内容提要

函数的凹凸性

约定：以下的凹凸均指“上凹”和“上凸”

定义（凸函数）

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，以及任意 $\lambda \in [0,1]$，有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数。若对于 $\lambda \in (0,1)$ 上式中的不等号严格成立，则称其为严格凸函数。

注：任意两点间的割线都不会位于两点间曲线的上方

可导凸函数的充要条件

定理 **P107**

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 为 (a,b) 内的凸函数，当且仅当：对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有

$$f(x_2) \le f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

注：任意点处的切线总位于曲线上方

凸函数的判定

定理 2.4.6（充分条件） P107

设 $f(x)$ 在 (a, b) 二阶可导，则

1. 若 $f''(x)$ 恒不大于零，$f(x)$ 为凸函数
2. 若 $f''(x)$ 恒不小于零，$f(x)$ 为凹函数

拐点：两侧 $f''(x)$ 反号的点

推论

严格凸（凹）函数的驻点为极值点。

内容提要

渐近线

定义 P109-110

1. 水平渐近线: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$
2. 铅直渐近线: $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \infty$
3. 斜渐近线:
   - 斜率: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   - 截距: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$

例 1

求函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线。

分析作图法

例 2

作出函数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。

1. 分析函数一般性质：定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点
2. 求一、二阶导函数：确定不可导点
3. 列表分析：单调、凸凹区间，极值点和拐点
4. 画出渐近线：水平、铅直和斜渐近线
5. 描点作图

分析作图法

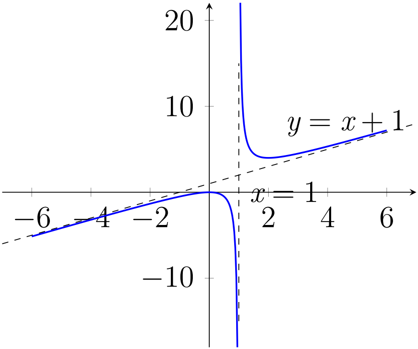
例 2

作出函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。

分析作图法

例 2

作出函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。



小结

1. 可导函数的极值

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性
3. 分析作图法

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性
3. 分析作图法
   - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性
3. 分析作图法
   - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...
   - 一、二阶导数、不可导点

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性
3. 分析作图法
    - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...
    - 一、二阶导数、不可导点
    - 极值点、拐点、单调区间

小结

1. 可导函数的极值
2. 函数的凹凸性
3. 分析作图法
    - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...
    - 一、二阶导数、不可导点
    - 极值点、拐点、单调区间
    - 渐近线

练习

例 3：函数作图

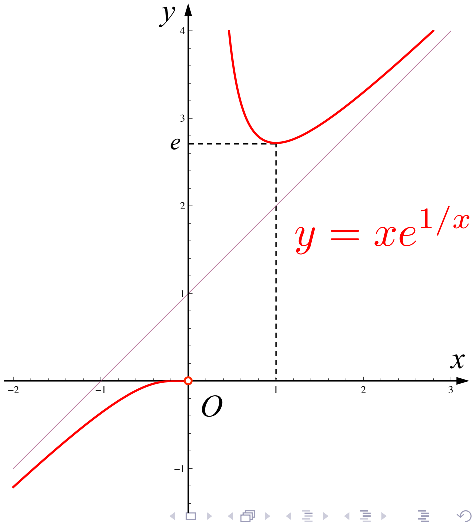
$$y = xe^{1/x}$$

练习

例 3：函数作图

$$y = xe^{1/x}$$

- 极值点：$y(1) = e$
- 渐近线：$y = x + 1$



复习与回顾

如何刻画一条平面曲线的几何特征？

- 切线斜率：一阶导数
- 凹凸性：二阶导数
- 长度：弧微分
- 弯曲程度：曲率

内容提要

弧微分

弧微分：曲线 $y=f(x)$ 的弧长关于自变量 x 的微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

- 参数方程形式

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

- 极坐标形式

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

内容提要

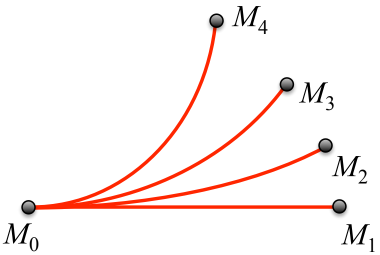
铁路的设计

曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？

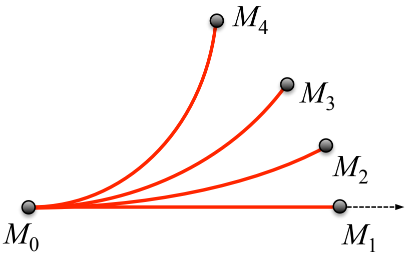
曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？



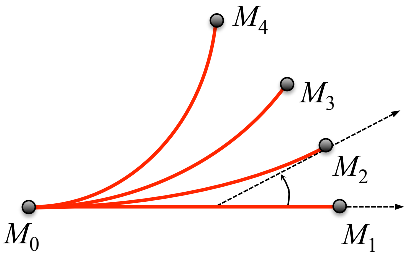
曲率

如何刻画曲线的弯曲程度?



