围从 1 到 n, 而 α, β, γ 等的取值范围为 $n+1$ 到 $n+p$. 在此局部坐标系中, 向量场 X 可表示为

$$X = a^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

  也可将它视为 $\bar{M}$ 上的局部向量场. 令

$$b^\alpha(x) = -\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}(X, \frac{\partial}{\partial x^\beta}),$$

  记 $\bar{X} = X + b^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, 则由 b^α 的定义可知

$$\bar{g}(\bar{X}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = 0, \quad \forall\ \beta.$$

  这说明 $\bar{X}$ 是水平向量场 (即 $\bar{X} \in \Gamma(H)$). 显然, $\pi_*(\bar{X}) = X$.

- 设 $\sigma\colon\ [a,b] \to M$ 为 (分段) 光滑曲线, 则任给 $p \in \pi^{-1}(\sigma(a))$, 存在惟一的 (分段) 光滑曲线 $\bar{\sigma}\colon\ [a,b] \to \bar{M}$, 使得

$$\bar{\sigma}(a) = p, \quad \dot{\bar{\sigma}} \in H_{\bar{\sigma}}, \quad \pi(\bar{\sigma}) = \sigma.$$

  $\bar{\sigma}$ 称为 σ 的水平提升.

  我们仍然在局部坐标中求解. 记 $\sigma(t) = (\sigma^1(t), \cdots, \sigma^n(t))$. 令

$$\bar{\sigma} = (\sigma^1(t), \cdots, \sigma^n(t), \tau^{n+1}(t), \cdots, \tau^{n+p}(t)),$$

  其中 τ^α 为待定函数. 此时

$$\dot{\bar{\sigma}}(t) = \dot{\sigma}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{\tau}^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

  条件 $\dot{\bar{\sigma}} \in H_{\bar{\sigma}}$ 等价于

$$\bar{g}(\dot{\sigma}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) + \dot{\tau}^\alpha(t)\bar{g}_{\alpha\beta} = 0, \quad \forall\ \beta.$$

  这是关于 $\dot{\tau}^\alpha(t)$ 的一阶线性常微分方程组, 在给定初值的情况下, 它的解是惟一存在的.

以下我们用记号 T, U, V 等表示垂直向量场, X, Y, Z 等表示水平向量场, $\bar{X}$ 等表示水平提升. $\bar{\nabla}$, ∇ 分别表示 $\bar{M}$, M 上的 Levi-Civita 联络.

引理 3.5.7. *设 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别为 X, Y 的水平提升, 则 $[\bar{X},\bar{Y}]_p^v$ 只依赖于 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 在 p 处的值. 这里, 上标 v 表示到 V_p 的正交垂直投影.*

证明. 任取垂直向量场 T, 则有

$$\begin{aligned}\langle[\bar{X},\bar{Y}],T\rangle &= \langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}-\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},T\rangle\\ &= \bar{X}\langle\bar{Y},T\rangle-\langle\bar{Y},\nabla_{\bar{X}}T\rangle-\bar{Y}\langle\bar{X},T\rangle+\langle\bar{X},\nabla_{\bar{Y}}T\rangle\\ &= \langle\bar{X},\nabla_{\bar{Y}}T\rangle-\langle\bar{Y},\nabla_{\bar{X}}T\rangle.\end{aligned}$$

由联络的性质即知引理的结论成立. □

注. 我们也可以通过说明 $[\bar{X},\bar{Y}]^v$ 关于 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 函数线性来证明引理.

引理 3.5.8. *设 V 为垂直向量场, $\bar{X}$ 为 X 的水平提升, 则 $[V,\bar{X}]$ 仍为垂直向量场.*

证明. 由命题 2.1.2 知,

$$\pi_*[V,\bar{X}]=[\pi_*V,\pi_*\bar{X}]=[0,X]=0,$$

因此 $[V,\bar{X}]$ 为垂直向量场. □

引理 3.5.9. *设 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别为 X, Y 的水平提升, 则*

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}=\overline{\nabla_X Y}+\frac{1}{2}[\bar{X},\bar{Y}]^v.$$

证明. 我们分别考虑 $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ 的垂直分量和水平分量. 首先, 由上述引理可知

$$\langle[\bar{X},\bar{Y}],\bar{Z}\rangle=\langle[X,Y],Z\rangle,\quad \langle[\bar{X},T],\bar{Y}\rangle=0,$$

其中 T 为垂直向量场. 由定理 3.2.4 的证明可知,

$$\begin{aligned}2\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},T\rangle &= \bar{X}\langle\bar{Y},T\rangle+\bar{Y}\langle\bar{X},T\rangle-T\langle\bar{X},\bar{Y}\rangle\\ &\quad+\langle[\bar{X},\bar{Y}],T\rangle-\langle[\bar{X},T],\bar{Y}\rangle-\langle[\bar{Y},T],\bar{X}\rangle.\end{aligned}$$

因为 T 为垂直向量场, 故 $T\langle\bar{X},\bar{Y}\rangle=T\langle X,Y\rangle=0$. 于是上式可写为

$$2\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},T\rangle=\langle[\bar{X},\bar{Y}],T\rangle,$$

这说明 $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ 的垂直分量为 $\frac{1}{2}[\bar{X},\bar{Y}]^v$.

另一方面,

$$\begin{aligned}2\langle\bar\nabla_{\bar X}\bar Y,\bar Z\rangle&=\bar X\langle\bar Y,\bar Z\rangle+\bar Y\langle\bar X,\bar Z\rangle-\bar Z\langle\bar X,\bar Y\rangle\\&\quad+\langle[\bar X,\bar Y],\bar Z\rangle-\langle[\bar X,\bar Z],\bar Y\rangle-\langle[\bar Y,\bar Z],\bar X\rangle\\&=2\langle\nabla_XY,Z\rangle=2\langle\overline{\nabla_XY},\bar Z\rangle,\end{aligned}$$

这说明 $\bar\nabla_{\bar X}\bar Y$ 的水平分量为 $\overline{\nabla_XY}$. □

注. 由此引理可知, 如果 σ 为 M 上的测地线, 则其水平提升 $\bar\sigma$ 也为 $\bar M$ 的测地线.

