多元函数微分学

曲面方程

- 直线、平面的方程，位置关系。
- 二次曲面的标准方程，柱面，锥面，旋转曲面 (习题 4.3: 6-13)。

求多元隐函数的偏导数

- 用公式法求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ 时，应将 x,y,z 视为独立变量对 F 求偏导.
- 全微分法是通用的方法（可用于求高阶偏导数）：将 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求导 (x,y 视为独立变量，z 视作 x,y 的函数)，可得 z'_x,z'_y 的方程组，解之即得.
- 多元复合函数含有一个多个中间变量，求偏导时用链锁法则。
- 对多元函数求两阶以上偏导时，中间变量对自变量的一阶偏导数仍是多元函数.

几何上的应用

- 空间曲线在某点处的切线和法平面方程。
- 空间曲面在某点处的切平面和法线方程。
- 方向导数。

多元函数的极值和最值

- 无条件极值：取极值的必要条件和充分条件。若 $\triangle=B^2-AC=0$, 需通过定义判断驻点是否极值点 (例 5.7.2)。
- 条件极值：化为无条件极值问题求解；更一般的是利用拉格朗日乘数法求解。要注意的是：拉格朗日乘数法所得到的点只是可疑极值点，到底是否是极值点及其类型要通过充分条件判断。
- 最值：设 $z=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，又设 $f(x,y)$ 在 D 内可偏导，则 $f(x,y)$ 在 D 存在最大值 M 和最小值 m, 且它们或在 D 的边界上达到 (条件极值)，或在 D 内满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ 的点 (即 $f(x,y)$ 的驻点) 处达到 (无条件极值)。如能确定最值肯定存在，将上面所得函数值进行比较，最大（小）者为最大（小）值。

二重积分

直角坐标下二重积分的计算

- 画出积分区域的图形，确定积分上下限。
- 根据积分区域的形状及被积函数的表达式确定积分次序。对于积分式中含 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int\sin x^2\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 等形式的二重积分，一般需改变积分次序后对 x 积分。

(2009年第一(8)题) 计算$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}\sin^3 x\mathrm{d}x.$

• 当被积函数为分段函数时，应根据分段函数的表达式将积分区域划分为若干子区域，使得在每个子区域上，被积函数的表达式唯一，如被积函数带有绝对值符号或含有最值符号 max 及 min 等需在子区域上去掉这些符号变为普通函数再积分。

(2009年第七题) 计算$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 0\le y\le x, 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$
而积分区域$D=\{(x,y)|\sqrt{2x-x^2}\le y\le 2, 0\le x\le 2\}$.

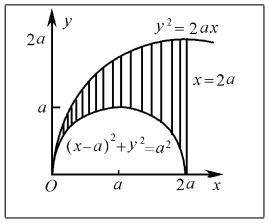
极坐标系下二重积分的计算

• 区域由圆（或其一部分）或由极坐标方程给出的曲线围成，且被积函数形如 $f(x^2+y^2)$, $f(\frac{x}{y})$.

交换二重积分的积分次序或化积分为累次积分

• 累次积分交换次序时，按以下顺序：由原累次积分的上、下限所确定的不等式组 → 区域 $D\rightarrow$ 建立另一组不等式组。

改变积分 I $=$ $\int_0^a \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$
$+$ $\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x$
$+$ $\int_a^{2a} \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序。



• 注意对称性的运用：考虑对称性时，要兼顾积分区域和被积函数。

三重积分

坐标系的选取主要取决于积分域 Ω 的形状，利用对称性解题时要兼顾被积函数 $f(x,y,z)$ 的形式。

• 积分域为长方体、四面体等时，一般在直角坐标系下计算。

• 积分域为柱体或由柱面、锥面、旋转抛物面与其他曲面所围成的形体时，一般在柱坐标系下计算，

$$I=\iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

若 D_{xy} 为 Ω 在 xOy 平面上的投影，在 D_{xy} 内任取一点作平行于 z 轴的直线，与边界曲面的交点确定 z 的上下限。

• 积分域为球体或球体的一部分 – 锥体时，一般在球面坐标系下计算,

$$I=\iiint_\Omega f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

• 利用 “先二后一” 计算积分，例如 $f(x,y,z)=f(z)$, 积分区域 Z 截面 D_z 的面积很容易计算.

> (2007年第六题) 求曲环面：
> $x=(b+a\cos\psi)\cos\phi, y=(b+a\cos\psi)\sin\phi, z=a\sin\psi \quad (0<a\le b)$
> 所界的物体体积。

• 采用 “先一后二” 时如何画出投影区域，确定上下顶面？

> 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$2z-y=3$所围成的立体的表面积。

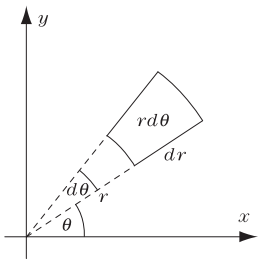
• 利用对称性。

变量替换的微元分析法：

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \text{其中} J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