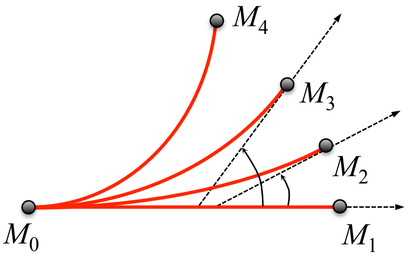
曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？



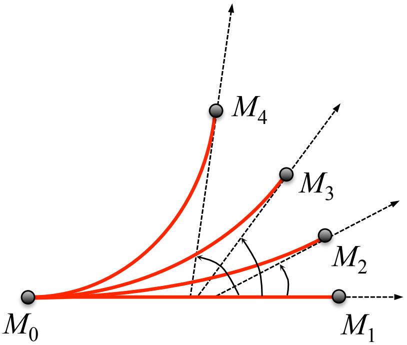
曲率

如何刻画曲线的弯曲程度?



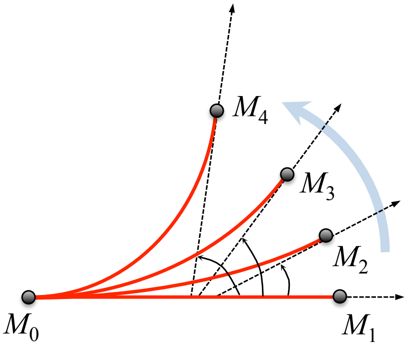
曲率

如何刻画曲线的弯曲程度?



曲率

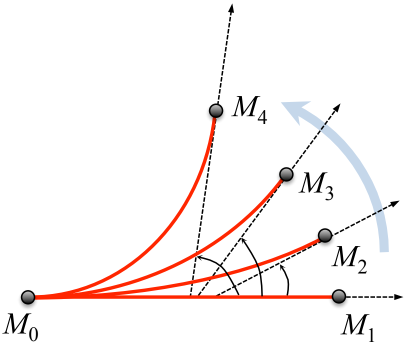
如何刻画曲线的弯曲程度？



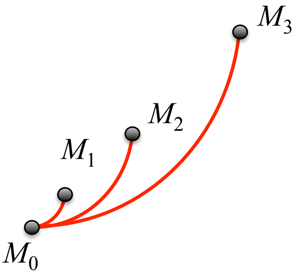
长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大

曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？

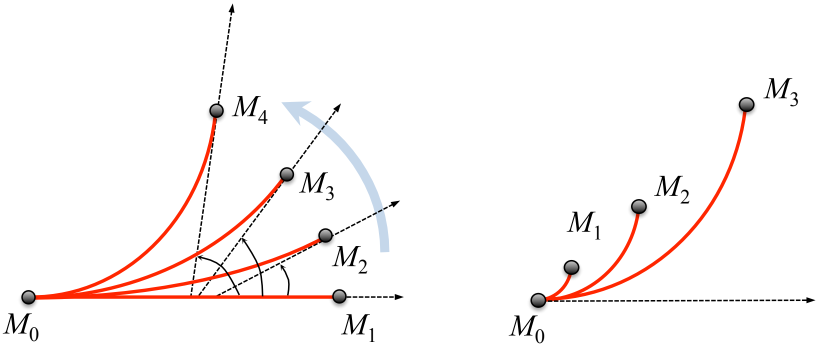


长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大



曲率

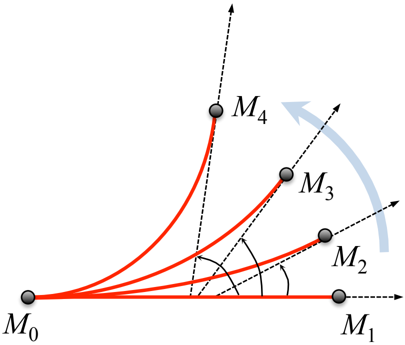
如何刻画曲线的弯曲程度？

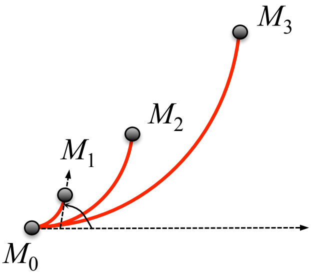


长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大

曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？

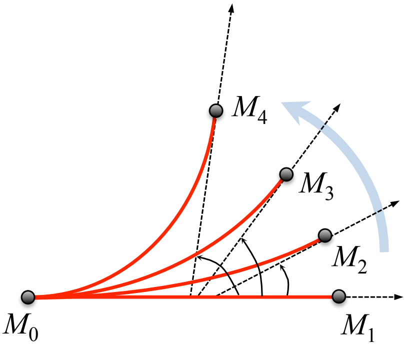




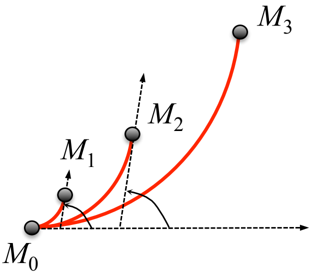
长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大

曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？

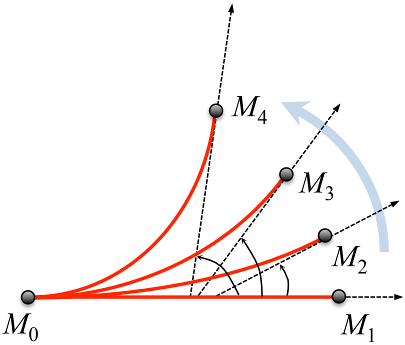


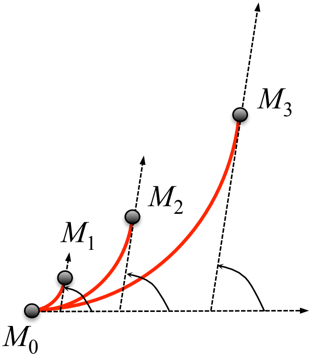
长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大



曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？

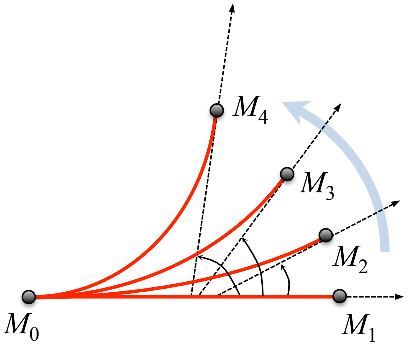




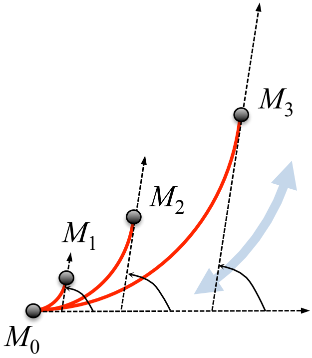
长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大

曲率

如何刻画曲线的弯曲程度？



长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大



切线转角相同的曲线，弧长越短弯曲程度越大

1、曲率的定义

曲线的弯曲程度与切线的转角成正比，与弧长成反比

定义 1

设曲线 C 光滑且可求长度。从其上一点 M_0 出发，到另一点 M 的弧长为 Δs，切线转角为 $\Delta\alpha$。若极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则称之为曲线 C 在 M_0 处的曲率：

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

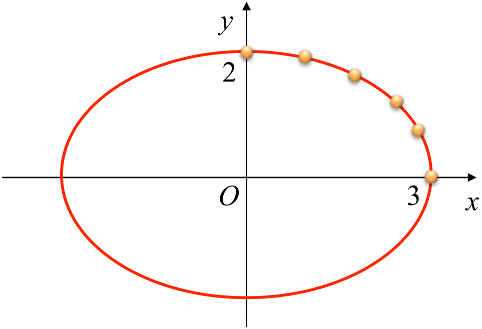
- 在曲线上某一点处的切线转角关于弧长的变化率

2、曲率的计算

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内二阶可导，则

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}=\frac{|x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t|}{\{[x'_t]^2+[y'_t]^2\}^{3/2}}$$

2、曲率的计算



例

求椭圆 $x = 3\cos t, y = 2\sin t\,(0 \le t \le 2\pi)$ 上任意点处的曲率，并指出其中曲率最大的点。

2、曲率的计算

设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内二阶可导，则

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}} = \frac{|x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t|}{\{[x'_t]^2 + [y'_t]^2\}^{3/2}}$$