有了以上这些准备, 我们可以计算曲率了. 首先,

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla_{\bar X}\bar\nabla_{\bar Y}\bar Z,\bar W\rangle&=\bar X\langle\bar\nabla_{\bar Y}\bar Z,\bar W\rangle-\langle\bar\nabla_{\bar Y}\bar Z,\bar\nabla_{\bar X}\bar W\rangle\\&=X\langle\nabla_YZ,W\rangle-\langle\nabla_YZ,\nabla_XW\rangle-\frac14\langle[\bar Y,\bar Z]^v,[\bar X,\bar W]^v\rangle\\&=\langle\nabla_X\nabla_YZ,W\rangle-\frac14\langle[\bar Y,\bar Z]^v,[\bar X,\bar W]^v\rangle.\end{aligned}$$

其次, 当 T 为垂直向量场时,

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla_T\bar X,\bar Y\rangle&=\langle\bar\nabla_{\bar X}T,\bar Y\rangle+\langle[T,\bar X],\bar Y\rangle\\&=\bar X\langle T,\bar Y\rangle-\langle\bar\nabla_{\bar X}\bar Y,T\rangle\\&=-\frac12\langle[\bar X,\bar Y]^v,T\rangle.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\langle\bar\nabla_{[\bar X,\bar Y]}\bar Z,\bar W\rangle&=\langle\bar\nabla_{[\bar X,\bar Y]^h}\bar Z,\bar W\rangle+\langle\bar\nabla_{[\bar X,\bar Y]^v}\bar Z,\bar W\rangle\\&=\langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle-\frac12\langle[\bar Z,\bar W]^v,[\bar X,\bar Y]^v\rangle.\end{aligned}$$

其中, 上标 h 表示水平投影. 最后得到曲率等式

$$\begin{aligned}\bar R(\bar X,\bar Y,\bar Z,\bar W)&=R(X,Y,Z,W)+\frac14\langle[\bar X,\bar W]^v,[\bar Y,\bar Z]^v\rangle\\&\quad-\frac14\langle[\bar X,\bar Z]^v,[\bar Y,\bar W]^v\rangle-\frac12\langle[\bar X,\bar Y]^v,[\bar Z,\bar W]^v\rangle.\end{aligned}$$

特别地,

$$\bar R(\bar X,\bar Y,\bar X,\bar Y)=R(X,Y,X,Y)-\frac34|[\bar X,\bar Y]^v|^2.\tag{3.62}$$

上面两式称为 O'Neill 公式.

例 3.5.7. 复投影空间的度量.

考虑 $2n+1$ 维球面

$$S^{2n+1}=\{z=(z^1,\cdots,z^{n+1})\in\mathbb C^{n+1}\mid\sum_{i=1}^{n+1}|z^i|^2=1\},$$

记 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, 则 S^{2n+1} 上的黎曼度量为

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^{n+1}(dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i).$$

按照定义, 复投影空间 $\mathbb{C}P^n$ 为

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim,$$

其中 $z \sim w$ 当且仅当存在 $\lambda \in S^1$, 使得 $z = \lambda w$. 任给单位复数 $\mu \in S^1$, 映射

$$\varphi_\mu:\ S^{2n+1} \to S^{2n+1},\ \ \varphi_\mu(z) = \mu z$$

是等距同构, 因而在商空间 $\mathbb{C}P^n$ 上存在黎曼度量 g, 使得商投影

$$\pi:\ S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n,\ \ \pi(z) = [z]$$

为黎曼淹没.

任取 $z_0 \in S^{2n+1}$. 则经过 z_0 的纤维为 $\pi^{-1}([z_0]) = \{\lambda z_0 \,|\, \lambda \in S^1\}$. 我们来寻找纤维的切空间 (垂直空间). 为此, 定义线性同构 $J:\ T\mathbb{C}^{n+1} \to T\mathbb{C}^{n+1}$ 如下:

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i},\ \ J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

球面 S^{2n+1} 的位置向量记为 $\vec{z} = x^i\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$, 则

$$J\vec{z} = x^i\frac{\partial}{\partial y^i} - y^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

不难看出, $J\vec{z}$ 为纤维的单位切向量, 它张成了垂直空间.

设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 为水平向量场. 则

$$\begin{aligned}\langle\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, J\vec{z}\rangle &= -\langle\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}J\vec{z}\rangle \\ &= -\langle\bar{Y}, J\bar{X}\rangle = \langle\bar{X}, J\bar{Y}\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\langle[\bar{X}, \bar{Y}], J\vec{z}\rangle = 2\langle\bar{X}, J\bar{Y}\rangle.$$

由 $[\bar{X}, \bar{Y}]^v = \langle[\bar{X}, \bar{Y}], J\vec{z}\rangle J\vec{z}$ 以及 O'Neill 公式得

$$K_{\mathbb{C}P^n}(X, Y) = 1 + 3\langle\bar{X}, J\bar{Y}\rangle^2,$$

其中 X, Y 为 $\mathbb{C}P^n$ 上任意两个单位正交切向量. 这说明 $\mathbb{C}P^n$ 的截面曲率介于 1 和 4 之间. $\square$

习题 3.5

1. 将本节内容和古典微分几何课程中的内容对照, 看看有何不同.
2. 详细验证子流形上定义的算子 $\nabla_X Y$ 是 Levi-Civita 联络.
3. 如果 M, N 分别是 $\bar{M}$, $\bar{N}$ 的全测地子流形, 则 $M \times N$ 也是 $\bar{M} \times \bar{N}$ 的全测地子流形.
4. 用 Gauss 方程计算 $\mathbb{R}^{n+1}$ 半径为 c 的球面 $S^n(c)$ 的曲率.
5. 设 $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, c 为正则值. 计算水平集 $M = f^{-1}(c)$ 的平均曲率.
6. 设 $f : \bar{M} \to S^1$ 为光滑函数, c 为正则值. 研究子流形 $f^{-1}(c)$ 的曲率.
7. 设 M 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 3)$ 中的连通超曲面, 如果 M 的截面曲率为常数, 则要么 M 是某个超平面, 要么是某个 n 维球面.
8. 设 $f : (M, g) \to (N, h)$ 为黎曼流形之间的光滑映射. 令
$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}_g f^* h,$$
称为 f 的能量. 求能量泛函的变分, 并导出临界点方程 (满足临界点方程的映射称为调和映照).

§3.6 齐性空间

本节继续提供黎曼流形的若干自然的例子, 它们均与 Lie 群有关.

§3.6.1 Lie 群和不变度量

设 G 为光滑 Lie 群. 我们知道, Lie 群的左移变换和右移变换都是微分同胚. 如果左移均为黎曼度量的等距同构, 则称该度量是左不变的; 如果右移均为黎曼度量的等距同构, 则称该度量是右不变的. 当黎曼度量既是左不变, 又是右不变时, 称它是双不变度量.

命题 3.6.1. *Lie 群 G 上总存在左 (右) 不变的黎曼度量.*

证明. 在单位元 e 处的切空间 T_eG 上任取内积 $\langle , \rangle_e$. 通过左移将此内积移至任意切空间, 就得到了左不变的黎曼度量. 具体来说, 令
$$\langle X, Y\rangle_g = \langle (L_{g^{-1}})_* X, (L_{g^{-1}})_* Y\rangle_e, \quad \forall\ X, Y \in T_gG.$$
于是 $\langle , \rangle_g$ 为 T_gG 上的内积, 它光滑依赖于 g, 因此定义了 G 上的黎曼度量. 任给 $h \in G$, 则
$$\begin{aligned}\langle (L_h)_* X, (L_h)_* Y\rangle_g &= \langle (L_{g^{-1}})_*(L_h)_* X, (L_{g^{-1}})_*(L_h)_* Y\rangle \\ &= \langle (L_{g^{-1}h})_* X, (L_{g^{-1}h})_* Y\rangle_e = \langle X, Y\rangle_{h^{-1}g},\end{aligned}$$

这说明我们定义的黎曼度量是左不变的. 右不变的度量可通过右移类似构造. □

注. 设 $\{X_i\}$ 是 G 上一组左不变向量场组成的基, 它们的对偶基记为 $\{\omega^i\}$, 则 $\sum\limits_i \omega^i \otimes \omega^i$ 就是 G 上左不变的黎曼度量.