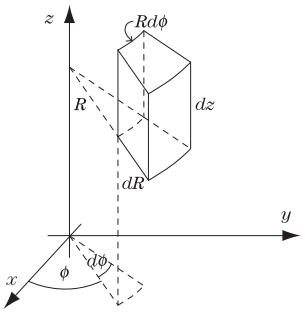
• 平面极坐标：

$$J=r,\ \ \mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$



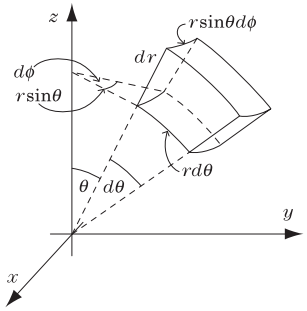
• 柱坐标：

$$\mathrm{d}S=R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z,\ \ \mathrm{d}V=R\mathrm{d}R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z.$$



• 球坐标：

$$\mathrm{d}S=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\ \ \mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$



曲线积分

1. 对弧长的曲线积分

   • 首先画出积分路径的图形；然后将坐标参数化 $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$, 计算积分

   $$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\mathrm{d}t.$$

2. 对坐标的曲线积分

   • 化为参数的定积分求解，设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, 则

   $$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t,$$

   其中 α 对应于 L 的起点，β 对应于 L 的终点。

   • 若路径闭合，可利用格林公式或斯托克斯公式求解，但要注意公式的使用条件。若路径不闭合，则加边使路径闭合，然后使用格林公式。

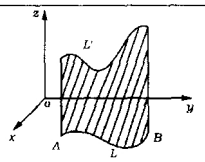
   • 应用格林定理时易出的差错 (例 7.3.3)：
   (1) 忽视 $P(x,y), Q(x,y)$ 在闭区域 D 上一阶偏导数的连续性；
   (2) 忘记曲线 L 是封闭的，并且是取正向。

被 积 函 数	积 分 路 径 c	积分值 I
$\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$	$x=\cos\theta, y=\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$	2π
	$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 正向	0
	$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 从 $(2,1)$ 到 $(0,1)$ 上半圆周	$\dfrac{\pi}{4}$
	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$	2π

   • 第一型与第二型曲线积分的关系：
   (1) 不同之处：曲线 L 有否方向，以及积分微元的定义；
   (2) 可以互化：使切线方向与第二型曲线积分的积分曲线方向相同，若在点 (x,y,z) 处切线的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则有

   $$\mathrm{d}x = \mathrm{d}l\cos\alpha, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}l\cos\beta, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}l\cos\gamma.$$

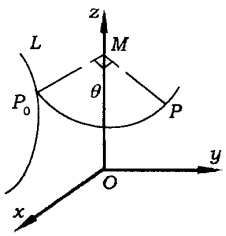
3. 曲面面积的计算法

计算方法	适用范围	基　本　形　式
利用二重积分	已知曲面 Σ 的方程及其在坐标面上的投影域	设 $\Sigma: z = f(x,y)$(与 // z 轴的直线只交于一点)在 xoy 平面上的投影域为 D_{xy},则 Σ 的面积 $A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$,$\Sigma$ 的其它形式有类似公式.
利用弧长的曲线积分	当曲面在某坐标面上的投影为一条曲线时,通常用对弧长的曲线积分计算	 若曲线 L 上点的竖坐标是曲线 L 上点 $P(x,y)$ 的函数,即 $z = f(x,y)(\geqslant 0)$, 则 $A = \int_L f(x,y)dl$.

附:常见曲面方程

旋转曲面

设 L 是 xOz 平面上一条曲线(如图 7.7),其方程是 $\begin{cases} f(x,z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ L 绕 z 轴旋转得到旋转曲面,设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点,由点 $P_0(x_0,0,z_0)$ 旋转而来(点 $M(0,0,z)$ 是圆心).



由　$|x_0| = |\overrightarrow{MP_0}| = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{x^2 + y^2}, z_0 = z$ 得旋转面方程是

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0;$$

或　由参数方程 $x = f(t), y = g(t), z = h(t)(t \in (\alpha,\beta))$,得旋转面的参数方程

$$\begin{cases} x = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}\cos\theta, \\ y = \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}\sin\theta, \\ z = h(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

柱面

Γ 是一条空间曲线,直线 L 沿 Γ 平行移动所产生的曲面叫柱面,Γ 称为柱面的准线,L 叫柱面的母线.

▶1. 若准线方程是 $\Gamma: \begin{cases} f(x,y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

(1) 当母线平行于 z 轴时,柱面方程是 $f(x,y) = 0$;

(2) 当母线的方向向量是 $S = \{l,m,n\}$ 时,柱面方程是:$f(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z) = 0$.

▶2. 若准线方程是 $\Gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in (\alpha,\beta) \\ z = h(t) \end{cases}$,母线的方向向量是 $S = \{l,m,n\}$,柱面方程是

$$\begin{cases} x = f(t) + lu, \\ y = g(t) + mu, \\ z = h(t) + nu \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta,\ -\infty < u < +\infty).$$

二次曲面

曲面名称	方　　程	曲面名称	方　　程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	旋转抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z\ (p>0)$
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\ (p,q>0)$	双曲抛物面	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\ (p,q>0)$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物柱面	$\frac{x^2}{2p}=y\ (p>0)$