例

求椭圆 $x = 3\cos t, y = 2\sin t\,(0 \le t \le 2\pi)$ 上任意点处的曲率，并指出其中曲率最大的点。

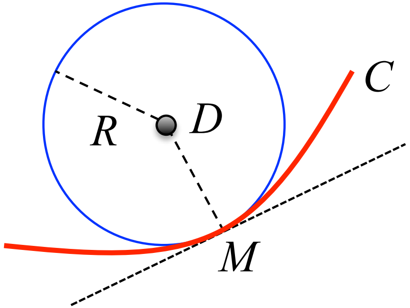
2、曲率的计算

例

求椭圆 $x = 3\cos t, y = 2\sin t\,(0 \leq t \leq 2\pi)$ 上任意点处的曲率，并指出其中曲率最大的点。

3、曲率圆与曲率的应用

曲率圆： 与给定曲线在凹侧相切，且曲率相同的圆

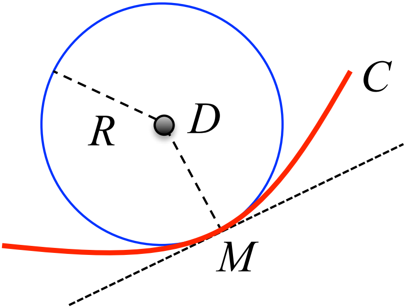


定理 1

曲率圆与给定曲线二阶相切。

3、曲率圆与曲率的应用

曲率圆： 与给定曲线在凹侧相切，且曲率相同的圆



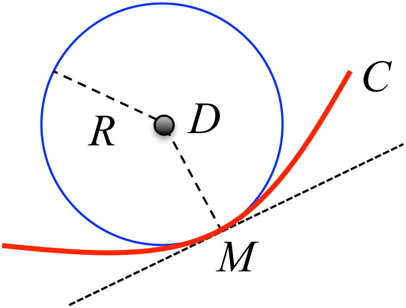
思考：与已知曲线在给定点处二阶相切的圆一定是其曲率圆吗？

定理 1

曲率圆与给定曲线二阶相切。

3、曲率圆与曲率的应用

曲率圆： 与给定曲线在凹侧相切，且曲率相同的圆



思考：与已知曲线在给定点处二阶相切的圆一定是其曲率圆吗？ √

定理 1

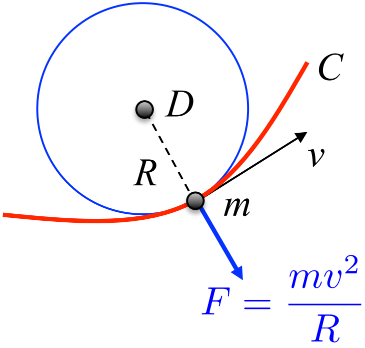
曲率圆与给定曲线二阶相切。

曲率半径与离心力

质量为 m 的质点以速度 v 通过光滑曲线上一点，所受离心力为

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

其中 R 为曲线在该点处的曲率半径。



铁路中的缓和曲线

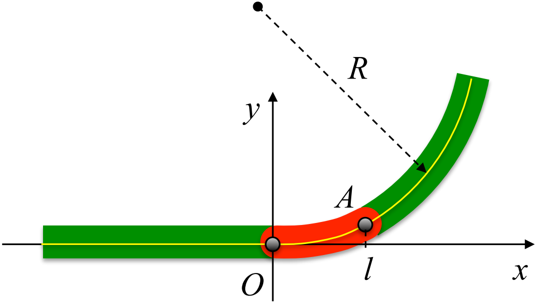
为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。

铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。

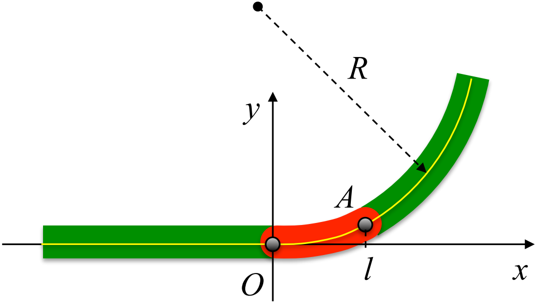
铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。



铁路中的缓和曲线

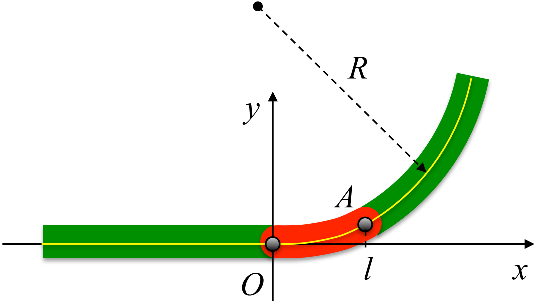
为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。