设 $g \in G$. 考虑共轭作用

$$R_{g^{-1}} \circ L_g:\ G \to G,\quad h \mapsto\ ghg^{-1},$$

这是群 G 的自同构, 它保持单位元不变, 故其切映射 Ad_g 为 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构. 显然, $Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} Ad_{g_2}$, 因此有群同态

$$Ad:\ G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),$$

它称为 Lie 群 G 的伴随表示.

命题 3.6.2. *Lie 群 G 上存在双不变度量当且仅当 T_eG 上存在内积, 使得 Ad_g 均保持此内积不变.*

证明. 设 $\langle,\rangle$ 为双不变度量. 则 $R_{g^{-1}} \circ L_g$ 均为等距同构, 从而在单位元处的切映射 Ad_g 保持 T_eG 上的内积 $\langle,\rangle_e$ 不变.

反之, 假设 T_eG 上的内积 $\langle,\rangle_e$ 在 Ad_g 下均保持不变. 将此内积左移为左不变度量 $\langle,\rangle$. 利用等式

$$L_h \circ (R_{g^{-1}} \circ L_g) = R_{g^{-1}} \circ L_h \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ L_{hg}$$

即知右移 $R_{g^{-1}}$ 也保持此度量不变, 因此 $\langle,\rangle$ 为双不变度量. □

因为 Ad 为 Lie 群之间的群同态, 因此它诱导了 Lie 代数之间的同态

$$ad = Ad_{*e}:\ \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g}).$$

通常记 $ad_X = ad(X) = Ad_{*e}(X)$, $\forall\ X \in \mathfrak{g}$.

例 3.6.1. 一般线性群的伴随表示.

考虑 Lie 群 $G = GL(n,\mathbb{R})$. 设 $C \in gl(n,\mathbb{R})$, 则

$$Ad_B(C) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(Be^{tC}B^{-1}) = BCB^{-1}.$$

因此, 当 $D \in gl(n,\mathbb{R})$ 时

$$ad_D(C) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e^{tD}Ce^{-tD}) = [D,C].$$

完全类似地, 对于一般的 Lie 群 G, 也有

$$ad_X(Y) = [X,Y],\quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.63}$$

设 $\langle , \rangle$ 为 G 上的左不变度量. 如果 X, Y 均为左不变向量场, 则 $\langle X, Y\rangle$ 为常数. 因此 Levi-Civita 联络 ∇ 满足等式

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle,$$

其中 X, Y, Z 均为左不变向量场. 上式可改写为

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\{[X,Y] - (ad_X)^*(Y) - (ad_Y)^*(X)\}, \tag{3.64}$$

其中 A^* 表示线性算子 A 的伴随算子.

如果 W 也是左不变向量场, 则由 $Y\langle \nabla_X Z, W\rangle = 0$ 可得

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, W\rangle = -\langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle,$$

因此有

$$R(X,Y,Z,W) = \langle \nabla_X W, \nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle + \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle. \tag{3.65}$$

特别地, 利用 (3.64) 得

$$\begin{aligned} R(X,Y,X,Y) = {} & |(ad_X)^*(Y) + (ad_Y)^*(X)|^2 - \langle (ad_X)^*(X), (ad_Y)^*(Y)\rangle \\ & -\frac{3}{4}|[X,Y]|^2 - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y], X\rangle + \frac{1}{2}\langle [[X,Y],X], Y\rangle. \end{aligned} \tag{3.66}$$

如果 $\langle , \rangle$ 是双不变度量, 则 $(ad_X)^* = -ad_X$, 因此 (3.64) 可简化为

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]. \tag{3.67}$$

特别地, $\nabla_X X = 0$, 这说明左不变向量场的流线为测地线. 此时曲率张量可写为

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\langle [X,W],[Y,Z]\rangle - \frac{1}{4}\langle [X,Z],[Y,W]\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Z], W\rangle.$$

利用 Jacobi 恒等式, 得

$$\langle [[X,Y],Z], W\rangle = \langle [X,[Y,Z]], W\rangle + \langle [Y,[Z,X]], W\rangle,$$

再利用 $(ad_X)^* = -ad_X$ 得

$$\langle [[X,Y],Z], W\rangle = -\langle [Y,Z],[X,W]\rangle - \langle [Z,X],[Y,W]\rangle.$$

代入曲率张量的方程, 最后有

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\langle [X,Z],[Y,W]\rangle - \frac{1}{4}\langle [X,W],[Y,Z]\rangle. \tag{3.68}$$

特别地,

$$R(X,Y,X,Y) = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2, \tag{3.69}$$

因此双不变度量的截面曲率都是非负的.

下面我们研究双不变度量的存在性.

命题 3.6.3. *在紧致李群 G 上总存在双不变度量.*

证明. 在 G 上取一个右不变的体积形式 ω, 比如 ω 可取为某右不变度量的体积形式. 再任取 T_eG 上的内积 $\langle,\rangle_e$, 定义一个新内积 $\langle,\rangle$ 如下:

$$\langle X,Y\rangle=\int_G\langle Ad_g(X),Ad_g(Y)\rangle_e\omega(g).$$

任给 $h\in G$, 有

$$\langle Ad_h(X),Ad_h(Y)\rangle=\int_G\langle Ad_{gh}(X),Ad_{gh}(Y)\rangle_e\omega(g).$$

因为右移是保持 ω 不变的微分同胚, 故

$$\begin{aligned}\int_G\langle Ad_{gh}(X),Ad_{gh}(Y)\rangle_e\omega(g)&=\int_G\langle Ad_{gh}(X),Ad_{gh}(Y)\rangle_e(R_{h^{-1}})^*\omega(g)\\&=\int_G\langle Ad_{gh}(X),Ad_{gh}(Y)\rangle_e\omega(gh)\\&=\int_G\langle Ad_k(X),Ad_k(Y)\rangle_e\omega(k),\end{aligned}$$

这说明 $\langle Ad_h(X),Ad_h(Y)\rangle=\langle X,Y\rangle$, 因此内积 $\langle,\rangle$ 诱导的黎曼度量是 G 上的双不变度量. □

例 3.6.2. *双曲空间的 Lie 群模型.*

考虑二维 Lie 群

$$G=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\0&1\end{pmatrix}\Big|\,x>0,\ y\in\mathbb{R}\right\}.$$

G 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\Big|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

取其基为

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

则

$$[X,Y]=XY-YX=Y.$$

在 G 上定义左不变度量, 使得 $\{X,Y\}$ 为标准正交基, 则 Levi-Civita 联络满足

$$\nabla_XX=\nabla_XY=0,\quad\nabla_YX=-Y,\quad\nabla_YY=X.$$

曲率算子计算为

$$R(X,Y)X=\nabla_Y\nabla_XX-\nabla_X\nabla_YX+\nabla_{[X,Y]}X=\nabla_YX=-Y,$$

这说明 G 的截面曲率恒为 -1. □

例 3.6.3. $SO(3)$ 与坍缩度量.

