《流形与几何》期中测验　　2013.10.30

说明: 期中测验务必独立完成, 并于 2013.11.6 日交给我.

1. 证明投影平面 $\mathbb{R}P^2$ 不可定向.

2. 证明 Rank 定理: 秩恒等于 l 的光滑映射有如下局部表示
$$(x^1, x^2, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^l, 0, \cdots, 0).$$

3. 设 M, N 为紧致微分流形, f 为 $M \times N$ 上的光滑函数. 证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 M 上的有限个光滑函数 g_i 和 N 上的有限个光滑函数 h_i $(i = 1, \cdots, k)$, 使得 $\left|f(x,y) - \sum_{i=1}^k g_i(x)h_i(y)\right| < \varepsilon, \ \forall\, x \in M,\ y \in N$.

4. 设 M 为微分流形, f 为 M 上的光滑函数. 如果 $p \in M$, 且 $f(p) = \mathrm{rank}_p f = 0$, 证明存在 M 上的有限个光滑函数 g_i, h_i $(i = 1, \cdots, k)$, 使得
$$f = \sum_{i=1}^k g_i h_i, \quad g_i(p) = h_i(p) = 0, \ \forall\, i = 1, \cdots, k.$$

5. 设 $f : M \to N$ 为微分流形之间的光滑映射. 如果 S 为 M 的正则子流形, 则 $f|_S : S \to N$ 仍为光滑映射; 如果 T 为 N 的正则子流形, 且 $f(M) \subset T$, 则存在光滑映射 $g : M \to T$, 使得 $f = i \circ g$, 其中 $i : T \to N$ 为包含映射.

6. 设 M 为连通的微分流形, $p, q \in M$. 证明, 存在微分同胚 $f : M \to M$, 使得 $f(p) = q$.

7. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形, X 为 M 上的光滑切向量场, 如果对任意 $p \in N$, 均有 $X(p) \in T_pN$, 则称 X 与 N 相切.

   (i) 记 $C_N^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid f|_N = 0\}$. 证明: M 上的切向量场 X 与 N 相切当且仅当 $Xf \in C_N^\infty(M), \forall\, f \in C_N^\infty(M)$.

   (ii) 设 X, Y 为 M 上的切向量场. 如果 X, Y 均与 N 相切, 证明 $[X, Y]$ 也与 N 相切.

8. (i) 设 A, B 为 n 阶方阵. 如果 $AB = BA$, 证明: $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.

   (ii) 一般地, 设 G 为 Lie 群, $X, Y \in \mathfrak{g}$. 如果 $[X, Y] = 0$, 证明
$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y).$$

9. 找出所有互不同构的 1 维连通 Lie 群 (提示: 利用指数映射).

10. 研究仿射变换群 $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 的指数映射和 Lie 代数. 其中, 仿射变换群的乘法运算定义为
$$(A, x) \cdot (B, y) = (AB, x + Ay), \quad \forall\, A, B \in GL(n, \mathbb{R}),\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$