《流形与几何》期末测验　　2013.12.25

说明: 期末测验务必独立完成, 并于 2014.1.3 日前交给我.

1. (i) 设 M 为微分流形, $p \in M$. 如果 ω 为 p 处的一个余切向量, 证明存在 M 上的光滑函数 f, 使得 $df(p) = \omega$.
   (ii) 设 M 为紧致微分流形, $f \in C^\infty(M)$. 证明: 存在 $p \neq q$, 使得 $df(p) = 0 = df(q)$.

2. 设 $A \in SO(n)$, 证明 $A^*\omega = \omega$, 其中
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^n.$$

3. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数. 如果 c 为 f 的正则值且 $M = f^{-1}(c) \neq \emptyset$, 证明 M 为可定向超曲面.

4. 设 $f_1, \cdots, f_{n-1}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑函数, 证明
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \frac{\partial}{\partial x^{\sigma(n)}} \Big[\frac{\partial f_1}{\partial x^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x^{\sigma(n-1)}} \Big] = 0.$$

5. 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑函数, X 为光滑向量场. 如果 f 或 X 具有紧支集, 证明 $Xf + f\mathrm{div}(X)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的积分为零.

6. 设 M 为紧致定向流形, g 为黎曼度量, dg 表示 (M, g) 的体积形式. 设 h 为 M 上的一个二阶对称协变张量场, 考虑 $g_t = g + th$ ($t \in \mathbb{R}$), 当 $|t|$ 充分小时, g_t 也是 M 上的黎曼度量. 记 (M, g_t) 的体积为 V_t. 证明 $2V'(0) = \int_M (\mathrm{tr}_g h)\, dg$.

7. 证明: 将上半平面映为上半平面的分式线性变换是双曲度量的等距. 双曲度量还有别的等距吗? 你能找出所有的等距吗?

8. 设 (M, g) 为黎曼流形, ∇ 为 Levi-Civita 联络. 定义二阶逆变张量场 h 为: $h(\omega, \eta) = g(\omega^\#, \eta^\#)$, 其中 ω, η 为 1- 形式, $\omega^\#, \eta^\#$ 表示对偶切向量场. 证明: (i) 如果 $X \in \Gamma(TM)$, 则 $\nabla_X \omega^\# = (\nabla_X \omega)^\#$; (ii) $\nabla h = 0$.

9. 设 (M, g) 为黎曼流形, f 为 M 上的光滑函数. 证明 $L_{\nabla f} g = 2\mathrm{Hess}(f)$, 其中 ∇f 为 f 的梯度场.

10. 设 (M, g) 为黎曼流形, f 为 M 上的光滑函数. 记 $\tilde{g} = e^{2f} g$, $\tilde{g}$ 的 Levi-Civita 联络记为 $\tilde{\nabla}$, 曲率张量记为 $\tilde{R}$, 数量曲率记为 $\tilde{S}$.
    (i) 设 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 则 $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (Yf)X + (Xf)Y - g(X, Y)\nabla f$;
    (ii) 利用 (i) 计算 $\tilde{R}$, 并证明
$$\tilde{S} = e^{-2f}[S - 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2],$$
    其中 S 是 g 的数量曲率, n 为 M 的维数.
    (iii) 证明球面在标准度量下的截面曲率恒为 1, 双曲空间的截面曲率恒为 -1.