我们知道, $SO(3)$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{so}(3) = \{A \in gl(3) \,|\, A + A^T = 0\}$. 在 Lie 代数中可取一组基 X_1, X_2, X_3 使得

$$[X_1, X_2] = 2X_3,\ \ [X_2, X_3] = 2X_1,\ \ [X_3, X_1] = 2X_2.$$

取 $0 < \varepsilon \leqslant 1$. 在 $SO(3)$ 上定义左不变度量 g_ε, 使得 $\{\varepsilon^{-1}X_1, X_2, X_3\}$ 为标准正交基. 计算出 Levi-Civita 联络满足

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_1}X_1 = 0,\ \ \nabla_{X_1}X_2 = (2-\varepsilon^2)X_3,\ \ \nabla_{X_1}X_3 = (\varepsilon^2-2)X_2,\\
&\nabla_{X_2}X_1 = -\varepsilon^2 X_3,\ \ \nabla_{X_2}X_2 = 0,\ \ \nabla_{X_2}X_3 = X_1,\\
&\nabla_{X_3}X_1 = \varepsilon^2 X_2,\ \ \nabla_{X_3}X_2 = -X_1,\ \ \nabla_{X_1}X_3 = (\varepsilon^2-2)X_2.
\end{aligned}$$

曲率算子计算为

$$\begin{aligned}
&R(X_1, X_2)X_1 = \varepsilon^4 X_2,\ \ R(X_1, X_2)X_2 = -\varepsilon^2 X_1,\ \ R(X_1X_2)X_3 = 0;\\
&R(X_2, X_3)X_1 = 0,\ \ R(X_2, X_3)X_2 = (4-3\varepsilon^2)X_3,\ \ R(X_2X_3)X_3 = (3\varepsilon^2-4)X_2;\\
&R(X_3, X_1)X_1 = -\varepsilon^4 X_3,\ \ R(X_3, X_1)X_2 = 0,\ \ R(X_3X_1)X_3 = \varepsilon^2 X_1.
\end{aligned}$$

由此可见, g_ε 的截面曲率介于 ε^2 与 $4-3\varepsilon^2$ 之间. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $(SO(3), g_\varepsilon)$ 的体积趋于零. 这一列度量称为 $SO(3)$ 上的坍缩度量. □

§3.6.2 齐性空间

设 G 为连通 Lie 群, H 为其闭子群. H 在 G 中的左陪集的全体记为 G/H, 定义投影

$$\pi:\ G \to G/H,\ \ \pi(g) = [gH].$$

我们在 G/H 上定义商拓扑, 即 U 为 G/H 中的开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 为 G 中的开集. 在此拓扑下 π 为开映射.

G/H 称为**齐性空间**. 在商拓扑下, G/H 是 Hausdorff 空间. 事实上, 设 $[\sigma H] \neq [\tau H]$, 则 $\tau^{-1}\sigma \notin H$. 因为 H 为闭子群, 且群的运算是连续的, 故存在 σ 的开邻域 V 和 τ 的开邻域 W, 使得

$$\tau'^{-1}\sigma' \notin H,\ \ \forall\ \sigma' \in V,\ \tau' \in W.$$

这说明 $\pi(V)$, $\pi(W)$ 分别是 $[\sigma H]$, $[\tau H]$ 的不交开邻域.

因为 Lie 群 G 是 A_2 空间, 故 G/H 也是 A_2 空间. 利用闭子群的结构, 可以进一步说明 G/H 上存在惟一的微分结构, 使得 G/H 为光滑流形, 且 π 为光滑淹没; 当 H 为正规子群时, G/H 仍为 Lie 群.

G 上的左移 L_g 也可定义在 G/H 上: $L_g[\sigma H]=[g\sigma H]$. 左移 L_g 常简记为 g. 因此我们就得到了 Lie 群 G 在齐性空间 G/H 上的作用

$$G\times G/H\to G/H,\quad (g,[\sigma H])\mapsto g[\sigma H]=[g\sigma H].$$

因为 $g'g^{-1}[gH]=[g'H]$, 故这个作用是可迁的. 这是为什么将 G/H 称为齐性空间的原因.

一般地，如果 M 为黎曼流形, 其等距变换群 $I(M)$ 作用于自身. 如果此作用是可迁的, 则

$$M=I(M)/\hat{H},$$

其中 $\hat{H}$ 为某一固定点的迷向子群.

例 3.6.4. *球面与正交群.*

设 $O(n)$ 为 $n\times n$ 实正交矩阵组成的正交变换群. $O(n)$ 自然地作用于 $\mathbb{R}^n$, 并且保持标准内积不变, 从而保持向量的长度不变. 特别地, 我们就得到 $O(n)$ 在单位球面 S^{n-1} 上的作用:

$$O(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1},\quad (A,v)\mapsto Av,$$

其中 $v\in S^{n-1}$ 看成单位长度的列向量. 这个作用是可迁的: 任给 $v_1\in S^{n-1}$, 将 $\{v_1\}$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 这 n 个列向量排成的 n 阶方阵记为 A, 这是正交矩阵, 且

$$Ae_1=v_1,\quad e_1=(1,0,\cdots,0)^T.$$

由此易见, 任给 $v,w\in S^{n-1}$, 均存在正交矩阵 $B\in O(n)$, 使得 $Bv=w$.

考虑 $e_n=(0,0,\cdots,0,1)^T\in S^{n-1}$. 如果 $A\in O(n)$ 保持 e_n 不动, 则 A 必定形如

$$A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $B\in O(n-1)$. 这说明 e_n 处的迷向子群为 $O(n-1)$. 因此, S^{n-1} 可自然等同于齐性空间 $O(n)/O(n-1)$.

同理可以说明 S^{n-1} 可自然等同于 $SO(n)/SO(n-1)$. □

例 3.6.5. *复投影空间是齐性空间.*

设 $SU(n)$ 为 n 阶特殊酉阵组成的特殊酉阵群. 由于特殊酉变换保持 $\mathbb{C}^n$ 中向量的长度, 我们可以得到 $SU(n)$ 在 S^{2n-1} 上的一个自然作用, 这个作用在 e_n 处的迷向子群为 $SU(n-1)$. 同上例类似, S^{2n-1} 可自然等同于齐性空间 $SU(n)/SU(n-1)$.

我们知道, $\mathbb{C}P^{n-1}$ 可以看成 S^{2n-1} 之商. 上述特殊酉群的作用保持等价关系不变, 因此 $SU(n)$ 也可自然作用于 $\mathbb{C}P^{n-1}$, 这也是一个可迁作用.

设 $e_n=(0,0,\cdots,0,1)^T$, 我们来求 $[e_n]$ 处的迷向子群. 设 $A\in SU(n)$, 则 $A[e_n]=[e_n]$ 当且仅当 A 形如

$$A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 1/(\det B)\end{pmatrix},$$

其中 $B\in U(n-1)$. 这说明 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 可自然等同于齐性空间 $SU(n)/U(n-1)$. □

例 3.6.6. 作为齐性流形的双曲空间.