常用的缓和曲线：

铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。

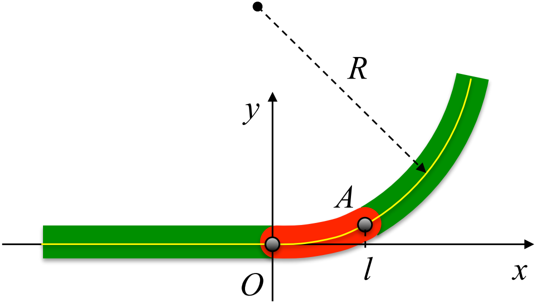


常用的缓和曲线：

- 三次多项式

铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。

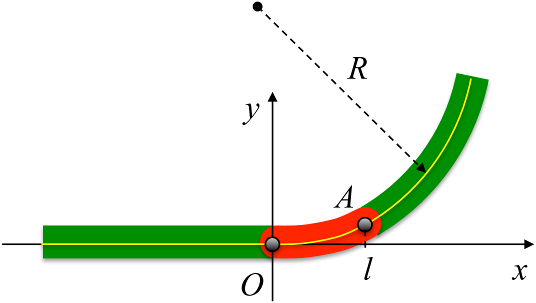


常用的缓和曲线：

- 三次多项式
- 渐开螺旋线

铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。

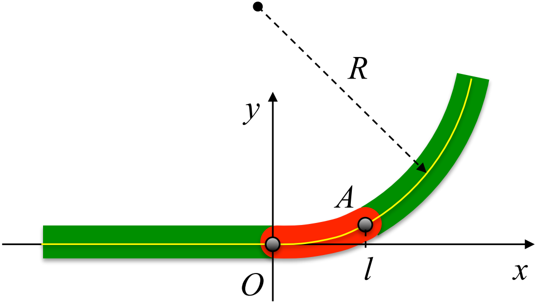


常用的缓和曲线：

- 三次多项式
- 渐开螺旋线
- 双纽线

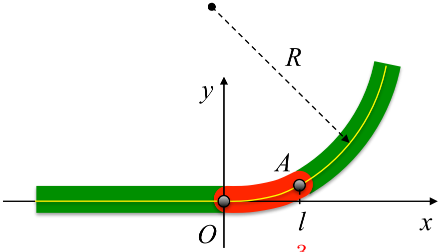
铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化。



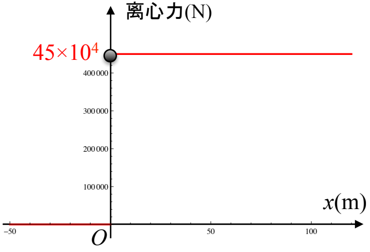
常用的缓和曲线：

- 三次多项式
- 渐开螺旋线
- 双纽线
- …

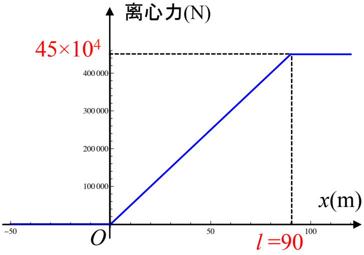


缓和曲线：$y = \dfrac{x^3}{6Rl}\ (l << R)$

- 匀速行驶 $v = 108km/h$
- 列车重量 $m = 500t$
- 圆弧半径 $R = 1000m$
- 缓和曲线长 $l = 90m$

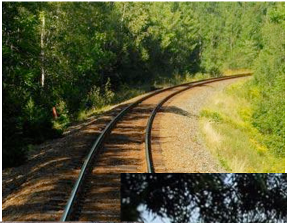


不使用缓和曲线



使用缓和曲线后

铁路与轨道交通




高速公路

过山车

过山车

小结

1. 曲率：切线转角相对于弧长的变化率

小结

1. 曲率：切线转角相对于弧长的变化率
2. 曲率的计算：

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}$$

小结

1. 曲率：切线转角相对于弧长的变化率
2. 曲率的计算：
$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}$$
3. 曲率圆与曲率的应用

小结

1. 曲率：切线转角相对于弧长的变化率
2. 曲率的计算：

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}$$

3. 曲率圆与曲率的应用
   - 曲率半径、离心力与缓和曲线

小结

1. 曲率：切线转角相对于弧长的变化率
2. 曲率的计算：

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''_{xx}|}{[1+(y'_x)^2]^{3/2}}$$

3. 曲率圆与曲率的应用
   - 曲率半径、离心力与缓和曲线

课后思考题 (过山车设计)

试设计一个分段的多项式函数，完成过山车上两段不同斜率的直线轨道的接合。