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中考虑 2 阶协变张量场

$$g_{n,1}=\sum_{i=1}^{n}dx^i\otimes dx^i-dx^{n+1}\otimes dx^{n+1},$$

它限制在超曲面

$$H^n(1)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2-(x^{n+1})^2=-1,\ x^{n+1}>0\}$$

上得到一个正定的黎曼度量 g_{-1}. 可以计算出 $(H^n(1),g_{-1})$ 的截面曲率恒为 -1.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中保持 $g_{n,1}$ 不变的线性变换的全体组成了所谓的 Lorentz 群 $O(n+1,1)$, 用矩阵来表示就是

$$O(n+1,1)=\{A\in GL(n+1,\mathbb{R})\mid A^TKA=K\},$$

其中 K 为如下 $n+1$ 阶方阵

$$K=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

设 $A=(a_{ij})\in O(n+1,1)$. 由 $A^TKA=K$ 知 $(\det A)^2=1$, 从而 $\det A=\pm1$. 此外还有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i\,n+1})^2-(a_{n+1\,n+1})^2=-1,$$

这说明 $a_{n+1\,n+1}\geqslant 1$ 或 $a_{n+1,n+1}\leqslant -1$. 利用这些事实可以说明 $O(n+1,1)$ 有 4 个连通分支, 其中包含单位元的连通分支为

$$G=\{A\in O(n+1,1)\mid \det A=1,\ a_{n+1\,n+1}\geqslant 1\}.$$

G 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的自然作用保持 $H^n(1)$ 不变, 因此可视为作用在 $H^n(1)$ 上. 这是一个可迁的作用. 如果 $A\in G$ 保持 $e_{n+1}\in H^n(1)$ 不变, 则 A 形如

$$A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $B\in SO(n)$. 这说明 $H^n(1)$ 可自然等同于齐性空间 $G/SO(n)$. □

下面我们讨论 G/H 上的黎曼度量, 使得 G 的作用均为等距, 这样的度量称为 G- 不变度量, 或简称不变度量. 需要注意的是, 一般来说此时 G 不等于 $I(G/H)$.

并非所有的齐性空间上均存在不变度量. 记 $\mathfrak{h}$ 为 H 的 Lie 代数, 则 $T_{[H]}G/H$ 可等同于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 不变度量在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上定义了内积 $\langle,\rangle$. 我们来说明, 此内积在 Ad_H 下不变. 事实上, 任给 $h\in H$, $X\in\mathfrak{g}$,

$$he^{tX}H=he^{tX}h^{-1}H.$$

由于 Ad_h 以及 $ad_{\mathfrak{h}}$ 保持 $\mathfrak{h}$ 不变, 故它们可自然作用于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 在上式中关于 t 求导, 得

$$(L_h)_*(X)=\pi(Ad_h(X)),$$

其中 $\pi:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为商投影. 当 L_h 为等距同构时, 上式表明 Ad_h 保持内积 $\langle,\rangle$ 不变.

当 G 有效且等距作用于 G/H 时, G 可视为 $I(G/H)$ 的子群. 此时, H 为 $\hat{H}$ 的子群, $\hat{H}$ 为正交群的闭子群, 因而是紧致的. 利用这一点, 我们可以在 G 上构造左不变度量, 使得该度量在 H 的右作用下不变. 这个度量限制在 H 上是双不变的. $\mathfrak{h}$ 的正交补记为 $\mathfrak{p}$, 则

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p},$$

$\mathfrak{p}$ 上的内积由 G/H 上的黎曼度量给出. 这说明, $\pi:\ G\to G/H$ 为黎曼淹没, 而上式就是切空间的垂直和水平分解.

利用黎曼淹没的 O'Neill 公式以及前一小节 Lie 群左不变度量的曲率公式, 得到 G/H 的如下曲率公式

$$\begin{aligned}R(X,Y,X,Y)=&\,|(ad_X)^*(Y)+(ad_Y)^*(X)|^2-\langle(ad_X)^*(X),(ad_Y)^*(Y)\rangle\\&-\frac{3}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{p}}|^2-\frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle+\frac{1}{2}\langle[[X,Y],X],Y\rangle.\end{aligned}\tag{3.70}$$

其中 $X,Y\in\mathfrak{p}$, 我们将 X 与 $\pi_*(X)$ 等同.

如果 G 上的度量还是双不变的, 由前一小节的计算公式可得

$$R(X,Y,X,Y)=\frac{1}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{h}}|^2+|[X,Y]_{\mathfrak{p}}|^2,\tag{3.71}$$

特别地, 此时截面是非负的.

当 G 上的度量为双不变度量时, 称 G/H 为正规齐性空间. 正规齐性空间提供了非负曲率流形的许多自然的例子.

§3.6.3 对称空间

设 (M,g) 为黎曼流形, 如果任给 $m \in M$, 均存在 m 的某个开邻域中的等距同构 I_m, 使得 m 是该邻域中惟一的不动点, 且 $I_m \circ I_m = id$ 为恒同映射, 则称 (M,g) 为**局部对称空间**. 如果 I_m 均可延拓为 M 上的整体等距同构, 则称 (M,g) 为**对称空间**.

例 3.6.7. *$\mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{H}^n$ 均为对称空间.*

对于 $\mathbb{R}^n$, 考虑关于原点的反射 $I: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I(x) = -x$, 则 I 为等距同构, 且 $I^2 = id$. 原点是惟一的不动点. 由于 $(\mathbb{R}^n, g_0)$ 的等距同构群可迁地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上, 故 $\mathbb{R}^n$ 关于每一点都是对称的.

对于 S^n, 任取 $x_0 \in S^n$, 考虑映射

$$I_{x_0}: S^n \to S^n, \quad I_{x_0}(x) = -x + 2\langle x, x_0\rangle x_0,$$

则 I_{x_0} 为等距同构, 它有两个不动点 x_0, $-x_0$, 且 $I_{x_0}^2 = \mathrm{id}$.

对于 $\mathbb{H}^n$, 考虑 Poincaré 圆盘模型, 则关于原点的反射是等距同构, 它以原点为惟一的不动点. 与 $\mathbb{R}^n$ 类似, 由于 $\mathbb{H}^n$ 的等距同构群可迁地作用于自身, 故 $\mathbb{H}^n$ 关于任意一点都是对称的. □

下面我们研究 (局部) 对称空间的性质.

命题 3.6.4. *设 I_m 是以 m 为孤立不动点的 (局部) 等距同构, 如果 $I_m^2 = id$, 则 $(I_m)_{*m} = -id$.*

证明. 由 $I_m^2 = id$ 知 $(I_m)_{*m}^2 = id$. 因此, 线性映射 I_{*m} 的特征值为 1 或 -1. 我们来说明 1 不是特征值. 不然的话, 存在非零切向量 $v \in T_mM$, 使得 $(I_m)_{*m}(v) = v$. 因为 I_m 为等距同构, 因此这说明 I_m 保持从 m 出发, 以 v 为初始切向量的测地线不变. 这与 m 为孤立不动点相矛盾.

任给 $w \in T_mM$, 由于 $(I_m)_{*m}[w + (I_m)_{*m}w] = w + (I_m)_{*m}w$, 根据刚才的讨论即知

$$w + (I_m)_{*m}w = 0.$$

即 $(I_m)_{*m} = -id$. □

从命题的证明可以看到, I_m 将经过 m 的测地线反向, 即

$$I_m(\exp(tw)) = \exp(-tw).$$

如果在以 m 为中心的正规坐标 $\{x^i\}$ 中考虑, 则 I_m 可表示为

$$I_m(x^1, \cdots, x^n) = -(x^1, \cdots, x^n),$$

即 I_m 如同 $\mathbb{R}^n$ 中围绕原点的反射一样.

命题 3.6.5. (M, g) 为局部对称空间当且仅当其曲率张量是平行的, 即 $\nabla R = 0$.

证明. (必要性) 任给 $m \in M$, 因为 I_m 是保持 m 不动的等距同构, 故在 m 处成立 $(I_m)^*(\nabla R) = \nabla R$. 即

$$\begin{aligned}(\nabla R)(X,Y,Z,W,V) &= (\nabla R)((I_m)_{*m}X,(I_m)_{*m}Y,(I_m)_{*m}Z,(I_m)_{*m}W,(I_m)_{*m}V)\\ &= (\nabla R)(-X,-Y,-Z,-W,-V)\\ &= -(\nabla R)(X,Y,Z,W,V),\end{aligned}$$

这说明在 m 处成立 $\nabla R = 0$.

(充分性) 任给 $m \in M$, 在以 m 为中心的正规坐标邻域中考虑反射

$$I_m(x^1,\cdots,x^n) = -(x^1,\cdots,x^n),$$

我们只要证明 I_m 为 (局部) 等距同构即可.

先作一些准备工作. 记 $r = \sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$, 则 r 是到 m 的距离函数, 根据 Gauss 引理, 可记

$$\partial_r = \mathrm{grad} r = \frac{x^i}{r}\partial_i.$$

距离函数 r 的水平集为测地球面, 其单位法向量就是 ∂_r. 记 II_{∂_r} 为测地球面沿该法向的第二基本形式. 设 X, Y 是与测地球面相切的切向量场, 则

$$\begin{aligned}(L_{\partial_r}g)(X,Y) &= \partial_r(g(X,Y)) - g([\partial_r,X],Y) - g(X,[\partial_r,Y])\\ &= g(\nabla_{\partial_r}X,Y) + g(X,\nabla_{\partial_r}Y) - g([\partial_r,X],Y) - g(X,[\partial_r,Y])\\ &= g(\nabla_X\partial_r,Y) + g(X,\nabla_Y\partial_r)\\ &= -2\mathrm{II}_{\partial_r}(X,Y),\end{aligned}$$

即

$$L_{\partial_r}g = -2\mathrm{II}_{\partial_r}. \tag{3.72}$$

令 $\mathrm{II}^2_{\partial_r}(X,Y) = g(\nabla_X\partial_r,\nabla_Y\partial_r)$, 利用 $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$ 我们进一步计算如下:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\partial_r}\mathrm{II}_{\partial_r})(X,Y) &= \partial_r(\mathrm{II}_{\partial_r}(X,Y)) - \mathrm{II}_{\partial_r}(\nabla_{\partial_r}X,Y) - \mathrm{II}_{\partial_r}(X,\nabla_{\partial_r}Y)\\ &= -\partial_r g(\nabla_X\partial_r,Y) + g(\nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r,Y) + g(\nabla_X\partial_r,\nabla_{\partial_r}Y)\\ &= -g(\nabla_{\partial_r}\nabla_X\partial_r,Y) + g(\nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r,Y)\\ &= -g(\nabla_{\partial_r}\nabla_X\partial_r,Y) + g(\nabla_{[\partial_r,X]}\partial_r,Y) + g(\nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r,Y)\\ &= g(R(\partial_r,X)\partial_r,Y) + g(\nabla_Y\partial_r,\nabla_X\partial_r)\\ &= R(\partial_r,X,\partial_r,Y) + \mathrm{II}^2_{\partial_r}(X,Y),\end{aligned}$$

即

$$\nabla_{\partial_r}\mathrm{II}_{\partial_r} = R(\partial_r,\cdot,\partial_r,\cdot) + \mathrm{II}^2_{\partial_r}. \tag{3.73}$$

同样的计算可以给出

$$L_{\partial_r}\mathrm{II}_{\partial_r} = R(\partial_r,\cdot,\partial_r,\cdot) - \mathrm{II}^2_{\partial_r}. \tag{3.74}$$

记 $\bar{g} = (I_m)^*g$, 相应的曲率张量记为 $\bar{R} = (I_m)^*R$. 由 $\nabla R = 0$ 知, 如果 X, Y 是沿着经过 m 的测地线平行的向量场, 则 $R(\partial_r, X, \partial_r, Y)$ 沿测地线不变. 特别地, 对任意与测地球面相切的切向量场 X, Y, 均有

$$\bar{R}(\partial_r, X, \partial_r, Y) = R(\partial_r, X, \partial_r, Y).$$

此外, 由

$$\nabla_X\partial_r = \nabla_X(\frac{x^i}{r}\partial_i) = \frac{1}{r}X + \frac{x^i}{r}\nabla_X\partial_i$$

可知, 在 m 附近成立

$$\mathrm{II}_{\partial_r} = -\frac{1}{r}g + O(r).$$

在度量 $\bar{g}$ 下, 测地球面的第二基本形式记为 $\bar{\mathrm{II}}_{\partial_r}$, 则它也满足上式以及方程 (3.73), (3.74). 由常微分方程解的惟一知 $\bar{\mathrm{II}}_{\partial_r} = \mathrm{II}_{\partial_r}$. 于是, 由 (3.72) 知

$$L_{\partial_r}(\bar{g} - g) = 0,$$

这说明 $\bar{g} - g$ 沿经过 m 的测地线不变. 由于 $\bar{g} - g$ 在 m 处为零, 故 $\bar{g} = g$. 这就证明了 I_m 为等距同构. □

注. (3.73) 式常称为黎曼流形上的 Riccati 方程, 这是微分几何中很有用的工具.

下面我们讨论对称空间. 设 (M, g) 为对称空间, 如果 $\gamma: [a, b] \to M$ 为测地线, 则 $I_{\gamma(b)} \circ \sigma$ 也是测地线, 它们连接起来以后也还是测地线. 这说明 M 上的测地线均可无限延长, 由 Hopf-Rinow 定理 (见 [4]) 可知 M 上任意两点均 p, q 可用最短测地线 γ_{pq} 连接, 取 γ_{pq} 的中点 m, 则 $I_m(p) = q$. 这说明等距同构群 $I(M)$ 在 M 上的作用是可迁的. 因此, M 是齐性空间.

设 M 为连通对称空间. 记 $M = G/H$, 其中 $G = I(M)$, $H = G_m$ 为 m 处的迷向子群. 定义

$$\sigma: G \to G, \quad \sigma(g) = I_m \circ g \circ I_m,$$

则 σ 为 G 的自同构, 且 $\sigma^2 = id$. 记 $K = \{g \in G \,|\, \sigma(g) = g\}$, 则 K 为 G 的闭子群. 当 $h \in H$ 时, $h(m) = m$, 因此 $\sigma(h)(m) = m$, 且

$$\sigma(h)_{*m} = (I_m)_{*m} \circ h_{*m} \circ (I_m)_{*m} = h_{*m}.$$

由 M 连通可知 $\sigma(h)=h$. 这说明 $H\subset K$.

记 K (H) 的含有单位元的连通分支为 K_0 (H_0), 根据以上论述可知 $H_0\subset K_0$. 我们来说明 $K_0\subset H$, 从而 $K_0=H_0$. 设 $k\in K$, 则 $k(m)=I_m\circ k(m)$. 因为 m 为 I_m 的孤立不动点, 故存在 G 的含单位元的开邻域 U, 使得当 $k\in K\cap U$ 时 $k(m)=m$, 即 $K\cap U\subset H$. 因为 K_0 可由 $K\cap U$ 生成, 故 $K_0\subset H$.

反之, 设 $\sigma:\ G\to G$ 为 Lie 群 G 的一个自同构, $\sigma^2=id$. σ 的不动点全体仍记为 K. 由

$$\sigma(gk)=\sigma(g)\sigma(k)=\sigma(g)k$$

可知 σ 诱导了 G/K 上的微分同胚. 如果这个微分同胚保持 G/K 上的 G- 不变度量 $\langle,\rangle$, 则 $(G/K,\langle,\rangle)$ 为对称空间, 它在 $[K]$ 处的反射等距同构由 σ 给出.

如果记 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 注意到 σ_{*e} 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 且 $\sigma_{*e}^2=id$. K 的 Lie 代数为 $\mathfrak{k}$, 则

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\sigma_{*e}(X)=X\}.$$

定义

$$\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\sigma_{*e}(X)=-X\},$$

则由 $\sigma_{*e}^2=id$ 易见 $\mathfrak{g}$ 有线性空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{k}, \tag{3.75}$$

并且关于 Lie 代数运算满足

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\quad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k},\quad [\mathfrak{k},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}.$$

例如, 当 X_1, $X_2\in\mathfrak{m}$ 时, 由

$$\sigma_{*e}[X_1,X_2]=[\sigma_{*e}(X_1),\sigma_{*e}(X_2)]=[-X_1,-X_2]=[X_1,X_2]$$

知 $[X_1,X_2]\in\mathfrak{k}$.

利用这些分解, 我们来计算 $M=G/K$ 的曲率张量. 当 X, Y, Z, $W\in\mathfrak{m}$ 时, 由 $[X,Z]\in\mathfrak{k}$, 故

$$\langle(ad_X)^*(Y),Z\rangle=\langle Y,[X,Z]\rangle=0,$$

这说明 $(ad_X)^*(Y)\in\mathfrak{k}$. 另一方面, 当 $T\in\mathfrak{k}$ 时, 因为 K 在 G 上的右作用为等距, 因此

$$\langle[T,X],Y\rangle+\langle X,[T,Y]\rangle=\langle ad_T(X),Y\rangle+\langle X,ad_T(Y)\rangle=0,$$

即

$$\langle T,(ad_X)^*Y\rangle+\langle T,(ad_Y)^*(X)\rangle=0,$$

这表明 $(ad_X)^*(Y)+(ad_Y)^*(X)=0$. 由 (3.64) 即知

$$\bar{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}[X,Y],$$

其中 $\bar{\nabla}$ 为 G 的联络. 此外, 再利用 $[X,Y]\in\mathfrak{k}$ 以及 Levi-Civita 联络的表示可得

$$\begin{aligned}2\langle\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z,W\rangle&=\langle[[X,Y],Z],W\rangle-\langle Z,[[X,Y],W]-\langle[X,Y],[Z,W]\rangle\\&=2\langle[[X,Y],Z],W\rangle-\langle[X,Y],[Z,W]\rangle.\end{aligned}$$

由 (3.65) 可得

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,Z,W)=&\frac{1}{4}\langle[X,W],[Y,Z]\rangle-\frac{1}{4}\langle[X,Z],[Y,W]\rangle\\&-\frac{1}{2}\langle[X,Y],[Z,W]\rangle+\langle[[X,Y],Z],W\rangle.\end{aligned}$$

根据 O'Neill 公式, M 的曲率张量 R 满足等式

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,Z,W)=&R(X,Y,Z,W)+\frac{1}{4}\langle[X,W],[Y,Z]\rangle\\&-\frac{1}{4}\langle[X,Z],[Y,W]\rangle-\frac{1}{2}\langle[X,Y],[Z,W]\rangle,\end{aligned}$$

这说明

$$R(X,Y,Z,W)=\langle[[X,Y],Z],W\rangle,\quad R(X,Y)Z=[[X,Y],Z].\tag{3.76}$$

例 3.6.8. 复投影空间是对称空间.

考虑 Lie 群 $G=SU(n+1)$. 它的一个自同构定义为

$$\sigma:\ SU(n+1)\to SU(n+1),\quad A\mapsto\begin{pmatrix}I_n&0\\0&-1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}I_n&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$SU(n+1)$ 关于 σ 的不动点子群为

$$K=\left\{\begin{pmatrix}B&0\\0&1/(\det B)\end{pmatrix}\,\middle|\,B\in U(n)\right\}.$$

$SU(n+1)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{su}(n+1)$ 在 σ 作用下的分解为

$$\mathfrak{su}(n+1)=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{k},$$

其中,

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix}0&-z^*\\z&0\end{pmatrix}\,\middle|\,z\in\mathbb{C}^n\right\},\quad\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix}B&0\\0&-\mathrm{tr}B\end{pmatrix}\,\middle|\,B\in\mathfrak{u}(n)\right\}.$$

在 $\mathfrak{su}(n+1)$ 中考虑内积 $\langle A_1,A_2\rangle=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1A_2)$, 它决定了 $SU(n+1)$ 上的双不变度量, 使得 $\mathbb{C}P^n=SU(n+1)/U(n)=G/K$ 成为对称空间.

下面我们计算曲率. 首先有

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -w^* \\ w & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -w^* \\ w & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -w^* \\ w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w^*z - z^*w & 0 \\ 0 & wz^* - zw^* \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其次

$$
\begin{aligned}
&\left[\left[\begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -w^* \\ w & 0 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & z^*(wz^* - zw^*) - (w^*z - z^*w)z^* \\ (wz^* - zw^*)z - z(w^*z - z^*w) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

为了方便起见, 我们将 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 等同, 其内积由 $\langle z, w\rangle = \frac{1}{2}(zw^* + wz^*)$ 给出. 由 (3.76) 式得

$$R(z, w)z = (wz^* - zw^*)z - z(w^*z - z^*w).$$

当 z, w 为单位正交向量时,

$$R(z, w)z = 3wz^*z + w,$$

因此

$$R(z, w, z, w) = \langle R(z, w)z, w\rangle = 1 - 3(zw^*)^2,$$

由此得到 $\mathbb{C}P^n$ 的截面曲率介于 1 到 4 之间. □

例 3.6.9. *Grassmann 流形.*

考虑 Lie 群 $G = SO(k+l)$, 它的一个自同构定义为

$$\sigma:\ SO(k+l) \to SO(k+l),\quad A \mapsto \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix},$$

$SO(k+l)$ 关于 σ 的不动点子群为

$$K = \left\{\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, B_1 \in O(k),\ B_2 \in O(l),\ \det B_1 = \det B_2.\right\}.$$

K 的含单位元的连通分支 $K_0 = SO(k) \times SO(l)$.

齐性流形 $SO(k+l)/SO(k) \times SO(l)$ 可以看成 $\mathbb{R}^{k+l}$ 中定向 k 维子向量空间的全体, 称为 Grassmann 流形, 记为 $\tilde{G}r_k(\mathbb{R}^{k+l})$. 当 $k = 1$ 时它就是球面 S^l.

$SO(k+l)$ 的 Lie 代数在 σ 作用下的分解为

$$\mathfrak{so}(k+l) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(l),$$

其中

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \Big| B \in M_{k\times l} \right\}.$$

在 $\mathfrak{so}(k+l)$ 考虑内积 $\langle A_1, A_2\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1A_2)$, 它决定了 $SO(k+l)$ 上的双不变度量, 使得 $SO(k+l)/SO(k)\times SO(l)$ 成为对称空间.

根据 (3.71) 可知, 当 $X, Y \in \mathfrak{m}$ 时, $R(X,Y,X,Y) = |[X,Y]|^2$. 如果我们将 $\mathfrak{m}$ 与 $M_{k\times l}$ 等同, 则由

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} BA^T - AB^T & 0 \\ 0 & B^TA - A^TB \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

得

$$R(A,B,A,B) = \frac{1}{2}[|BA^T - AB^T|^2 + |B^TA - A^TB|^2].$$

当 $k=1$ 或 $l=1$ 时, 从上式容易算出截面曲率恒为 1, 这也就是单位球面的截面曲率. □

上面的这些例子可以推广. 一般地, 考虑 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 定义双线性型如下

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(ad_X ad_Y), \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

显然, B 为对称双线性形, 称为 Killing 形式. 当 X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$ 时

$$\begin{aligned}
B([X,Y],Z) &= \mathrm{tr}[(ad_X ad_Y - ad_Y ad_X)ad_Z] = \mathrm{tr}(ad_Y ad_Z ad_X - ad_Y ad_X ad_Z) \\
&= \mathrm{tr}(ad_Y ad_{[Z,X]}) = B(Y,[Z,X]),
\end{aligned}$$

这可以改写为

$$B(ad_X(Y),Z) = -B(Y, ad_X(Z)),$$

即 ad_X 关于 B 斜对称.

如果 $\sigma:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数的自同构, 则由

$$[\sigma(X),Y] = [\sigma(X), \sigma\circ\sigma^{-1}(Y)] = \sigma([X,\sigma^{-1}(Y)])$$

知 $ad_{\sigma(X)} = \sigma \circ ad_X \circ \sigma^{-1}$, 因此

$$B(\sigma(X), \sigma(Y)) = B(X, Y).$$

当 B 非退化时, 称 $\mathfrak{g}$ 为**半单 Lie 代数**. 半单 Lie 代数的分类见 [12]. 当 Lie 群的 Lie 代数为半单 Lie 代数时, 该 Lie 群也称为半单的.

我们知道, 紧致 Lie 群上存在双不变度量. 在此度量下, ad_X 均为斜对称矩阵, 此时 Killing 形式是半负定的. 另一方面, 如果 B 是负定的, 则 $-B$ 就定义了 G 上的一个双不变度量. 通过计算曲率可以说明此时 G 必然是紧致的.

设 G 为紧致半单 Lie 群, σ 为自同构, 且 $\sigma^2 = \mathrm{id}$. $\mathfrak{g}$ 在 σ 下可以分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k},$$

此时 $-B$ 定义了一个内积, 在此内积下, $\mathfrak{m}$ 与 $\mathfrak{k}$ 正交. $-B$ 诱导了 G 上的双不变度量, 使得 G/K 成为对称空间, 其曲率满足

$$R(X, Y, X, Y) = |[X, Y]|^2.$$

设 G 为非紧半单 Lie 群, 可以证明, $\mathfrak{g}$ 可以分解为 $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$, 其中 $\mathfrak{k}$ 为 (紧) 子代数, 且

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

此时, B 在 $\mathfrak{k}$ 上是负定的, 在 $\mathfrak{m}$ 上是正定的, 它诱导了 G/K 上的对称度量. 其曲率满足

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= \langle [[X, Y], X], Y \rangle = B([[X, Y], X], Y) \\ &= -B([X, Y], [X, Y]) = -|[X, Y]|^2. \end{aligned}$$

习题 3.6

1. 证明, 在双不变度量下, Lie 群的曲率张量满足等式
$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$
2. 试说明, 紧致连通 Lie 群的指数映射是满射.
3. 证明, 作为齐性空间, $\mathbb{C}P^n$ 为 Einstein 流形.
4. 说明正规齐性空间 G/H 中的测地线是 Lie 群 G 中单参数子群的投影.
5. 证明, M 为局部对称空间当且仅当沿任意测地线, 平行切平面的截面曲率不变.

6. 在正规坐标系中证明下面的等式

$$L_{\partial_r}\mathrm{II}_{\partial_r} = R(\partial_r,\cdot,\partial_r,\cdot) - \mathrm{II}_{\partial_r}^2.$$

7. 证明 $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$.

8. 证明紧致 Lie 群为对称空间, 并计算其曲率.

9. 说明 $O(k,l)/O(k)\times O(l)$ 为对称空间, 并计算其曲率.

10. 说明 $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ 为对称空间, 并计算其曲率.

§3.7 Gauss-Bonnet 公式

§3.8 Chern-Weil 理论

第四章　流形与上同调

本章主要利用微分形式来对流形的拓扑作初步的研究, 我们将研究 de Rham 上同调的基本性质.

§4.1　Poincaré 引理

§4.2　同伦不变性

§4.3　Hodge 定理

§4.4　进一步的例子

§4.5　示性类和指标公式

定义 Euler 示性类, 证明 Hopf 指标定理. 定义 Thom 类, 研究它的基本性质. Morse 理论?

§4.6　层的上同调

第五章　流形上的椭圆算子

本章介绍流形上的微分算子, 其中我们将研究椭圆算子的重要性质, 特别是 Laplace 算子, 我们也给出 Hodge 定理的证明.

附录

附录 A Whitney 嵌入定理

附录 B 流形上的常微分方程

附录 C Morse 理论简介

参考文献

[1] 陈省身, 陈维桓, 微分几何讲义 (第二版), 北京大学出版社, 北京, 2001.

[2] 徐森林, 薛春华, 流形, 高等教育出版社, 北京, 1991.

[3] 伍鸿熙, 陈维桓, 黎曼几何选讲, 北京大学出版社, 北京, 1993.

[4] 伍鸿熙, 虞言林, 沈纯理, 黎曼几何初步, 北京大学出版社, 北京, 1989.

[5] 詹汉生, 微分流形导引, 北京大学出版社, 北京, 1987.

[6] W. M. Boothby, Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York,1986.

[7] R. Bott and L. W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1982, 1999.

[8] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1974.

[9] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962.

[10] J. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton University, Princeton, 1997.

[11] F. W. Warner, Foundations of Diferentiable Manifolds and Lie Groups, GTM 94, Springer-Verlag, 1983.

[12] R. O. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, GTM 65, Springer-Verlag, 1980.